BURHAN

Suites numériques (généralités) : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques (généralités)	Entraînement	8

Exercice 1

Bornes et sens de variation d'une suite définie par un quotient

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 3}.$$

1.

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Calcule de proche en proche ; pour u_2, écris $4 \times \dfrac{3}{2} + 2$ et $\dfrac{3}{2} + 3$ séparément.

CORRIGÉ

On calcule de proche en proche.

$$u_1 = \frac{4 + 2}{1 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$u_2 = \frac{4 \times \dfrac{3}{2} + 2}{\dfrac{3}{2} + 3} = \frac{8}{\dfrac{9}{2}} = \frac{16}{9}$$

Conclusion. $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $u_2 = \dfrac{16}{9}$.

2.

Soit x un réel tel que $1 \leq x < 2$. Montrer que :

$$\frac{4x+2}{x+3} - 1 = \frac{3x-1}{x+3}$$

et

$$\frac{4x+2}{x+3} - 2 = \frac{2(x-2)}{x+3}.$$

En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $1 \leq u_n < 2$.

INDICE

Réduis au même dénominateur, qui est strictement positif. Dans l'hérédité, applique ces deux égalités à $x = u_n$.

CORRIGÉ

Les deux égalités. Soit x un réel tel que $1 \leq x < 2$. Alors $x + 3 > 0$, et l'on réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
&\frac{4x+2}{x+3} - 1 \\
&= \frac{4x+2-x-3}{x+3} \\
&= \frac{3x-1}{x+3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{4x+2}{x+3} - 2 \\
&= \frac{4x+2-2x-6}{x+3} \\
&= \frac{2(x-2)}{x+3}
\end{aligned}$$

Encadrement. Comme $x \geq 1$, on a $3x - 1 \geq 2 > 0$; comme $x < 2$, on a $x - 2 < 0$. Le dénominateur étant strictement positif, la première différence est strictement positive et la seconde strictement négative :

$$1 \leq \frac{4x+2}{x+3} < 2$$

Récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « u_n est défini et $1 \leq u_n < 2$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ et $1 \leq 1 < 2$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Par hypothèse de récurrence, $1 \leq u_n < 2$, donc $u_n + 3 > 0$: u_{n+1} est défini. L'encadrement précédent, appliqué à $x = u_n$, donne $1 \leq u_{n+1} < 2$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Les deux égalités sont démontrées et, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $1 \leq u_n < 2$.

3.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 3}.$$

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

INDICE

Réduis au même dénominateur, puis développe $(2 - u_n)(u_n + 1)$ pour comparer. Pour le signe, utilise l'encadrement de la question 2.

CORRIGÉ

Calcul de la différence. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2., $u_n + 3 > 0$, et :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{4u_n + 2 - u_n(u_n + 3)}{u_n + 3} \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 3} \end{aligned}$$

Comparaison des numérateurs. On développe :

$$\begin{aligned} & (2 - u_n)(u_n + 1) \\ &= 2u_n + 2 - u_n^2 - u_n \\ &= -u_n^2 + u_n + 2 \end{aligned}$$

Les deux numérateurs sont égaux : l'égalité est démontrée.

Signe. D'après la question 2., $1 \leq u_n < 2$. Donc $2 - u_n > 0$, $u_n + 1 > 0$ et $u_n + 3 > 0$, d'où $u_{n+1} - u_n > 0$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$: d'après F07 (monotonie), la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 2

Intervalle stable et croissance par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{4}.$$

1.

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Calcule u_1^2 avant d'ajouter 3.

CORRIGÉ

$$u_1 = \frac{0 + 3}{4} = \frac{3}{4}$$

Avec $u_1^2 = \dfrac{9}{16}$:

$$u_2 = \frac{\dfrac{9}{16} + 3}{4} = \frac{\dfrac{57}{16}}{4} = \frac{57}{64}$$

Conclusion. $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \dfrac{57}{64}$.

2.

Montrer que, pour tout réel $x \in [0,1]$, le réel $\dfrac{x^2+3}{4}$ appartient à $[0,1]$. En déduire que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Encadre d'abord x^2 pour $x \in [0,1]$, puis ajoute 3 et divise par 4. Pour la déduction, cite F03 (suite récurrente bien définie).

CORRIGÉ

La fonction associée. La relation s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f associe à tout réel x le réel $\dfrac{x^2+3}{4}$. Cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, donc sur $I = [0,1]$.

Stabilité de I. Soit $x \in [0,1]$. Alors $0 \leq x^2 \leq 1$. En ajoutant 3, puis en divisant par 4 :

$$3 \leq x^2+3 \leq 4$$
$$\frac{3}{4} \leq \frac{x^2+3}{4} \leq 1$$

En particulier, $\dfrac{x^2+3}{4} \in [0,1]$.

Application à la suite. L'intervalle I vérifie donc l'hypothèse de F03 (suite récurrente bien définie), et $u_0 = 0 \in I$. D'après F03, la suite est bien définie et $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conclusion. Pour tout réel $x \in [0,1]$, $\dfrac{x^2+3}{4} \in [0,1]$; par conséquent, $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite (u_n) est bornée.

3.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$. Conclure.

INDICE

Pour l'hérédité, pars de $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$: deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. Écris ensuite u_{n+2} à l'aide de u_{n+1}.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « $u_n \leq u_{n+1}$ ».

Initialisation. $u_0 = 0 \leq \dfrac{3}{4} = u_1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. D'après la question 2., $u_n \geq 0$; avec l'hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$. Alors :

$$\begin{aligned} & u_{n+1}^2 - u_n^2 \\ & = (u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $u_n^2 \leq u_{n+1}^2$. En ajoutant 3, puis en divisant par 4 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n^2 + 3}{4} \\ &\leq \frac{u_{n+1}^2 + 3}{4} = u_{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: d'après F07 (monotonie), la suite (u_n) est croissante.

4.

Retrouver ce résultat en montrant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{4}.$$

INDICE

Développe $(u_n - 1)(u_n - 3)$ et compare avec $u_n^2 + 3 - 4u_n$. Le signe de chaque facteur se lit sur l'encadrement de la question 2.

CORRIGÉ

Calcul de la différence. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2 + 3}{4} - u_n \\ &= \frac{u_n^2 - 4u_n + 3}{4} \end{aligned}$$

Or $(u_n - 1)(u_n - 3) = u_n^2 - 4u_n + 3$: l'égalité est démontrée.

Signe. D'après la question 2., $u_n \leq 1$, donc $u_n - 1 \leq 0$ et $u_n - 3 < 0$. Le produit de deux réels négatifs est positif : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$: on retrouve que la suite (u_n) est croissante (F07 : monotonie).

Exercice 3

Quotient de termes consécutifs et rang de départ

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$.

1.

Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle monotone ?

INDICE

Range les cinq valeurs, puis cherche deux comparaisons de sens contraires.

CORRIGÉ

On obtient $u_1 = 2$, $u_2 = \dfrac{4}{4} = 1$, $u_3 = \dfrac{8}{9}$, $u_4 = \dfrac{16}{16} = 1$ et $u_5 = \dfrac{32}{25}$.

- $u_2 < u_1$: la suite n'est pas croissante ;
- $u_4 > u_3$: elle n'est pas décroissante.

Conclusion. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas monotone.

2.

Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2},$$

puis que $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ équivaut à $(n-1)^2 > 2$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est strictement croissante.

INDICE

Les termes sont strictement positifs. Compare $2n^2$ à $(n+1)^2$ en développant, puis fais apparaître $(n-1)^2$.

CORRIGÉ

Positivité. Soit $n \geq 1$ un entier. On a $2^n > 0$ et $n^2 > 0$, donc $u_n > 0$: tous les termes sont strictement positifs.

Calcul du quotient.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} \\ &= \frac{2n^2}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Comparaison à 1. Comme $(n+1)^2 > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 &\Leftrightarrow 2n^2 > (n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow (n-1)^2 > 2\end{aligned}$$

À partir du rang 3. Soit $n \geq 3$ un entier. Alors $n - 1 \geq 2$, donc $(n-1)^2 \geq 4 > 2$, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Conclusion. Les termes sont strictement positifs, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour tout $n \geq 3$. D'après F09 (monotonie par le quotient), la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est strictement croissante.

3.

En déduire que $u_n \geq \dfrac{8}{9}$ pour tout entier $n \geq 1$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle minorée ?

INDICE

Sépare les rangs $n \geq 3$, où F08 (comparaison des termes) s'applique à partir de u_3, et les deux premiers rangs, calculés à la question 1.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$ un entier. Deux cas couvrent tous les rangs.

Cas $n \geq 3$. La suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est croissante (question 2.). D'après F08 (comparaison des termes), $u_n \geq u_3 = \dfrac{8}{9}$.

Cas $n = 1$ ou $n = 2$. $u_1 = 2 \geq \dfrac{8}{9}$ et $u_2 = 1 \geq \dfrac{8}{9}$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq \dfrac{8}{9}$: la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par $\dfrac{8}{9}$, qui est son plus petit terme.

Exercice 4

Trois termes consécutifs : arithmétiques ou géométriques

Dans cet exercice, x désigne un réel.

1.

Déterminer x pour que $x-1$, $2x+1$ et $4x+1$ soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Donner ces trois termes et la raison.

INDICE

D'après F12 (trois termes arithmétiques), la condition est $a+c=2b$: écris-la, puis résous.

CORRIGÉ

D'après F12 (trois termes arithmétiques), la suite $x-1$, $2x+1$, $4x+1$ est formée de termes successifs d'une même suite arithmétique, pris dans cet ordre, exactement lorsque $(x-1)+(4x+1)=2(2x+1)$, soit :

$$\begin{aligned} &5x = 4x+2 \\ \Leftrightarrow\ &x = 2 \end{aligned}$$

Pour $x=2$, les trois termes sont 1, 5 et 9 : on a bien $5-1=9-5=4$.

Conclusion. Il faut et il suffit que $x=2$; les trois termes sont alors 1, 5, 9, et la raison vaut $r=4$.

2.

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la liste x, $x+4$, $9x$ est formée de trois termes successifs d'une suite géométrique. Préciser chaque fois la raison.

INDICE

La condition $b^2 = ac$ s'écrit $(x+4)^2 = (3x)^2$. Une différence de deux carrés se factorise.

CORRIGÉ

Condition nécessaire. D'après F16 (trois termes géométriques), si les réels x, $x+4$, $9x$, pris dans cet ordre, se suivent dans une suite géométrique, on a :

$$(x+4)^2 = x \times 9x = (3x)^2$$

On factorise la différence de deux carrés :

$$\begin{aligned}(x+4)^2 - (3x)^2 &= 0\\ \Leftrightarrow (x+4-3x)&\\ \times (x+4+3x) &= 0\\ \Leftrightarrow (4-2x)(4x+4) &= 0\end{aligned}$$

Donc $x = 2$ ou $x = -1$.

Réciproque pour $x = 2$. Les termes sont $2, 6, 18$; on a $2 \neq 0$ et $6^2 = 36 = 2 \times 18$. D'après F16, ils conviennent, avec la raison $q = \dfrac{6}{2} = 3$.

Réciproque pour $x = -1$. Les termes sont $-1, 3, -9$; on a $-1 \neq 0$ et $3^2 = 9 = (-1) \times (-9)$. D'après F16, ils conviennent, avec la raison $q = \dfrac{3}{-1} = -3$.

Conclusion. Les valeurs cherchées sont $x = 2$, avec la raison 3, et $x = -1$, avec la raison -3.

3.

Existe-t-il un réel x pour lequel x, $x+4$ et $9x$ sont à la fois trois termes consécutifs d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique ?

INDICE

Cherche d'abord la seule valeur qui convient pour la suite arithmétique, puis compare avec la question 2.

CORRIGÉ

Condition arithmétique. D'après F12 (trois termes arithmétiques), les réels x, $x+4$, $9x$ se suivent dans une suite arithmétique exactement lorsque :

$$\begin{aligned}x + 9x &= 2(x+4)\\ \Leftrightarrow 8x &= 8\\ \Leftrightarrow x &= 1\end{aligned}$$

Les termes sont alors $1, 5, 9$.

Condition géométrique. D'après la question 2., elle impose $x = 2$ ou $x = -1$.

Conclusion. Aucune valeur de x ne vérifie les deux conditions : un tel réel n'existe pas.

Exercice 5

Les premiers termes ne suffisent pas

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies, pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$\begin{aligned} u_n &= 4n \\ &\quad + (n-1)(n-2)(n-3), \\ v_n &= 3^{n-1} \\ &\quad + (n-1)(n-2)(n-3), \end{aligned}$$

ainsi que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = 5 \times 3^n - 2$.

1.

Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Les trois premiers termes sont-ils en progression arithmétique ? La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

INDICE

Le produit $(n-1)(n-2)(n-3)$ est nul pour $n = 1$, 2 et 3. Teste F12 (trois termes arithmétiques) sur deux triplets.

CORRIGÉ

Termes. Le produit $(n-1)(n-2)(n-3)$ est nul pour $n = 1$, 2 et 3, et vaut $3 \times 2 \times 1 = 6$ pour $n = 4$. Donc $u_1 = 4$, $u_2 = 8$, $u_3 = 12$ et $u_4 = 16 + 6 = 22$.

Les trois premiers termes. $u_1 + u_3 = 16 = 2u_2$: ils sont en progression arithmétique.

Les termes u_2, u_3, u_4. $u_2 + u_4 = 30$, tandis que $2u_3 = 24$. D'après F12 (trois termes arithmétiques), u_2, u_3, u_4 ne sont pas des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Conclusion. Les trois premiers termes sont en progression arithmétique, mais la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

2.

Même question pour (v_n) avec une suite géométrique.

INDICE

Calcule v_1 à v_4, puis teste F16 (trois termes géométriques) sur les triplets (v_1, v_2, v_3) et (v_2, v_3, v_4).

CORRIGÉ

Termes. $v_1 = 1$, $v_2 = 3$, $v_3 = 9$ et $v_4 = 27 + 6 = 33$.

Les trois premiers termes. $v_2^2 = 9 = v_1 v_3$: ils vérifient la condition de F16 (trois termes géométriques).

Les termes v_2, v_3, v_4. $v_3^2 = 81$, tandis que $v_2 v_4 = 99$. D'après F16, v_2, v_3, v_4 ne sont pas des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Conclusion. Les trois premiers termes vérifient la condition géométrique, mais la suite (v_n) n'est pas géométrique.

3.

Montrer que (w_n) n'est pas géométrique, mais que la suite (t_n) définie par $t_n = w_n + 2$ l'est.

INDICE

Calcule w_0, w_1, w_2 pour réfuter. Pour (t_n), écris t_{n+1} en fonction de t_n.

CORRIGÉ

La suite (w_n). $w_0 = 3$, $w_1 = 13$ et $w_2 = 43$. Alors $w_1^2 = 169$, tandis que $w_0 w_2 = 129$. D'après F16 (trois termes géométriques), (w_n) n'est pas géométrique.

La suite (t_n). Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $t_n = w_n + 2 = 5 \times 3^n$, donc :

$$t_{n+1} = 5 \times 3^{n+1} = 3\, t_n$$

D'après F14 (suite géométrique), (t_n) est géométrique de raison 3, de premier terme $t_0 = 5$.

Conclusion. La suite (w_n) n'est pas géométrique, mais (t_n) l'est, de raison 3.

Exercice 6

Des sommes à reconnaître

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.

Calculer $S = 7 + 12 + 17 + \cdots + 302$.

INDICE

On ajoute 5 d'un terme au suivant. Écris le terme d'indice k sous la forme $7 + 5k$ et trouve l'indice du dernier terme.

CORRIGÉ

Une suite arithmétique. D'un terme au suivant, on ajoute 5 : les termes sont ceux de la suite $(a_k)_{k\geq 0}$ définie par $a_k = 7 + 5k$, arithmétique de raison 5 (F10 : suite arithmétique).

Nombre de termes. Le dernier terme vérifie $7 + 5k = 302$, soit $5k = 295$ et $k = 59$. La somme va de a_0 à a_{59} : elle compte 60 termes.

Calcul. D'après F13 (somme arithmétique) :

$$\begin{aligned} S &= 60 \times \frac{7 + 302}{2} \\ &= 30 \times 309 = 9270 \end{aligned}$$

Conclusion. $S = 9270$.

2.

Calculer $T_n = \sum_{k=1}^{n} (4k - 1)$ en fonction de n.

INDICE

La suite de terme général $4k - 1$ est arithmétique de raison 4. Repère le premier et le dernier terme.

CORRIGÉ

La suite de terme général $4k - 1$ est arithmétique de raison 4 (F10 : suite arithmétique). La somme T_n compte $n - 1 + 1 = n$ termes, de $4 \times 1 - 1 = 3$ à $4n - 1$.

D'après F13 (somme arithmétique) :

$$\begin{aligned} T_n &= n \times \frac{3 + 4n - 1}{2} \\ &= n \times \frac{4n + 2}{2} \\ &= n(2n + 1) \end{aligned}$$

Conclusion. $T_n = n(2n + 1)$.

3.

Calculer $U_n = \sum_{k=0}^{n}(k + 2^k)$ en fonction de n.

INDICE

Sépare la somme en deux : $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} 2^k$. Chacune relève d'une formule du cours.

CORRIGÉ

Séparation. On regroupe les termes en deux sommes :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

Première somme. Le terme d'indice 0 est nul. D'après F13 (somme arithmétique) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k &= 1 + 2 + \cdots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Seconde somme. D'après F17 (somme géométrique), avec $q = 2 \neq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^k &= \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \\ &= 2^{n+1} - 1\end{aligned}$$

Conclusion. $U_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 2^{n+1} - 1$.

Exercice 7

Une suite auxiliaire arithmétique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 3u_n}.$$

1.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n > 0$. Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Si $u_n > 0$, que dire de $1 + 3u_n$? Pense à la propriété « u_n est défini et $u_n > 0$ ».

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « u_n est défini et $u_n > 0$ ».

Initialisation. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ est défini et $\dfrac{1}{2} > 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Comme $u_n > 0$, on a $1 + 3u_n > 1$: le dénominateur n'est pas nul, et u_{n+1} est défini. C'est le quotient de deux réels strictement positifs, donc $u_{n+1} > 0$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n > 0$.

Calcul de u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{\dfrac{1}{2}}{1 + \dfrac{3}{2}} = \frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{5}{2}} = \frac{1}{5}$$

$$u_2 = \frac{\dfrac{1}{5}}{1 + \dfrac{3}{5}} = \frac{\dfrac{1}{5}}{\dfrac{8}{5}} = \frac{1}{8}$$

2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Donner v_0.

INDICE

v_n est défini car $u_n \neq 0$. Écris v_{n+1} comme l'inverse de u_{n+1}, puis sépare la fraction en deux.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1., $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$: v_n et v_{n+1} sont définis, et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1+3u_n}{u_n} \\ &= \frac{1}{u_n} + 3 = v_n + 3 \end{aligned}$$

La différence $v_{n+1} - v_n = 3$ ne dépend pas de n, et $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = 2$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 3$: d'après F10 (suite arithmétique), (v_n) est arithmétique de raison 3, et $v_0 = 2$.

3.

En déduire v_n, puis u_n, en fonction de n.

INDICE

Applique F11 (terme général arithmétique) à (v_n), puis reviens à u_n par l'inverse.

CORRIGÉ

Expression de v_n. D'après F11 (terme général arithmétique), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 + 3n = 2 + 3n$$

Expression de u_n. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ et $v_n = 3n + 2 > 0$, donc :

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{3n+2}$$

Contrôle. $u_1 = \dfrac{1}{5}$ et $u_2 = \dfrac{1}{8}$, comme à la question 1.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3n + 2$ et $u_n = \dfrac{1}{3n+2}$.

Exercice 8

Une suite auxiliaire géométrique de raison négative

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 11$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 4 - \frac{u_n}{3}.$$

1.

Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle monotone ?

INDICE

Calcule de proche en proche, puis compare les termes consécutifs.

CORRIGÉ

On calcule de proche en proche :

$$u_1 = 4 - \frac{11}{3} = \frac{1}{3}$$
$$u_2 = 4 - \frac{1}{9} = \frac{35}{9}$$

- $u_1 < u_0$: la suite n'est pas croissante ;
- $u_2 > u_1$: elle n'est pas décroissante.

Conclusion. $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{35}{9}$, et la suite (u_n) n'est pas monotone.

2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 3$. Établir une relation entre v_{n+1} et v_n, puis en déduire la nature de (v_n) et la valeur de v_0.

INDICE

Exprime v_{n+1} à l'aide de u_n, puis fais apparaître $u_n - 3$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On remplace u_{n+1} par la relation de récurrence, puis on fait apparaître $u_n - 3$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 = 1 - \frac{u_n}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(u_n - 3) \\ &= -\frac{1}{3}\, v_n \end{aligned}$$

Le premier terme vaut $v_0 = u_0 - 3 = 8$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -\frac{1}{3}\, v_n$: d'après F14 (suite géométrique), (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$, et $v_0 = 8$.

3.

En déduire u_n en fonction de n.

INDICE

F15 (terme général géométrique) donne v_n ; reviens ensuite à $u_n = v_n + 3$.

CORRIGÉ

D'après F15 (terme général géométrique), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = 8 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Comme $u_n = v_n + 3$, on en déduit l'expression de u_n.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 3 + 8 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

4.

Montrer que $-5 \leq u_n \leq 11$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Calcule $|v_n|$ et majore-le par un réel indépendant de n.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 3., $u_n = 3 + v_n$, avec :

$$|v_n| = 8 \times \frac{1}{3^n} = \frac{8}{3^n}$$

Comme $3^n \geq 1$, on obtient $|v_n| \leq 8$, c'est-à-dire $-8 \leq v_n \leq 8$. En ajoutant 3 aux trois membres : $-5 \leq u_n \leq 11$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-5 \leq u_n \leq 11$: la suite (u_n) est bornée.