BURHAN

Suites numériques (généralités) : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques (généralités)	Application	10

Exercice 1

Calculer des termes et lire les indices

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = n^3 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.

Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_{10}.

INDICE

Remplace n par l'indice demandé dans l'expression de u_n. Pour u_{10}, aucun terme intermédiaire n'est utile.

CORRIGÉ

Remplaçons n par chaque indice dans l'expression $u_n = n^3 - 2n$.

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 - 0 = 0 \\ u_1 &= 1 - 2 = -1 \\ u_2 &= 8 - 4 = 4 \\ u_3 &= 27 - 6 = 21 \end{aligned}$$

Pour u_{10}, le calcul est direct, sans terme intermédiaire : $u_{10} = 1000 - 20 = 980$.

Conclusion. $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 21$ et $u_{10} = 980$.

2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer en fonction de n, sous forme développée, les réels u_{n+1}, $u_n + 1$ et u_{2n}.

INDICE

Pour u_{n+1}, remplace n par $n+1$ partout, puis développe $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

CORRIGÉ

Calcul de u_{n+1}. On remplace n par $n+1$ partout :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^3 - 2(n+1) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &\quad - 2n - 2 \\ &= n^3 + 3n^2 + n - 1 \end{aligned}$$

Calcul de $u_n + 1$. On ajoute 1 au terme u_n : $u_n + 1 = n^3 - 2n + 1$.

Calcul de u_{2n}. On remplace n par $2n$:

$$\begin{aligned} u_{2n} &= (2n)^3 - 2 \times 2n \\ &= 8n^3 - 4n \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = n^3 + 3n^2 + n - 1$, $u_n + 1 = n^3 - 2n + 1$ et $u_{2n} = 8n^3 - 4n$.

3.

Comparer u_3 et $u_2 + 1$, puis u_2 et $2u_1$. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Utilise les valeurs de la question 1. Une seule valeur qui diffère suffit pour réfuter une égalité générale.

CORRIGÉ

D'après la question 1. :

- $u_3 = 21$ et $u_2 + 1 = 5$, donc $u_3 \neq u_2 + 1$;
- $u_2 = 4$ et $2u_1 = -2$, donc $u_2 \neq 2u_1$.

L'égalité $u_{n+1} = u_n + 1$ est donc fausse pour $n = 2$, et l'égalité $u_{2n} = 2u_n$ est fausse pour $n = 1$. Une seule valeur de n suffit pour réfuter une égalité annoncée pour tout n.

Conclusion. On ne peut remplacer ni u_{n+1} par $u_n + 1$, ni u_{2n} par $2u_n$: un indice ne se manipule pas comme le terme lui-même.

Exercice 2

Une suite définie par une relation de récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{u_n + 1}.$$

1.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est défini et $u_n > 0$.

INDICE

Pour $n \in \mathbb{N}$, note $P(n)$: « u_n est défini et $u_n > 0$ ». Dans l'hérédité, regarde d'abord le dénominateur $u_n + 1$.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « u_n est défini et $u_n > 0$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ est défini et $1 > 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$, donc $u_n + 1 > 1$: le dénominateur n'est pas nul, et u_{n+1} est défini.

De plus, $u_n + 4 > 0$ et $u_n + 1 > 0$: le quotient u_{n+1} est strictement positif. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est défini et $u_n > 0$.

2.

Calculer u_1, u_2 et u_3 sous forme de fractions irréductibles.

INDICE

Calcule les termes un par un : chaque terme sert au suivant. Pour u_2, écris numérateur et dénominateur avec le dénominateur commun 2.

CORRIGÉ

On calcule les termes un par un, chacun à partir du précédent.

$$u_1 = \frac{1+4}{1+1} = \frac{5}{2}$$

$$u_2 = \frac{\frac{5}{2}+4}{\frac{5}{2}+1} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{13}{7}$$

$$u_3 = \frac{\frac{13}{7}+4}{\frac{13}{7}+1} = \frac{\frac{41}{7}}{\frac{20}{7}} = \frac{41}{20}$$

Conclusion. $u_1 = \frac{5}{2}$, $u_2 = \frac{13}{7}$ et $u_3 = \frac{41}{20}$.

3.

On garde la même relation, mais avec le premier terme -1 au lieu de 1. Que se passe-t-il ?

INDICE

Essaie de calculer le terme d'indice 1 : regarde son dénominateur.

CORRIGÉ

Avec le premier terme -1, le terme d'indice 1 s'écrirait :

$$\frac{-1+4}{-1+1} = \frac{3}{0}$$

Ce quotient n'existe pas : le terme d'indice 1 n'est pas défini, et le calcul s'arrête.

La récurrence de la question 1. reposait sur l'hypothèse $u_0 > 0$, qui n'est plus vérifiée.

Conclusion. Avec le premier terme -1, la relation ne définit aucune suite.

Exercice 3

Écrire et calculer des sommes avec le symbole Σ

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.

Écrire chacune des sommes suivantes avec le symbole Σ, puis donner son nombre de termes.

- $A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{20}$.
- $B = 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{11}$.

INDICE

Repère le terme général, puis la première et la dernière valeur de l'indice. Le nombre de termes est $n - p + 1$ (F04 : symbole Σ).

CORRIGÉ

Somme A. Le terme général est $\dfrac{1}{k}$, et l'indice k va de 2 à 20 :

$$A = \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k}$$

D'après F04 (symbole Σ), elle compte $20 - 2 + 1 = 19$ termes.

Somme B. Le terme général est 3^k, et l'indice k va de 2 à 11 :

$$B = \sum_{k=2}^{11} 3^k$$

Elle compte $11 - 2 + 1 = 10$ termes.

Conclusion. $A = \sum_{k=2}^{20} \dfrac{1}{k}$ compte 19 termes, et $B = \sum_{k=2}^{11} 3^k$ en compte 10.

2.

Développer puis calculer $C = \sum_{k=4}^{9} (k^2 - k)$.

INDICE

Remplace k par 4, 5, …, 9 : il y a six termes.

CORRIGÉ

On remplace k par $4, 5, 6, 7, 8$ puis 9 : la somme compte $9 - 4 + 1 = 6$ termes.

$$\begin{aligned} C &= (16 - 4) + (25 - 5) \\ &\quad + (36 - 6) + (49 - 7) \\ &\quad + (64 - 8) + (81 - 9) \\ &= 12 + 20 + 30 \\ &\quad + 42 + 56 + 72 \\ &= 232 \end{aligned}$$

Conclusion. $C = 232$.

3.

Calculer $D = \sum_{k=0}^{n} 5$ et $E = \sum_{k=1}^{n} 5$.

INDICE

Le terme général ne dépend pas de k : il suffit de compter les termes.

CORRIGÉ

Le terme général 5 ne dépend pas de k : chaque somme vaut 5 fois son nombre de termes.

Somme D. L'indice va de 0 à n : D compte $n - 0 + 1 = n + 1$ termes, tous égaux à 5. Donc $D = 5(n + 1)$.

Somme E. L'indice va de 1 à n : E compte $n - 1 + 1 = n$ termes, tous égaux à 5. Donc $E = 5n$.

Conclusion. $D = 5(n + 1)$ et $E = 5n$: les deux sommes diffèrent du seul terme d'indice 0.

Exercice 4

Une suite bornée qui n'est pas monotone

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n+2}.$$

1.

Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

INDICE

$(-1)^n$ vaut 1 si n est pair, et -1 si n est impair.

CORRIGÉ

Pour n pair, $(-1)^n = 1$; pour n impair, $(-1)^n = -1$.

$$\begin{aligned} u_0 &= 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \\ u_1 &= 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \\ u_2 &= 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4} \\ u_3 &= 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5} \end{aligned}$$

Conclusion. $u_0 = \frac{7}{2}$, $u_1 = \frac{8}{3}$, $u_2 = \frac{13}{4}$ et $u_3 = \frac{14}{5}$.

2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{5}{2} \leq u_n \leq \frac{7}{2}.$$

INDICE

Commence par encadrer $\dfrac{1}{n+2}$, à partir de $n+2 \geq 2$. Le facteur $(-1)^n$ ne change que le signe.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Encadrement de $\dfrac{1}{n+2}$. On a $n+2 \geq 2 > 0$. Le passage à l'inverse renverse l'ordre entre réels strictement positifs, donc :

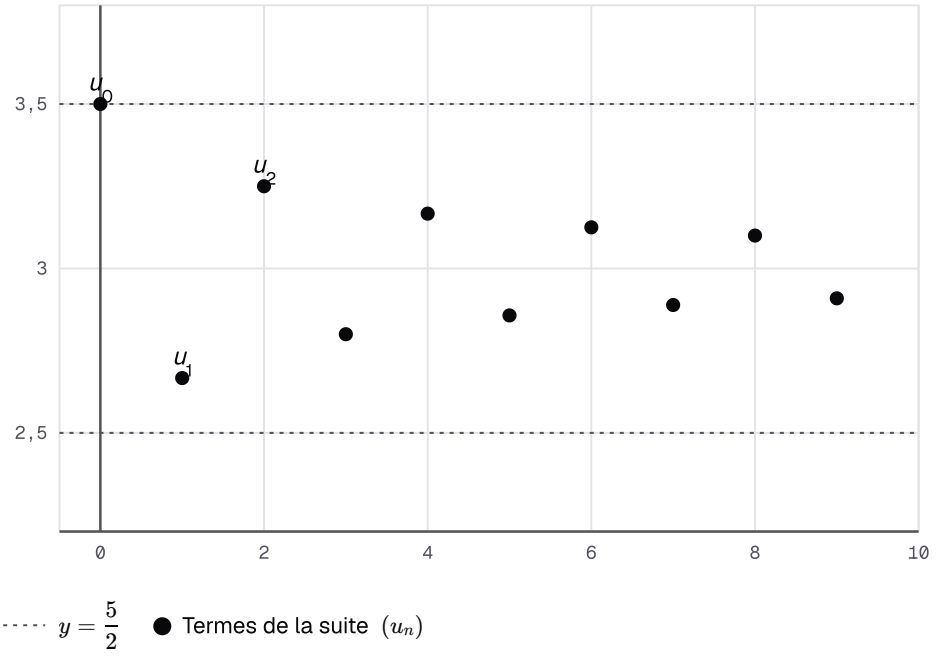
$$0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2}$$

Encadrement du quotient. Le réel $\dfrac{(-1)^n}{n+2}$ vaut $\dfrac{1}{n+2}$ ou $-\dfrac{1}{n+2}$. Dans les deux cas :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(-1)^n}{n+2} \leq \frac{1}{2}$$

Ajout de 3. En ajoutant 3 aux trois membres, on obtient $\dfrac{5}{2} \leq u_n \leq \dfrac{7}{2}$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{5}{2} \leq u_n \leq \dfrac{7}{2}$: la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{5}{2}$ et majorée par $\dfrac{7}{2}$, donc bornée.



Les points (n, u_n) passent alternativement au-dessus et au-dessous de 3, sans sortir de la bande comprise entre y = 5/2 et y = 7/2.

3.

En déduire un réel $A \geq 0$, indépendant de n, tel que $|u_n| \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

D'après la question 2., tous les termes sont strictement positifs. Que vaut alors $|u_n|$?

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2., $u_n \geq \dfrac{5}{2} > 0$, donc $|u_n| = u_n$. Ainsi :

$$|u_n| = u_n \leq \frac{7}{2}$$

Le réel $\dfrac{7}{2}$ ne dépend pas de n.

Conclusion. Le réel $A = \dfrac{7}{2}$ convient : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \dfrac{7}{2}$, conformément à F06 (bornée et valeur absolue).

4.

La suite (u_n) est-elle monotone ?

INDICE

Compare u_1 à u_0, puis u_2 à u_1.

CORRIGÉ

Comparons les premiers termes, calculés à la question 1. :

- $u_1 = \dfrac{8}{3} < \dfrac{7}{2} = u_0$, car $16 < 21$: la suite n'est pas croissante ;
- $u_2 = \dfrac{13}{4} > \dfrac{8}{3} = u_1$, car $39 > 32$: la suite n'est pas décroissante.

Conclusion. La suite (u_n) n'est pas monotone, bien qu'elle soit bornée.

Exercice 5

Sens de variation par la différence

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2n^2 - 7n$ et $v_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

INDICE

Développe $2(n+1)^2$, puis simplifie : il reste une expression du premier degré en n.

CORRIGÉ

Calcul de la différence. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1)^2 - 7(n+1) \\ &\quad - 2n^2 + 7n \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - 7n \\ &\quad - 7 - 2n^2 + 7n \\ &= 4n - 5 \end{aligned}$$

Signe à partir du rang 2. Soit $n \geq 2$ un entier. Alors $4n - 5 \geq 8 - 5 = 3 > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 4n - 5$. Cette différence est strictement positive pour tout $n \geq 2$: d'après F07 (monotonie), la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

2.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle croissante ? Est-elle monotone ?

INDICE

Calcule u_0, u_1, u_2 et u_3, puis compare les termes consécutifs.

CORRIGÉ

Calculons les premiers termes : $u_0 = 0$, $u_1 = -5$, $u_2 = -6$ et $u_3 = -3$.

- $u_1 < u_0$: la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas croissante ;
- $u_3 > u_2$: elle n'est pas décroissante non plus.

On retrouve ces signes avec la question 1. : $u_1 - u_0 = 4 \times 0 - 5 = -5$ et $u_3 - u_2 = 4 \times 2 - 5 = 3$.

Conclusion. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas croissante, et elle n'est pas monotone, alors que $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

3.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $v_{n+1} - v_n$ et en déduire le sens de variation de (v_n).

INDICE

Réduis au même dénominateur $(n+1)(n+2)$, et développe les deux produits du numérateur.

CORRIGÉ

Réduction au même dénominateur. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1}$$

Le dénominateur commun est $(n+1)(n+2)$, et le numérateur vaut :

$$\begin{aligned}&(n+3)(n+1) - (n+2)^2 \\ &= n^2 + 4n + 3 \\ &\quad - (n^2 + 4n + 4) \\ &= -1\end{aligned}$$

Donc :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

Signe. Le dénominateur $(n+1)(n+2)$ est strictement positif, donc $v_{n+1} - v_n < 0$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n < 0$: d'après F07 (monotonie), la suite (v_n) est strictement décroissante.

Exercice 6

Sens de variation par le quotient

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{3^n}{2^n+1}$.

1.

Calculer u_0, u_1 et u_2. Justifier que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Une puissance de 3 et une puissance de 2 sont strictement positives.

CORRIGÉ

Premiers termes. $u_0 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = \dfrac{3}{2+1} = 1$ et $u_2 = \dfrac{9}{4+1} = \dfrac{9}{5}$.

Signe. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une puissance d'un réel strictement positif est strictement positive : $3^n > 0$ et $2^n + 1 > 1 > 0$. Le quotient u_n est donc strictement positif.

Conclusion. $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{9}{5}$, et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(2^n+1)}{2^{n+1}+1},$$

puis comparer ce quotient à 1. Conclure.

INDICE

Multiplie u_{n+1} par l'inverse de u_n. Pour comparer à 1, calcule la différence entre le numérateur et le dénominateur, en écrivant $2^{n+1} = 2 \times 2^n$.

CORRIGÉ

Calcul du quotient. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1., $u_n \neq 0$: on multiplie u_{n+1} par l'inverse de u_n.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}+1} \times \frac{2^n+1}{3^n} \\ &= \frac{3(2^n+1)}{2^{n+1}+1}\end{aligned}$$

Comparaison à 1. Avec $2^{n+1} = 2 \times 2^n$, le numérateur moins le dénominateur vaut :

$$\begin{aligned}&3 \times 2^n + 3 - (2 \times 2^n + 1) \\ &= 2^n + 2 > 0\end{aligned}$$

Le dénominateur $2^{n+1}+1$ est strictement positif et inférieur au numérateur, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Les termes étant strictement positifs (question 1.), d'après F09 (monotonie par le quotient), la suite (u_n) est strictement croissante.

3.

En déduire que la suite (u_n) est minorée, et donner un minorant.

INDICE

Quelle propriété relie la croissance d'une suite et son premier terme ?

CORRIGÉ

D'après la question 2., la suite (u_n) est croissante. D'après F08 (comparaison des termes), chaque terme est alors supérieur ou égal au premier : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq u_0 = \frac{1}{2}.$$

Conclusion. La suite (u_n) est minorée, et $\frac{1}{2}$ en est un minorant.

Exercice 7

Reconnaître une suite arithmétique

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{7-2n}{3}$ et $v_n = n^2 + n$.

1.

Prouver que la suite (u_n) est arithmétique, puis donner sa raison et u_0.

INDICE

Calcule $u_{n+1} - u_n$ pour un entier n quelconque, sans remplacer n par une valeur.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} = \dfrac{7-2(n+1)}{3} = \dfrac{5-2n}{3}$, donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5-2n}{3} - \frac{7-2n}{3} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Cette différence ne dépend pas de n.

Conclusion. D'après F10 (suite arithmétique), la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -\dfrac{2}{3}$, et son premier terme est $u_0 = \dfrac{7}{3}$.

2.

Calculer u_{30} à l'aide du terme général, puis donner le sens de variation de (u_n).

INDICE

F11 (terme général arithmétique) donne $u_n = u_0 + nr$. Le signe de la raison décide du sens de variation.

CORRIGÉ

Calcul de u_{30}. D'après F11 (terme général arithmétique), $u_n = u_0 + nr$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc :

$$\begin{aligned} u_{30} &= \frac{7}{3} + 30 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{7}{3} - 20 = -\frac{53}{3} \end{aligned}$$

On retrouve ce résultat avec l'expression de l'énoncé : $u_{30} = \dfrac{7-60}{3} = -\dfrac{53}{3}$.

Sens de variation. La raison $-\dfrac{2}{3}$ est strictement négative : d'après F11, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Conclusion. $u_{30} = -\dfrac{53}{3}$, et la suite (u_n) est strictement décroissante.

3.

La suite (v_n) est-elle arithmétique ?

INDICE

Calcule v_0, v_1 et v_2, puis teste la relation de F12 (trois termes arithmétiques).

CORRIGÉ

Calculons les trois premiers termes : $v_0 = 0$, $v_1 = 2$ et $v_2 = 6$. Alors $v_0 + v_2 = 6$, tandis que $2v_1 = 4$.

Comme $v_0 + v_2 \neq 2v_1$, d'après F12 (trois termes arithmétiques), v_0, v_1, v_2 ne sont pas trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Conclusion. La suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 8

Terme général et sommes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique telle que $u_4 = -3$ et $u_{11} = 25$.

1.

Déterminer la raison r de la suite, son premier terme u_0, puis u_n en fonction de n.

INDICE

D'après F11 (terme général arithmétique), $u_{11} = u_4 + (11-4)r$.

CORRIGÉ

Raison. D'après F11 (terme général arithmétique), $u_{11} = u_4 + (11-4)r$, donc :

$$\begin{aligned} 7r &= u_{11} - u_4 \\ &= 25 - (-3) = 28 \end{aligned}$$

Ainsi $r = 4$.

Premier terme. Toujours d'après F11, $u_4 = u_0 + 4r$, donc $u_0 = u_4 - 4r = -3 - 16 = -19$.

Terme général. D'après F11, $u_n = u_0 + nr$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conclusion. $r = 4$, $u_0 = -19$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -19 + 4n$.

2.

Calculer u_{20}. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 0$.

INDICE

Écris la condition $u_n > 0$ avec le terme général de la question 1.

CORRIGÉ

Calcul de u_{20}. $u_{20} = -19 + 4 \times 20 = -19 + 80 = 61$.

Condition $u_n > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec le terme général de la question 1. :

$$\begin{aligned} u_n > 0 &\Leftrightarrow -19 + 4n > 0 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{19}{4} \end{aligned}$$

Plus petit entier. Comme $4 < \dfrac{19}{4} < 5$, les entiers qui conviennent sont ceux qui vérifient $n \geq 5$. On contrôle : $u_4 = -3 < 0$ et $u_5 = 1 > 0$.

Conclusion. $u_{20} = 61$, et le plus petit entier n tel que $u_n > 0$ est $n = 5$.

3.

Calculer $S = \sum_{k=0}^{20} u_k$ et $T = \sum_{k=5}^{15} u_k$.

INDICE

Pour chaque somme, repère le premier terme, le dernier terme et le nombre de termes $n - p + 1$, puis applique F13 (somme arithmétique).

CORRIGÉ

Somme S. Elle va de $u_0 = -19$ à $u_{20} = 61$ et compte $20 - 0 + 1 = 21$ termes. D'après F13 (somme arithmétique) :

$$\begin{aligned} S &= 21 \times \frac{-19 + 61}{2} \\ &= 21 \times 21 = 441 \end{aligned}$$

Somme T. Elle va de $u_5 = 1$ à $u_{15} = 41$ et compte $15 - 5 + 1 = 11$ termes. D'après F13 :

$$\begin{aligned} T &= 11 \times \frac{1 + 41}{2} \\ &= 11 \times 21 = 231 \end{aligned}$$

Conclusion. $S = 441$ et $T = 231$.

Exercice 9

Reconnaître une suite géométrique

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{5^n}$ et $w_n = 2^n + 1$.

1.

Montrer que (u_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Écris u_{n+1}, puis fais apparaître u_n en facteur.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit $2^{n+3} = 2 \times 2^{n+2}$ et $5^{n+1} = 5 \times 5^n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2^{n+3}}{5^{n+1}} = \frac{2}{5} \times \frac{2^{n+2}}{5^n} \\ &= \frac{2}{5}\, u_n \end{aligned}$$

Le réel $\dfrac{2}{5}$ ne dépend pas de n, et $u_0 = \dfrac{2^2}{5^0} = 4$.

Conclusion. D'après F14 (suite géométrique), la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$ et de premier terme $u_0 = 4$.

2.

Donner le sens de variation de (u_n).

INDICE

Vérifie les deux hypothèses de F15 (terme général géométrique) : le signe du premier terme et la position de la raison.

CORRIGÉ

Vérifions les deux hypothèses de F15 (terme général géométrique) :

- le premier terme $u_0 = 4$ est strictement positif ;
- la raison vérifie $0 < \dfrac{2}{5} < 1$.

Conclusion. D'après F15, la suite (u_n) est strictement décroissante.

3.

La suite (w_n) est-elle géométrique ?

INDICE

Calcule w_0, w_1 et w_2, puis compare w_1^2 et $w_0 w_2$.

CORRIGÉ

Calculons les trois premiers termes : $w_0 = 2$, $w_1 = 3$ et $w_2 = 5$. Alors $w_1^2 = 9$, tandis que $w_0 w_2 = 10$.

Comme $9 \neq 10$, F16 (trois termes géométriques) montre que w_0, w_1, w_2 ne sont pas trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Conclusion. La suite (w_n) n'est pas géométrique.

Exercice 10

Terme général et sommes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite géométrique de premier terme $u_1 = 6$ et de raison $q = -2$.

1.

Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier $n \geq 1$, puis calculer u_6.

INDICE

Le premier rang est 1 : F15 (terme général géométrique) donne $u_n = u_1\, q^{n-1}$.

CORRIGÉ

Le premier rang est 1. D'après F15 (terme général géométrique), pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = u_1\, q^{n-1} = 6 \times (-2)^{n-1}$$

Pour $n = 6$:

$$\begin{aligned} u_6 &= 6 \times (-2)^5 \\ &= 6 \times (-32) = -192 \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 6 \times (-2)^{n-1}$, et $u_6 = -192$.

2.

La suite (u_n) est-elle monotone ?

INDICE

Calcule u_2 et u_3, puis compare les termes consécutifs.

CORRIGÉ

Calculons les premiers termes : $u_1 = 6$, $u_2 = -12$ et $u_3 = 24$.

- $u_2 < u_1$: la suite n'est pas croissante ;
- $u_3 > u_2$: elle n'est pas décroissante.

Avec une raison strictement négative, le signe des termes alterne : ils ne restent jamais rangés dans un même ordre.

Conclusion. La suite (u_n) n'est pas monotone.

3.

Calculer $S = \sum_{k=1}^{8} u_k$.

INDICE

Premier terme u_1, raison -2, nombre de termes $8 - 1 + 1$: applique F17 (somme géométrique).

CORRIGÉ

La somme va de u_1 à u_8 : elle compte $8 - 1 + 1 = 8$ termes. D'après F17 (somme géométrique), avec $q = -2 \neq 1$:

$$\begin{aligned} S &= u_1 \times \frac{1 - (-2)^{8}}{1 - (-2)} \\ &= 6 \times \frac{1 - 256}{3} \\ &= 6 \times (-85) = -510 \end{aligned}$$

Conclusion. $S = -510$.

4.

Calculer $B = 1 + 3 + 3^{2} + \cdots + 3^{7}$.

INDICE

C'est la somme $1 + q + \cdots + q^{m}$ de F17 (somme géométrique), avec $q = 3$; trouve m.

CORRIGÉ

La somme B s'écrit $1 + q + \cdots + q^{m}$ avec $q = 3$ et $m = 7$: elle compte 8 termes. D'après F17 (somme géométrique), avec $q = 3 \neq 1$:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1 - 3^{8}}{1 - 3} = \frac{3^{8} - 1}{2} \\ &= \frac{6560}{2} = 3280 \end{aligned}$$

Conclusion. $B = 3280$.