BURHAN

# Suites numériques (généralités) : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/exercices/application

| Chapitre | Palier | Exercices |
|---|---|---|
| Suites numériques (généralités) | Application | 10 |

## Exercice 1

### Calculer des termes et lire les indices

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = n^3 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**1.**

Calculer $u_0$, $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_{10}$.

INDICE

Remplace $n$ par l'indice demandé dans l'expression de $u_n$. Pour $u_{10}$, aucun terme intermédiaire n'est utile.

**2.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer en fonction de $n$, sous forme développée, les réels $u_{n+1}$, $u_n + 1$ et $u_{2n}$.

INDICE

Pour $u_{n+1}$, remplace $n$ par $n+1$ partout, puis développe $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

**3.**

Comparer $u_3$ et $u_2 + 1$, puis $u_2$ et $2u_1$. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Utilise les valeurs de la question 1. Une seule valeur qui diffère suffit pour réfuter une égalité générale.

### Exercice 2

## Une suite définie par une relation de récurrence

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{u_n + 1}.$$

**1.**

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme $u_n$ est défini et $u_n > 0$.

INDICE

Pour $n \in \mathbb{N}$, note $P(n)$ : « $u_n$ est défini et $u_n > 0$ ». Dans l'hérédité, regarde d'abord le dénominateur $u_n + 1$.

**2.**

Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$ sous forme de fractions irréductibles.

INDICE

Calcule les termes un par un : chaque terme sert au suivant. Pour $u_2$, écris numérateur et dénominateur avec le dénominateur commun $2$.

**3.**

On garde la même relation, mais avec le premier terme $-1$ au lieu de $1$. Que se passe-t-il ?

INDICE

Essaie de calculer le terme d'indice $1$ : regarde son dénominateur.

**Exercice 3**

## Écrire et calculer des sommes avec le symbole Σ

Dans cet exercice, $n$ désigne un entier naturel non nul.

**1.**

Écrire chacune des sommes suivantes avec le symbole Σ, puis donner son nombre de termes.

- $A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{20}$.
- $B = 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{11}$.

INDICE

Repère le terme général, puis la première et la dernière valeur de l'indice. Le nombre de termes est $n - p + 1$ (F04 : symbole Σ).

**2.**

Développer puis calculer $C = \sum_{k=4}^{9} (k^2 - k)$.

INDICE

Remplace $k$ par $4$, $5$, …, $9$ : il y a six termes.

**3.**

Calculer $D = \sum_{k=0}^{n} 5$ et $E = \sum_{k=1}^{n} 5$.

INDICE

Le terme général ne dépend pas de $k$ : il suffit de compter les termes.

### Exercice 4

## Une suite bornée qui n'est pas monotone

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n+2}.$$

**1.**

Calculer $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

INDICE

$(-1)^n$ vaut $1$ si $n$ est pair, et $-1$ si $n$ est impair.

**2.**

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{5}{2} \leq u_n \leq \frac{7}{2}.$$

INDICE

Commence par encadrer $\dfrac{1}{n+2}$, à partir de $n+2 \geq 2$. Le facteur $(-1)^n$ ne change que le signe.

**3.**

En déduire un réel $A \geq 0$, indépendant de $n$, tel que $|u_n| \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

D'après la question 2., tous les termes sont strictement positifs. Que vaut alors $|u_n|$ ?

**4.**

La suite $(u_n)$ est-elle monotone ?

INDICE

Compare $u_1$ à $u_0$, puis $u_2$ à $u_1$.

### Exercice 5

## Sens de variation par la différence

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2n^2 - 7n$ et $v_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

**1.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

INDICE

Développe $2(n+1)^2$, puis simplifie : il reste une expression du premier degré en $n$.

**2.**

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle croissante ? Est-elle monotone ?

INDICE

Calcule $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$, puis compare les termes consécutifs.

**3.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $v_{n+1} - v_n$ et en déduire le sens de variation de $(v_n)$.

INDICE

Réduis au même dénominateur $(n+1)(n+2)$, et développe les deux produits du numérateur.

### Exercice 6

## Sens de variation par le quotient

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{3^n}{2^n + 1}$.

**1.**

Calculer $u_0$, $u_1$ et $u_2$. Justifier que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Une puissance de $3$ et une puissance de $2$ sont strictement positives.

**2.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(2^n + 1)}{2^{n+1} + 1},$$

puis comparer ce quotient à $1$. Conclure.

INDICE

Multiplie $u_{n+1}$ par l'inverse de $u_n$. Pour comparer à $1$, calcule la différence entre le numérateur et le dénominateur, en écrivant $2^{n+1} = 2 \times 2^n$.

**3.**

En déduire que la suite $(u_n)$ est minorée, et donner un minorant.

INDICE

Quelle propriété relie la croissance d'une suite et son premier terme ?

### Exercice 7

## Reconnaître une suite arithmétique

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{7-2n}{3}$ et $v_n = n^2 + n$.

**1.**

Prouver que la suite $(u_n)$ est arithmétique, puis donner sa raison et $u_0$.

INDICE

Calcule $u_{n+1} - u_n$ pour un entier $n$ quelconque, sans remplacer $n$ par une valeur.

**2.**

Calculer $u_{30}$ à l'aide du terme général, puis donner le sens de variation de $(u_n)$.

INDICE

F11 (terme général arithmétique) donne $u_n = u_0 + nr$. Le signe de la raison décide du sens de variation.

**3.**

La suite $(v_n)$ est-elle arithmétique ?

INDICE

Calcule $v_0$, $v_1$ et $v_2$, puis teste la relation de F12 (trois termes arithmétiques).

### Exercice 8

## Terme général et sommes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique telle que $u_4 = -3$ et $u_{11} = 25$.

**1.**

Déterminer la raison $r$ de la suite, son premier terme $u_0$, puis $u_n$ en fonction de $n$.

INDICE

D'après F11 (terme général arithmétique), $u_{11} = u_4 + (11-4)r$.

**2.**

Calculer $u_{20}$. Déterminer le plus petit entier $n$ tel que $u_n > 0$.

INDICE

Écris la condition $u_n > 0$ avec le terme général de la question 1.

**3.**

Calculer $S = \sum_{k=0}^{20} u_k$ et $T = \sum_{k=5}^{15} u_k$.

INDICE

Pour chaque somme, repère le premier terme, le dernier terme et le nombre de termes $n - p + 1$, puis applique F13 (somme arithmétique).

### Exercice 9

## Reconnaître une suite géométrique

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{5^n}$ et $w_n = 2^n + 1$.

**1.**

Montrer que $(u_n)$ est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Écris $u_{n+1}$, puis fais apparaître $u_n$ en facteur.

**2.**

Donner le sens de variation de $(u_n)$.

INDICE

Vérifie les deux hypothèses de F15 (terme général géométrique) : le signe du premier terme et la position de la raison.

**3.**

La suite $(w_n)$ est-elle géométrique ?

INDICE

Calcule $w_0$, $w_1$ et $w_2$, puis compare $w_1^2$ et $w_0 w_2$.

### Exercice 10

## Terme général et sommes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite géométrique de premier terme $u_1 = 6$ et de raison $q = -2$.

**1.**

Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ pour tout entier $n \geq 1$, puis calculer $u_6$.

INDICE

Le premier rang est $1$ : F15 (terme général géométrique) donne $u_n = u_1\, q^{n-1}$.

**2.**

La suite $(u_n)$ est-elle monotone ?

INDICE

Calcule $u_2$ et $u_3$, puis compare les termes consécutifs.

**3.**

Calculer $S = \sum_{k=1}^{8} u_k$.

INDICE

Premier terme $u_1$, raison $-2$, nombre de termes $8 - 1 + 1$ : applique F17 (somme géométrique).

**4.**

Calculer $B = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^7$.

INDICE

C'est la somme $1 + q + \cdots + q^m$ de F17 (somme géométrique), avec $q = 3$ ; trouve $m$.