BURHAN

Suites numériques (généralités)

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/suites-numeriques/cours

Chapitre	Semestre
Suites numériques (généralités)	Semestre 1

Des nombres rangés dans un ordre

Range des points en carré. Un carré de côté 1 compte 1 point, un carré de côté 2 en compte 4, un carré de côté 3 en compte 9.

Pour passer du côté 3 au côté 4, tu ajoutes une bordure de 7 points : $9 + 7 = 16$.

Les bordures successives comptent 1, 3, 5, 7 points. Une règle simple fabrique ces nombres, l'un après l'autre.

Devine : Une prédiction

Combien de points compte la bordure qui fait passer du carré de côté 9 au carré de côté 10 ?

A. 10 points

Faux.

La bordure du côté 4 compte 7 points, pas 4 : elle ne vaut pas le côté.

B. 17 points

Faux.

C'est la bordure du côté 9 : $81 - 64 = 17$. On cherche la suivante.

C. 19 points

Juste.

Juste : $100 - 81 = 19$, le dixième nombre impair.

D. 21 points

Faux.

C'est la bordure du côté 11 : $121 - 100 = 21$.

Correction

La bordure du côté k compte $2k - 1$ points : c'est le k-ième nombre impair.

Pour $k = 10$, elle compte 19 points, et $81 + 19 = 100 = 10^2$.

Sans dessiner, tu peux aussi prédire un nombre lointain : le carré de côté 20 compte 400 points.

Une liste de nombres numérotés, fabriquée par une règle : c'est une **suite**.

Dans ce chapitre, tu apprends à calculer ses termes, d'un coup ou de proche en proche. Tu sauras montrer qu'elle reste sous un plafond, qu'elle monte ou qu'elle descend.

Tu reconnaîtras deux familles utiles, et tu calculeras leurs sommes. Chaque réponse se démontre : la récurrence vue en logique y tiendra une grande place.

Suite numérique, indice, terme général

Une liste numérotée

Devine : Le nombre suivant

Voici une liste de nombres : $1, 2, 5, 10, 17$. Quel nombre vient ensuite, si la règle continue ?

A. 26

Juste.

Juste : l'écart suivant est 9, et $17 + 9 = 26$.

B. 24

Faux.

Les écarts sont $1, 3, 5, 7$: ils ne sont pas constants, ils augmentent de 2.

C. 34

Faux.

Doubler 17 ne suit pas la règle : 5 n'est pas le double de 2.

D. 25

Faux.

25 est un carré, mais la liste contient les carrés augmentés de 1.

Correction

Les nombres sont $0^2 + 1, 1^2 + 1, 2^2 + 1, 3^2 + 1, 4^2 + 1$. Le suivant est donc

$$5^2 + 1 = 26.$$

Le nombre de position n vaut $n^2 + 1$, en commençant à la position 0.

En clair. Une suite, c'est une liste de réels qui ne s'arrête pas, chacun muni d'un numéro. Le numéro s'appelle l'**indice**.

Le réel qui porte le numéro n se note u_n. On écrira $n \in \mathbb{N}$: cela signifie que n est un entier et que $n \geq 0$.

Ainsi, dans la liste précédente, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_4 = 17$.

La définition

Définition : Suite numérique

Soit n_0 un entier naturel. Une **suite numérique** $(u_n)_{n \geq n_0}$ associe à chaque entier naturel $n \geq n_0$ un réel unique, noté u_n.

- Le réel u_n est le **terme d'indice** n, ou **terme général**, de la suite ; u_{n_0} est son **premier terme**.

- Lorsque le rang n_0 est clair, la suite se note simplement (u_n).

Exemple : calculer des termes

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = n^2 + 1$.

- $u_0 = 0^2 + 1 = 1$ et $u_3 = 3^2 + 1 = 10$.
- $u_{10} = 10^2 + 1 = 101$.

Pour obtenir un terme, on remplace n par son indice dans l'expression.

L'expression de u_n en fonction de n, ici $n^2 + 1$, s'appelle aussi le **terme général** de la suite.

Le premier indice n'est pas toujours 0. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ n'a pas de terme d'indice 0, car on ne divise pas par 0. Elle commence au rang $n_0 = 1$: on la note $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, et son premier terme vaut 1.

Deux écritures à ne pas confondre. La suite (u_n) désigne toute la liste. Le réel u_n désigne un seul terme, celui d'indice n. Écris « la suite (u_n) est… » pour parler de la liste entière.

Lire un indice

Vérifie : Un terme à calculer

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$. Que vaut u_3 ?

A. 10

Faux.

10 est le numérateur seulement : il faut encore diviser par $3 + 2$.

B. 2

Juste.

Juste : $u_3 = \dfrac{10}{5} = 2$.

C. $\dfrac{7}{4}$

Faux.

C'est u_2 : on a remplacé n par 2.

D. $\dfrac{10}{3}$

Faux.

Le dénominateur est $n + 2$, soit 5 pour $n = 3$.

Correction

On remplace n par 3 partout :

$$u_3 = \frac{3 \times 3 + 1}{3 + 2} = \frac{10}{5} = 2.$$

Exemple : lire des indices

Reprenons $u_n = n^2 + 1$. On remplace n par l'indice voulu, dans **toute** l'expression.

Terme suivant.

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2.$$

Terme augmenté de 1.

$$u_n + 1 = n^2 + 1 + 1 = n^2 + 2.$$

Indice doublé.

$$u_{2n} = (2n)^2 + 1 = 4n^2 + 1,$$

alors que $2u_n = 2n^2 + 2$.

Pour $n = 1$: $u_2 = 5$, mais $u_1 + 1 = 3$.

Attention : le terme suivant n'est pas le terme plus un

✗ « Pour $u_n = n^2 + 1$, on a $u_{n+1} = n^2 + 1 + 1$. »

✓ u_{n+1} est le terme d'indice $n + 1$: on remplace n par $n + 1$, et $u_{n+1} = (n+1)^2 + 1$. L'écriture $n^2 + 2$ est celle de $u_n + 1$, un autre réel. De même, u_{2n} n'est pas $2u_n$.

Vérifier

Vérifie : Le terme suivant

Soit $u_n = n^2 + 1$ pour tout entier $n \geq 0$. Quelle écriture est égale à u_{n+1} ?

A. $n^2 + 2$

Faux.

C'est $u_n + 1$: on a ajouté 1 au terme, au lieu de changer l'indice.

B. $n^2 + 2n + 1$

Faux.

C'est $(n+1)^2$: il manque le $+1$ de l'expression.

C. $n^2 + 2n + 2$

Juste.

Juste : $(n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2$.

D. $2n^2 + 2$

Faux.

C'est $2u_n$, qui n'a rien à voir avec le terme suivant.

Correction

On remplace n par $n+1$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 + 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 1 \\ &= n^2 + 2n + 2. \end{aligned}$$

Vérifie avec $n = 2$: $u_3 = 10$, et $4 + 4 + 2 = 10$.

À toi : Des termes et un indice

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$. Calcule u_0 et u_1, puis exprime u_{n+1} en fonction de n.

Compare u_1 et $u_0 + 1$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour u_0, remplace n par 0 au numérateur et au dénominateur.

Indice 2

Pour u_{n+1}, remplace n par $n+1$ partout, puis simplifie chaque membre de la fraction.

Indice 3

Point délicat : $u_0 + 1$ s'obtient en ajoutant 1 au réel u_0, sans toucher à l'indice.

Réponse

Premiers termes. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = \dfrac{4}{3}$.

Terme suivant. Pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{3(n+1)+1}{(n+1)+2} \\ &= \frac{3n+4}{n+3}. \end{aligned}$$

Comparaison. $u_0 + 1 = \dfrac{3}{2}$, alors que $u_1 = \dfrac{4}{3}$. Ces deux réels sont différents, car $\dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{6}$ et $\dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{6}$.

Conclusion. $u_1 \neq u_0 + 1$: le terme suivant n'est pas le terme augmenté de 1.

Suite explicite, suite définie par récurrence

Deux façons de donner une suite

Devine : Calculer un terme lointain

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ pour tout entier $n \geq 0$. Pour calculer u_3, que te faut-il ?

A. Remplacer n par 3 dans une formule.

Faux.

Aucune formule en n n'est donnée : seule la relation entre deux termes l'est.

B. Calculer d'abord u_1, puis u_2.

Juste.

Juste : chaque terme se calcule à partir du précédent.

C. Rien : u_3 ne peut pas être calculé.

Faux.

On peut le calculer, pas à pas, à partir de u_0.

D. Calculer $\sqrt{3 + 6} = 3$.

Faux.

On a mis l'indice à la place du terme u_2 : $u_3 = \sqrt{u_2 + 6}$.

Correction

La relation donne les termes un par un :

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{u_0 + 6} = \sqrt{7}, \\ u_2 &= \sqrt{6 + \sqrt{7}}, \\ u_3 &= \sqrt{u_2 + 6} \\ &= \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{7}}}. \end{aligned}$$

Il faut avancer de proche en proche, sans sauter de marche.

Retiens l'image. Une suite **explicite** est un distributeur : tu donnes l'indice n, il rend u_n aussitôt.

Une suite **définie par récurrence** est un escalier : pour atteindre une marche, tu montes toutes celles d'avant.

Les deux façons sont utiles. La première permet de sauter loin ; la seconde décrit une situation réelle, d'une étape à la suivante.

Les deux modes

Définition : Suite définie explicitement ; suite définie par récurrence

Soit n_0 un entier naturel.

- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **définie explicitement** lorsque $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq n_0$, où f est une fonction définie en chaque entier $n \geq n_0$.

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **définie par récurrence** par la donnée de son premier terme u_{n_0} et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier $n \geq n_0$, où f est une fonction : chaque terme se calcule à partir du précédent.

Exemple : les deux modes

Explicite. Avec $u_n = n^2 + 1$, on calcule directement

$$u_{50} = 2500 + 1 = 2501.$$

Par récurrence. Avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$, on avance pas à pas :

$$u_1 = 3 \times 0 + 2 = 2,$$
$$u_2 = 3 \times 2 + 2 = 8,$$
$$u_3 = 3 \times 8 + 2 = 26.$$

Dans le second cas, chaque terme est le triple du précédent, augmenté de 2.

Méthode : calculer des termes d'une suite

1. **Suite explicite** : remplace n par l'indice voulu dans l'expression de u_n.
2. **Suite définie par récurrence** : pars du premier terme et applique la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, un terme après l'autre.
3. **Lire un indice** : u_{n+1} est le terme qui suit u_n ; remplace n par $n + 1$ dans toute l'expression.

Une suite récurrente est-elle bien définie ?

Devine : Où tombe le terme suivant ?

Petit rappel. Pour deux réels positifs a et b, $a \leq b$ équivaut à $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, et $a < b$ à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Soit $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Si $u_n \in [0, 3]$, dans quel intervalle se trouve u_{n+1} ?

A. $[0, 9]$

Faux.
9 est la plus grande valeur de $u_n + 6$: il reste à prendre la racine carrée.

B. $[\sqrt{6}, 3]$

Juste.
Juste : cet intervalle est contenu dans $[0, 3]$, car $\sqrt{6} \geq 0$.

C. $[6, 9]$

Faux.
C'est l'encadrement de $u_n + 6$, pas celui de sa racine carrée.

Correction

Si $0 \leq u_n \leq 3$, alors

$$6 \leq u_n + 6 \leq 9.$$

D'après le rappel,

$$\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq 3.$$

Comme $\sqrt{6} \geq 0$, le terme suivant est encore dans $[0, 3]$: l'intervalle ne laisse pas sortir les termes.

Une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ peut bloquer : si un terme sort du domaine où f est définie, le suivant n'existe pas. On cherche donc un intervalle I dont f ne fait jamais sortir.

Pourquoi est-ce vrai ? Si le premier terme est dans I, le suivant y est aussi, puis le suivant… La preuve écrit ce passage d'un terme au suivant par une récurrence.

Propriété : Une suite définie par récurrence est bien définie

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I telle que $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$. Soit n_0 un entier naturel et $a \in I$.

Alors les relations $u_{n_0} = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \geq n_0$ définissent une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$, et $u_n \in I$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Démonstration

Étape 1. Pour tout entier $n \geq n_0$, notons $P(n)$: « le terme u_n est défini et $u_n \in I$ ». Raisonnons par récurrence sur $n \geq n_0$.

Étape 2. Initialisation. Le terme $u_{n_0} = a$ est défini, et $a \in I$ par hypothèse : $P(n_0)$ est vraie.

Étape 3. Hérédité. Soit $n \geq n_0$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. Comme $u_n \in I$ et que f est définie sur I, le réel $u_{n+1} = f(u_n)$ est défini. Par hypothèse sur f, $f(u_n) \in I$, donc $u_{n+1} \in I$: $P(n+1)$ est vraie.

Étape 4. Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La propriété à transmettre contient **deux** informations : « u_n est défini » et « $u_n \in I$ ».

La seconde rend possible le calcul du terme suivant, et l'hypothèse « $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$ » la transmet.

Retiens le geste : pour une suite récurrente, on montre par récurrence que les termes restent dans un intervalle où f est définie.

Vérifie : Quelle hypothèse, quelle étape ?

Dans l'hérédité de la preuve (étape 3), on sait que $u_n \in I$. Quelle hypothèse donne alors $u_{n+1} \in I$?

A. La fonction f est définie sur I.

Faux.

Elle assure seulement que $f(u_n)$ existe, pas qu'il est dans I.

B. Le premier terme a est dans I.

Faux.

Cette hypothèse sert à l'initialisation, à l'étape 2.

C. L'ensemble I est un intervalle.

Faux.

La preuve n'emploie jamais ce fait : il ne transmet rien d'un terme au suivant.

D. $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$.

Juste.

Juste : appliquée à $x = u_n$, elle donne $f(u_n) \in I$.

Correction

On applique l'hypothèse « $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$ » au réel $x = u_n$, qui est dans I. On obtient $f(u_n) \in I$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in I$.

Vérifier qu'une suite est bien définie

Exemple : Contre-exemple : une relation qui bloque

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 1}$. Alors $u_1 = \dfrac{1}{2-1} = 1$. Puis $u_2 = \dfrac{1}{1-1}$ n'existe pas : on ne divise pas par 0.

Ici, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ pour tout réel $x \neq 1$. La fonction f n'est pas définie en 1, et $f(2) = 1$.

Aucun intervalle contenant 2 ne vérifie l'hypothèse de la propriété. Sans elle, la suite peut s'arrêter après deux termes.

Exemple : Exemple guidé : l'intervalle [0, 3]

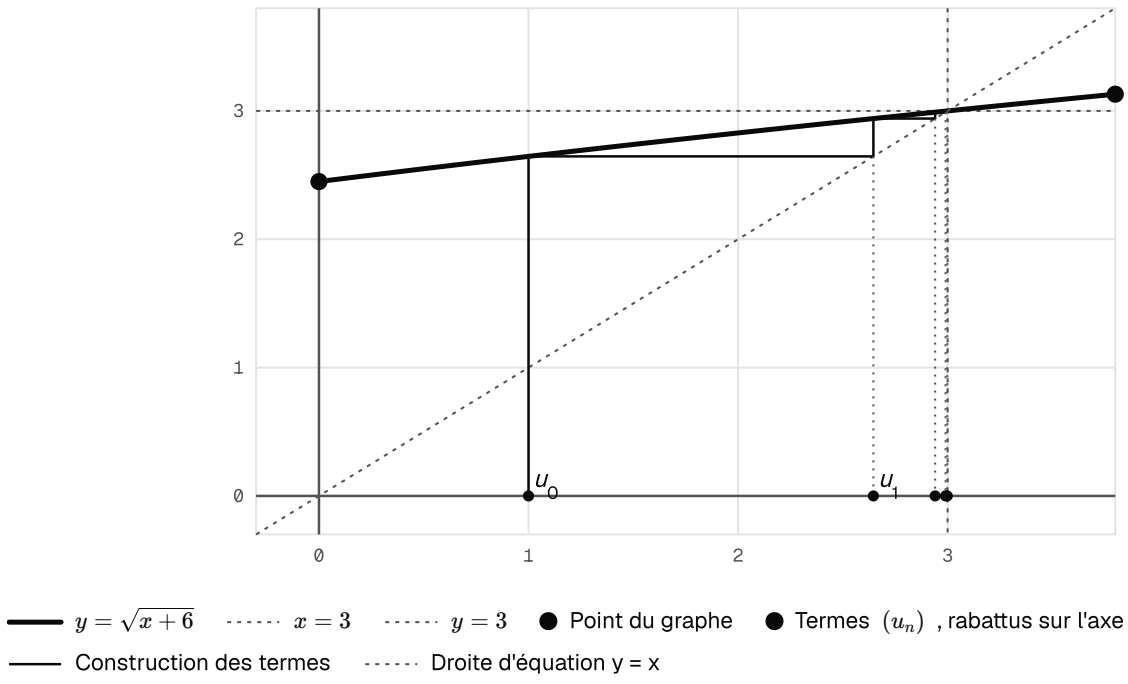
Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Posons $f(x) = \sqrt{x+6}$ pour tout réel $x \geq -6$, et $I = [0, 3]$.

Intervalle stable. Soit $x \in I$. Alors $6 \leq x + 6 \leq 9$. La racine carrée conserve l'ordre entre réels positifs, donc

$$\sqrt{6} \leq f(x) \leq 3.$$

Comme $\sqrt{6} \geq 0$, on obtient $f(x) \in I$.

Conclusion. De plus, $u_0 = 1 \in I$. D'après la propriété, la suite est bien définie, et $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout entier $n \geq 0$.



Partis de u_0 = 1, les termes construits avec la courbe de f et la droite y = x ne quittent jamais la bande des abscisses de 0 à 3.

À toi : Une suite récurrente bien définie

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout entier $n \geq 0$. Calcule u_1, u_2, u_3 et u_4. Justifie ensuite que la suite est bien définie et que $u_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la relation quatre fois, en partant de $u_0 = 0$.
Indice 2
Prends pour I l'intervalle des réels positifs.
Indice 3
Point délicat : vérifie que $3x + 2 \geq 0$ pour tout réel $x \geq 0$, puis applique la propriété.

Réponse
Termes. $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, $u_3 = 26$ et $u_4 = 80$.

Intervalle stable. Soit I l'intervalle des réels positifs. La relation applique à u_n la fonction qui à x associe $3x + 2$, définie pour tout réel x. Soit $x \geq 0$. Alors

$$3x + 2 \geq 2 \geq 0,$$

donc l'image de x est dans I.

Conclusion. Comme $u_0 = 0 \in I$, la propriété donne : la suite est bien définie, et $u_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 0$.

Le symbole Σ

Une longue somme en une ligne

Devine : Compter des termes

Combien de termes compte la somme $1 + 3 + 5 + \cdots + 19$ des nombres impairs de 1 à 19 ?

A. 9

Faux.
On a calculé $\dfrac{19 - 1}{2}$: il manque le premier terme.

B. 10

Juste.
Juste : $19 = 2 \times 10 - 1$, c'est le dixième nombre impair.

C. 19

Faux.
Les nombres pairs ne font pas partie de la somme.

D. 20

Faux.
On ne garde qu'un entier sur deux, de 1 à 19.

Correction
Le k-ième nombre impair est $2k - 1$. Le dernier terme 19 correspond à $2k - 1 = 19$, soit $k = 10$.

La somme compte donc 10 termes, pour k allant de 1 à 10.

Écrire « $1 + 3 + 5 + \cdots + 19$ » oblige à deviner la règle des points de suspension.

Le symbole $\sum$, la lettre grecque sigma, dit tout en une ligne : la forme des termes et les indices de départ et d'arrivée. La somme précédente s'écrit

$$\sum_{k=1}^{10} (2k - 1).$$

La notation

Définition : Somme de termes consécutifs ; symbole Σ

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique, et p, n deux entiers tels que $n_0 \leq p \leq n$. La somme des termes consécutifs de u_p à u_n se note

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n.$$

Elle compte $n - p + 1$ termes. L'indice k est **muet** : $\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{j=p}^{n} u_j$.

Exemple : développer une somme

Développer.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{4}(k^2+1)\\&= 1+2+5+10+17\\&= 35.\end{aligned}$$

Elle compte $4 - 0 + 1 = 5$ termes.

Une somme de n termes. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\\&= 1+3+\cdots+(2n-1).\end{aligned}$$

Elle compte $n - 1 + 1 = n$ termes.

Exemple : changer d'indice

Soit $n \geq 1$. Dans $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$, posons $j = k - 1$. Quand k va de 1 à n, j va de 0 à $n - 1$, et $2k - 1 = 2j + 1$. Donc

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\\&= \sum_{j=0}^{n-1}(2j+1).\end{aligned}$$

Les deux écritures développent la même somme, de 1 à $2n - 1$.

Compter les termes

Attention : n – p + 1 termes

✗ « La somme $\sum_{k=3}^{10} u_k$ compte $10 - 3 = 7$ termes. »

✓ Elle contient u_3, u_4, …, u_{10} : cela fait $10 - 3 + 1 = 8$ termes. Oublier le « $+1$ » fausse ensuite toutes les formules de somme.

Vérifie : Le bon compte

Combien de termes compte la somme $\sum_{k=2}^{20} u_k$?

A. 18

Faux.

$20 - 2 = 18$ oublie un terme : compte u_2, u_3, u_4 sur tes doigts.

B. 20

Faux.

Le premier indice est 2, pas 1 : u_1 n'est pas dans la somme.

C. 21

Faux.

Ce serait le compte de u_0 à u_{20}.

D. 19

Juste.

Juste : $20 - 2 + 1 = 19$.

Correction

De u_p à u_n, il y a $n - p + 1$ termes. Ici, $20 - 2 + 1 = 19$.

Calculer avec Σ

Trois règles de calcul. Soit (a_k) et (b_k) deux suites, c un réel, et $p \leq n$ deux entiers.

Somme de deux suites.

$$\sum_{k=p}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k.$$

Facteur constant.

$$\sum_{k=p}^{n} c\,a_k = c\sum_{k=p}^{n} a_k.$$

Somme constante.

$$\sum_{k=p}^{n} c = (n - p + 1)c.$$

Ces règles viennent du calcul dans $\mathbb{R}$: on regroupe les termes d'une somme finie, ou on met c en facteur. La dernière ajoute $n-p+1$ fois le même réel c.

Vérifie : Une somme découpée

Que vaut $\sum_{k=1}^{4}(2k+3)$? Utilise $\sum_{k=1}^{4} k = 10$ et les règles de calcul.

A. 23

Faux.

On a ajouté 3 une seule fois : la somme constante $\sum_{k=1}^{4} 3$ vaut $4 \times 3 = 12$.

B. 20

Faux.

C'est $2\sum_{k=1}^{4} k$ seulement : il manque la somme des 3.

C. 44

Faux.

On a mis 2 en facteur de 3 aussi : $2k+3$ n'est pas $2(k+3)$.

D. 32

Juste.

Juste : $2 \times 10 + 4 \times 3 = 32$.

Correction

D'après les règles de calcul :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{4}(2k+3)\\&= 2\sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=1}^{4} 3\\&= 2 \times 10 + 4 \times 3\\&= 32.\end{aligned}$$

Vérifie en développant : $5+7+9+11 = 32$.

Exemple : une somme télescopique

Soit (a_k) une suite et $p \leq n$ deux entiers. On développe :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1}-a_k)\\&= (a_{p+1}-a_p)\\&\quad + (a_{p+2}-a_{p+1})\\&\quad + \cdots + (a_{n+1}-a_n).\end{aligned}$$

Chaque terme a_j d'indice j compris entre $p+1$ et n apparaît deux fois : avec le signe $+$ pour $k = j-1$, avec le signe $-$ pour $k = j$. Ces termes s'éliminent. Il reste $a_{n+1} - a_p$.

Par exemple,

$$\sum_{k=1}^{8}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \sqrt{9}-\sqrt{1}=2.$$

À toi : Écrire avec Σ

Soit $u_k = k^2+1$. Écris la somme $2+5+10+\cdots+101$ avec le symbole $\sum$. Donne son nombre de termes, puis calcule-la. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Trouve l'indice du premier terme 2 et celui du dernier terme 101.
Indice 2
Le nombre de termes est « indice d'arrivée moins indice de départ, plus un ».
Indice 3
Point délicat : $u_0 = 1$ ne fait pas partie de la somme, qui commence à $2 = u_1$.

Réponse
Écriture. $2 = u_1$ et $101 = u_{10}$. La somme s'écrit $\sum_{k=1}^{10}(k^2+1)$ et compte $10-1+1 = 10$ termes.

Calcul.

$$\begin{aligned} &2+5+10+17\\ &\quad+26+37+50\\ &\quad+65+82+101\\ &=395. \end{aligned}$$

Conclusion. La somme $2+5+10+\cdots+101$ vaut 395.

Suites majorées, minorées, bornées

Un plafond pour tous les termes

Devine : Un plafond

Soit $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$. On calcule $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = \dfrac{4}{3}$, $u_{10} = \dfrac{31}{12}$ et $u_{100} = \dfrac{301}{102}$. Quel réel semble n'être dépassé par aucun terme ?

A. 2
Faux.
$u_{10} = \dfrac{31}{12}$ dépasse déjà $2 = \dfrac{24}{12}$.

B. $\dfrac{31}{12}$
Faux.
u_{100} est plus grand que u_{10}.

C. 3

Juste.

Juste : chaque terme semble rester sous 3, sans l'atteindre.

D. Aucun : les termes grandissent sans fin.

Faux.

Les termes grandissent, mais l'écriture $u_n = 3 - \dfrac{5}{n+2}$ montre qu'ils restent sous 3.

Correction

Les termes calculés restent sous 3. Des calculs ne prouvent rien pour **tous** les indices.

L'écriture $u_n = 3 - \dfrac{5}{n+2}$ le prouvera : on retire toujours à 3 un nombre strictement positif.

En clair. Une suite est **majorée** quand un même réel reste au-dessus de tous ses termes : un plafond fixe. Elle est **minorée** quand un même réel reste en dessous : un plancher.

Le mot important est « même » : le plafond est choisi une fois pour toutes, avant de regarder les indices.

La définition

Définition : Suite majorée, minorée, bornée

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout entier $n \geq n_0$: $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq M$. Le réel M est un **majorant** de la suite.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout entier $n \geq n_0$: $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \geq m$. Le réel m est un **minorant** de la suite.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple : une suite bornée

Petit rappel. Pour deux réels strictement positifs a et b, si $a \leq b$, alors $\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$: passer à l'inverse renverse l'ordre.

Soit $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$ pour $n \geq 0$. Comme $3(n+2) - 5 = 3n + 1$, on a, pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_n = 3 - \frac{5}{n+2}.$$

Soit $n \geq 0$.

- **Majorant.** On a $n + 2 > 0$, donc $\dfrac{5}{n+2} > 0$ et $u_n < 3$.
- **Minorant.** De plus, $n + 2 \geq 2$, donc, d'après le rappel, $\dfrac{5}{n+2} \leq \dfrac{5}{2}$ et $u_n \geq 3 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. On a $\frac{1}{2} \leq u_n < 3$ pour tout entier $n \geq 0$: la suite est bornée.

Attention : un majorant ne dépend pas de n

✗ « Pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 3n + 1$, donc la suite est majorée par $3n + 1$. »

✓ L'inégalité est vraie, mais $3n + 1$ change avec n : ce n'est pas un plafond fixe. Dans la définition

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq M,$$

le réel M est choisi **avant** n. Ici, $M = 3$ convient.

Bornée et valeur absolue

Petit rappel. $|x| \leq A$ équivaut à $-A \leq x \leq A$, et $\max(a, b)$ désigne le plus grand des deux réels a et b.

Une suite bornée vit dans une bande $[m, M]$. Une bande centrée en 0, de la forme $[-A, A]$, se décrit avec un seul réel : $|u_n| \leq A$.

Pourquoi est-ce vrai ? Il suffit d'élargir la bande $[m, M]$ jusqu'à la rendre symétrique. La preuve choisit le plus grand des deux réels $|m|$ et $|M|$.

Propriété : Suite bornée et valeur absolue

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel $A \geq 0$ tel que $|u_n| \leq A$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Démonstration

Étape 1. Supposons (u_n) bornée. D'après F05, il existe deux réels m et M tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout entier $n \geq n_0$. Posons $A = \max(|m|, |M|)$; alors $A \geq 0$. Soit $n \geq n_0$. On a $u_n \leq M \leq |M| \leq A$, et $u_n \geq m \geq -|m| \geq -A$. Donc $-A \leq u_n \leq A$, c'est-à-dire $|u_n| \leq A$.

Étape 2. Réciproquement, supposons qu'il existe un réel $A \geq 0$ tel que $|u_n| \leq A$ pour tout entier $n \geq n_0$. Alors $-A \leq u_n \leq A$ pour tout entier $n \geq n_0$: la suite est majorée par A et minorée par $-A$, donc bornée (F05).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour passer de deux bornes à une seule, on prend $A = \max(|m|, |M|)$: la bande $[-A, A]$ contient $[m, M]$.

Dans l'autre sens, $|u_n| \leq A$ se lit $-A \leq u_n \leq A$: un majorant A et un minorant $-A$.

Retiens le geste : une valeur absolue majorée, c'est un encadrement.

Vérifie : Le réel A de la preuve

On sait que $\frac{1}{2} \leq u_n < 3$ pour tout $n \geq 0$. Quel réel A la preuve (étape 1) fournit-elle ?

A. $A = \frac{1}{2}$

Faux.

Avec $A = \frac{1}{2}$, l'inégalité $|u_1| \leq A$ est fausse : $u_1 = \frac{4}{3}$.

B. $A = 3$

Juste.

Juste : $\max\left(\frac{1}{2}, 3\right) = 3$.

C. $A = \frac{5}{2}$

Faux.

C'est l'écart $3 - \frac{1}{2}$, pas le maximum des valeurs absolues.

D. $A = -3$

Faux.

Le réel A doit être positif : une valeur absolue n'est jamais majorée par -3.

Correction

La preuve pose $A = \max(|m|, |M|)$ avec $m = \frac{1}{2}$ et $M = 3$. Donc $A = 3$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$-3 \leq \frac{1}{2} \leq u_n < 3,$$

c'est-à-dire $|u_n| \leq 3$.

Exemple : minorée, mais pas bornée

Soit $u_n = n^2 + 1$ pour $n \geq 0$. Pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 1$: la suite est minorée par 1.

Elle n'est pas majorée. Soit M un réel, et n un entier tel que $n \geq |M|$. Comme n est un entier naturel, $n^2 \geq n$. Donc

$$u_n > n^2 \geq n \geq M.$$

Aucun réel M ne majore la suite : elle n'est pas bornée, et aucun réel A ne vérifie $|u_n| \leq A$ pour tout n.

Borner une suite récurrente

Méthode : montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée

1. **Choisis** un réel M (ou m) qui ne dépend pas de n, et écris l'inégalité à démontrer pour tout entier $n \geq n_0$.

2. **Suite explicite** : pars de l'encadrement de n et enchaîne des inégalités, ou étudie le signe de $u_n - M$.
3. **Suite récurrente** : démontre l'inégalité par récurrence sur n.
4. **Conclus** avec le quantificateur : « pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq M$ ».

Exemple **: Exemple guidé : une borne par récurrence**

Soit $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$, et, pour tout entier $n \geq 0$, $P(n)$: « $1 \leq u_n < 3$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$, et $1 \leq 1 < 3$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 0$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. D'après l'hypothèse de récurrence,

$$7 \leq u_n + 6 < 9.$$

La racine carrée conserve l'ordre entre réels positifs (rappel de la section sur les deux modes), donc

$$\sqrt{7} \leq u_{n+1} < 3.$$

Comme $\sqrt{7} \geq 1$, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $1 \leq u_n < 3$ pour tout entier $n \geq 0$.

À toi : Borner une suite

Soit $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ pour $n \geq 1$. Montre par récurrence que $2^n \geq 2n$ pour tout entier $n \geq 1$. Déduis-en que $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout entier $n \geq 1$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Initialisation : compare 2^1 et 2×1.
Indice 2
Hérédité : écris $2^{n+1} = 2 \times 2^n$, puis utilise l'hypothèse de récurrence.
Indice 3
Point délicat : pour passer de $4n$ à $2(n+1)$, utilise $n \geq 1$, donc $2n \geq 2$.

Réponse
Pour tout entier $n \geq 1$, soit $P(n)$: « $2^n \geq 2n$ ».

Initialisation. $2^1 = 2$ et $2 \times 1 = 2$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &\geq 4n = 2n + 2n. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 1$, $2n \geq 2$, donc

$$2^{n+1} \geq 2n+2$$
$$= 2(n+1).$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $2^n \geq 2n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Encadrement de u_n. Soit $n \geq 1$. Alors $u_n > 0$, car $n > 0$ et $2^n > 0$. De plus, $2^n \geq 2n > 0$, donc

$$u_n = \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout entier $n \geq 1$: la suite est bornée.

Sens de variation d'une suite

Des termes qui montent

Devine : Monter ou descendre

Pour $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$, les premiers termes sont $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{7}{4}$, 2, $\dfrac{13}{6}$. Que peut-on prévoir ?

A. Chaque terme est plus petit que le précédent.

Faux.
Compare $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{4}{3}$: le second est plus grand.

B. Chaque terme semble plus grand que le précédent.

Juste.
Juste : sur ces cinq termes, la liste monte. Reste à le prouver pour tous.

C. Tous les termes sont égaux à partir d'un rang.

Faux.
2 et $\dfrac{13}{6}$ sont différents : la liste bouge encore.

D. Les termes montent et descendent tour à tour.

Faux.
Aucune descente n'apparaît dans les termes calculés.

Correction

Les cinq termes calculés montent :

$$\frac{1}{2} < \frac{4}{3} < \frac{7}{4} < 2 < \frac{13}{6}.$$

Pour le prouver à chaque rang, on étudiera le signe de $u_{n+1} - u_n$.

En clair. Une suite est **croissante** si chaque terme est au moins égal au précédent : on ne redescend jamais d'une marche. Elle est **décroissante** si, au contraire, chaque terme est au plus égal au précédent.

Une suite peut n'être ni l'une ni l'autre. On compare donc toujours deux termes **consécutifs**, u_n et u_{n+1}, pour tout indice n.

La définition

Définition : Suite croissante, décroissante, monotone

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$, et **strictement croissante** si $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- (u_n) est **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$, et **strictement décroissante** si $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- (u_n) est **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante, et **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Méthode : étudier le sens de variation d'une suite

1. **Différence** : calcule $u_{n+1} - u_n$ et étudie son signe pour tout entier $n \geq n_0$.
2. **Quotient** : si tous les termes sont strictement positifs, et que u_n est un produit ou une puissance, compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
3. **Récurrence** : pour une suite récurrente, démontre par récurrence l'inégalité entre u_{n+1} et u_n.
4. **Conclus** avec le bon vocabulaire. Pour montrer qu'une suite n'est pas monotone, trouve deux comparaisons de sens contraires.

Exemple : le signe de la différence

Soit $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$ pour $n \geq 0$. Soit $n \geq 0$ un entier. Alors $u_{n+1} = \dfrac{3n+4}{n+3}$.

Différence. Au dénominateur commun $(n+2)(n+3)$, le numérateur de $u_{n+1} - u_n$ vaut

$$\begin{aligned} &(3n+4)(n+2) \\ &\quad - (3n+1)(n+3) \\ &= (3n^2 + 10n + 8) \\ &\quad - (3n^2 + 10n + 3) \\ &= 5. \end{aligned}$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+2)(n+3)}.$$

Signe. Le dénominateur est strictement positif, donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Conclusion. La suite (u_n) est strictement croissante.

Exemple : monotone à partir d'un rang

Soit $u_n = n^2 - 6n$ pour $n \geq 0$, et soit $n \geq 0$ un entier.

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ & = (n+1)^2 - 6(n+1) \\ & \quad - n^2 + 6n \\ & = 2n - 5. \end{aligned}$$

- Pour tout entier $n \geq 3$, $2n - 5 \geq 1 > 0$: la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est strictement croissante.
- Depuis le rang 0 : $u_0 = 0$, $u_1 = -5$, $u_3 = -9$, $u_4 = -8$. Ainsi $u_1 < u_0$ et $u_4 > u_3$: la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas monotone.

On dit que la suite est croissante **à partir du rang** 3.

Comparer des termes éloignés

La définition ne compare que des voisins. Pourtant, si l'on monte à chaque marche, on est plus haut qu'au départ.

Pourquoi est-ce vrai ? On passe de u_p à u_n marche après marche, et aucune ne fait redescendre. La preuve écrit ce trajet par une récurrence, en partant de u_p.

Propriété : Comparaison des termes d'une suite monotone

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique, et p, n deux entiers tels que $n_0 \leq p \leq n$.

- Si (u_n) est croissante, alors $u_p \leq u_n$. En particulier, une suite croissante est minorée par son premier terme u_{n_0}.
- Si (u_n) est décroissante, alors $u_p \geq u_n$. En particulier, une suite décroissante est majorée par son premier terme u_{n_0}.

Démonstration

Étape 1. Initialisation. Supposons (u_n) croissante, et soit $p \geq n_0$ un entier fixé. Pour tout entier $k \geq p$, notons $P(k)$: « $u_p \leq u_k$ ». On a $u_p \leq u_p$: $P(p)$ est vraie.

Étape 2. Hérédité. Soit $k \geq p$ un entier tel que $u_p \leq u_k$. Comme $k \geq n_0$ et que la suite est croissante, $u_k \leq u_{k+1}$ (F07). Donc $u_p \leq u_{k+1}$: $P(k+1)$ est vraie.

Étape 3. Conclusion. D'après le principe de récurrence, $u_p \leq u_k$ pour tout entier $k \geq p$, en particulier pour $k = n$. Avec $p = n_0$: $u_k \geq u_{n_0}$ pour tout entier $k \geq n_0$, donc u_{n_0} est un minorant (F05).

Étape 4. Si (u_n) est décroissante, la suite $(-u_n)$ est croissante (F07). Les étapes 1 à 3 donnent $-u_p \leq -u_n$, donc $u_p \geq u_n$, et $-u_k \geq -u_{n_0}$, donc $u_k \leq u_{n_0}$ pour tout entier $k \geq n_0$: u_{n_0} est un majorant (F05).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'indice p est fixé, puis on raisonne par récurrence sur $n \geq p$: chaque pas ajoute une comparaison entre voisins.

Pour le cas décroissant, on n'écrit pas une seconde preuve : on change u_n en $-u_n$.

Retiens l'usage : le premier terme d'une suite croissante en est un minorant.

Vérifie : Un minorant gratuit

La suite $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$, avec $n \geq 0$, est croissante. Quel minorant la propriété donne-t-elle aussitôt ?

A. 3

Faux.
3 est un majorant ; la propriété donne un minorant pour une suite croissante.

B. 0

Faux.
0 est bien un minorant, mais la propriété en donne un meilleur : le premier terme.

C. $\dfrac{1}{2}$

Juste.
Juste : le premier terme est $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

D. $\dfrac{4}{3}$

Faux.
$u_0 = \dfrac{1}{2}$ est plus petit que $\dfrac{4}{3}$.

Correction
Pour une suite croissante, $u_n \geq u_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$. Ici, $n_0 = 0$ et $u_0 = \dfrac{1}{2}$: on retrouve $u_n \geq \dfrac{1}{2}$, déjà obtenu par un calcul.

Exemple : Contre-exemple : sans monotonie, pas de conclusion

Soit $w_n = (-1)^n$ pour $n \geq 0$: $w_0 = 1, w_1 = -1, w_2 = 1$.

Ici, $w_0 = 1$ est bien un majorant, car $w_n \leq 1$ pour tout n, mais ce n'est pas un minorant, car $w_1 < w_0$.

La propriété ne s'applique pas : $w_1 < w_0$ et $w_2 > w_1$, donc la suite n'est pas monotone. Sans monotonie, la propriété ne permet aucune conclusion.

Pièges et vérification

Attention : une suite n'est pas forcément monotone

✗ « La suite (w_n) n'est pas croissante, donc elle est décroissante. »

✓ Une suite peut n'être ni croissante ni décroissante. Pour $w_n = (-1)^n$, $w_1 < w_0$ et $w_2 > w_1$. Pour prouver qu'une suite n'est pas monotone, il faut ces deux comparaisons de sens contraires.

Vérifie : Le signe d'une différence

Soit $u_n = n^2 + 1$ pour $n \geq 0$. Que vaut $u_{n+1} - u_n$, et que conclut-on ?

A. 1 : la suite est strictement croissante.
Faux.
1 est la différence $u_n + 1 - u_n$, pas $u_{n+1} - u_n$.

B. $-2n - 1$: la suite est strictement décroissante.
Faux.
C'est $u_n - u_{n+1}$: l'ordre de la différence compte.

C. $2n + 1$: on ne peut pas conclure sans connaître n.
Faux.
On conclut pour tout n : $2n + 1$ est strictement positif quel que soit $n \geq 0$.

D. $2n + 1$: la suite est strictement croissante.
Juste.
Juste : $2n + 1 \geq 1 > 0$ pour tout $n \geq 0$.

Correction
Soit $n \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} &u_{n+1} - u_n \\ &= (n^2 + 2n + 2) - (n^2 + 1) \\ &= 2n + 1. \end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, $2n + 1 > 0$: la suite est strictement croissante.

À toi : Une suite récurrente qui monte

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$. On sait que $u_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 0$. Étudie le sens de variation de la suite (u_n). Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Exprime $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n seulement.

Indice 2

Utilise l'information $u_n \geq 0$ pour trouver le signe.

Indice 3

Point délicat : la différence dépend de u_n, pas de n ; son signe suffit pourtant à conclure.

Réponse

Soit $n \geq 0$. D'après la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ & = 3u_n + 2 - u_n \\ & = 2u_n + 2. \end{aligned}$$

Comme $u_n \geq 0$, on a $2u_n + 2 \geq 2 > 0$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} > u_n$: la suite est strictement croissante. On le vérifie sur $0 < 2 < 8 < 26$.

Quotient et récurrence pour la monotonie

Comparer un quotient à 1

Devine : Des puissances au dénominateur

Soit $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ pour $n \geq 1$: $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{2}{4}$, $u_3 = \dfrac{3}{8}$, $u_4 = \dfrac{4}{16}$. Quel calcul se simplifie le mieux pour comparer u_{n+1} et u_n ?

A. La différence $u_{n+1} - u_n$.

Faux.

Elle se calcule, avec un dénominateur commun 2^{n+1} ; le quotient se simplifie plus vite.

B. La somme $u_{n+1} + u_n$.

Faux.

Une somme ne compare pas deux termes.

C. Le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Juste.

Juste : les puissances de 2 se simplifient dans le quotient.

D. Le produit $u_{n+1} \times u_n$.

Faux.

Un produit ne dit pas lequel des deux termes est le plus grand.

Correction

Dans $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, le facteur $\dfrac{2^n}{2^{n+1}}$ vaut $\dfrac{1}{2}$: il reste $\dfrac{n+1}{2n}$. Comparer ce quotient à 1 est rapide.

Quand tous les termes sont strictement positifs, comparer u_{n+1} à u_n revient à comparer leur quotient à 1.

Pourquoi est-ce vrai ? Diviser les deux membres d'une inégalité par un réel strictement positif ne change pas son sens. La preuve applique cette règle du tronc commun à chaque indice n.

Propriété : Monotonie d'une suite à termes strictement positifs

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite telle que $u_n > 0$ pour tout entier $n \geq n_0$.

- (u_n) est croissante si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- (u_n) est décroissante si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Les mêmes équivalences valent avec les inégalités strictes, pour la stricte monotonie.

Démonstration

Étape 1. Soit $n \geq n_0$ un entier. Comme $u_n > 0$, multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par u_n en conserve le sens. Donc $u_{n+1} \geq u_n$ équivaut à $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. De même, $u_{n+1} \leq u_n$ équivaut à $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, et l'on a les mêmes équivalences avec $>$ et $<$.

Étape 2. Ces équivalences valent pour chaque entier $n \geq n_0$. Donc « $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$ » équivaut à « $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout entier $n \geq n_0$ ». D'après F07, c'est la première équivalence de l'énoncé. De même, l'équivalence de l'étape 1 écrite avec $\leq$ donne la seconde équivalence, et celles écrites avec $>$ et $<$ donnent les deux versions strictes (F07).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Toute la preuve repose sur une règle de calcul : on divise par u_n, qui est strictement positif. Sans cette hypothèse, le sens de l'inégalité pourrait changer.

Retiens le réflexe : avant de comparer un quotient à 1, établis que tous les termes sont strictement positifs.

Vérifie : À quoi sert la positivité ?

Dans l'étape 1 de la preuve, à quoi sert l'hypothèse $u_n > 0$?

A. À ce que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe, rien de plus.

Faux.
Un réel non nul suffirait pour cela ; la positivité sert aussi au sens de l'inégalité.

B. À diviser par u_n sans changer le sens de l'inégalité.

Juste.
Juste : diviser par un réel strictement négatif renverserait l'inégalité.

C. À montrer que la suite est croissante.

Faux.

La positivité ne dit rien du sens de variation.

D. À initialiser une récurrence.

Faux.

La preuve n'emploie aucune récurrence : elle raisonne à chaque indice.

Correction

Pour $u_n > 0$, l'inégalité $u_{n+1} \geq u_n$ équivaut à $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. Si u_n était strictement négatif, la division renverserait le sens.

Le quotient à l'œuvre

Exemple : Exemple guidé : une puissance au dénominateur

Soit $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ pour $n \geq 1$. Soit $n \geq 1$: on a $u_n > 0$, et

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} \\ &= \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Or $2n > 0$, et $n + 1 \leq 2n$ équivaut à $n \geq 1$, ce qui est vrai. Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$: d'après la monotonie par le quotient, la suite est décroissante.

Elle ne l'est pas strictement, car $u_2 = u_1 = \dfrac{1}{2}$.

Exemple : Contre-exemple : des termes négatifs

Soit $v_n = -(n^2 + 1)$ pour $n \geq 0$. Tous ses termes sont strictement négatifs. Son quotient vaut

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1} \geq 1.$$

Pourtant, $v_{n+1} - v_n = -(2n + 1) < 0$: la suite est strictement décroissante. Sans termes strictement positifs, le quotient trompe.

La monotonie par récurrence

Exemple : Exemple guidé : une suite récurrente croissante

Pour passer de u_n à u_{n+1}, on ajoute 6, puis on prend la racine carrée. Chacune de ces opérations conserve l'ordre : c'est ce qui transmet l'inégalité $u_n < u_{n+1}$ au rang suivant.

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. On sait que $u_n \geq 1$ pour tout n. Pour tout entier $n \geq 0$, soit $P(n)$: « $u_n < u_{n+1}$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{7}$. Comme $1 < 7$, $1 < \sqrt{7}$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 0$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. D'après l'hypothèse de récurrence,

$$u_n + 6 < u_{n+1} + 6,$$

et ces deux réels sont positifs. La racine carrée conserve l'ordre, donc

$$\sqrt{u_n + 6} < \sqrt{u_{n+1} + 6},$$

c'est-à-dire $u_{n+1} < u_{n+2}$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq 0$: la suite est strictement croissante.

À toi : Le quotient pour une fraction

Soit $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$ pour $n \geq 0$. Justifie que $u_n > 0$, puis retrouve son sens de variation en comparant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Le numérateur et le dénominateur de u_n sont strictement positifs.

Indice 2

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3n+4}{n+3} \times \dfrac{n+2}{3n+1}$; développe les deux produits.

Indice 3

Point délicat : un quotient de deux réels strictement positifs dépasse 1 quand le numérateur dépasse le dénominateur.

Réponse

Signe des termes. Soit $n \geq 0$. On a $3n+1 > 0$ et $n+2 > 0$, donc $u_n > 0$.

Quotient.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(3n+4)(n+2)}{(3n+1)(n+3)} \\ &= \frac{3n^2+10n+8}{3n^2+10n+3}. \end{aligned}$$

Le numérateur dépasse le dénominateur de 5, et le dénominateur est strictement positif. Donc le quotient est strictement supérieur à 1.

Conclusion. D'après la monotonie par le quotient, la suite est strictement croissante. C'est le résultat obtenu par la différence.

Suites arithmétiques

Toujours le même pas

Devine : Le terme suivant

Voici le début d'une suite : $7, 3, -1, -5$. Si la règle continue, quel est le terme suivant ?

A. -9

Juste.

Juste : on retranche 4 à chaque pas.

B. -1

Faux.

La liste ne revient pas en arrière : chaque pas retranche 4.

C. -10

Faux.

Le pas est -4, pas -5 : $-5 - 4 = -9$.

D. 9

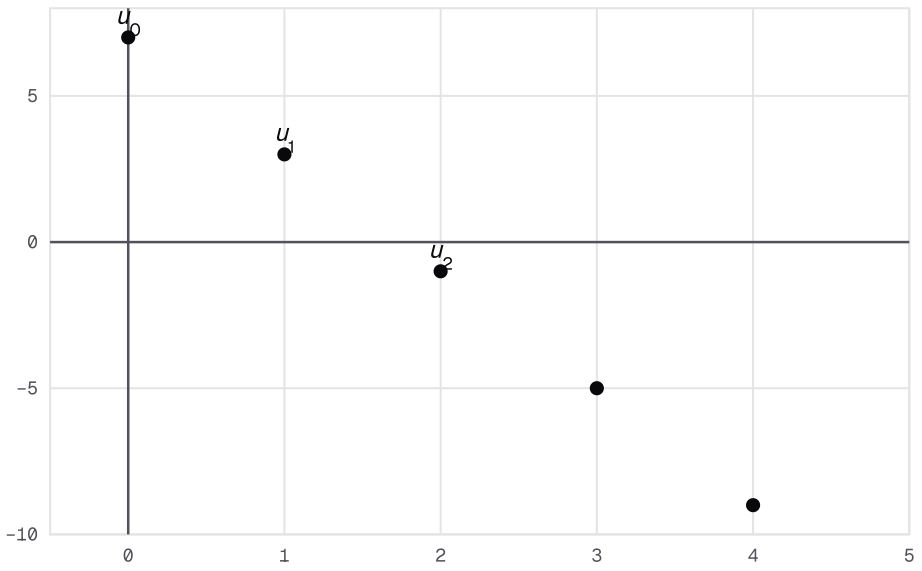
Faux.

Le signe compte : $-5 - 4$ est négatif.

Correction

Chaque terme s'obtient en ajoutant -4 au précédent : $7 - 4 = 3$, $3 - 4 = -1$, $-1 - 4 = -5$, puis $-5 - 4 = -9$.

Retiens l'image. Une suite arithmétique avance à pas réguliers, comme un compteur qui ajoute toujours le même nombre. Ce nombre fixe s'appelle la **raison** ; il peut être négatif. Ici, le premier terme est $u_0 = 7$ et la raison vaut -4.



● Termes de la suite (u_n)

Les points (n, u_n) de la suite de premier terme 7 et de raison −4 : chaque pas vers la droite fait descendre de 4.

La définition

Définition : Suite arithmétique

Soit r un réel. Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **arithmétique de raison** r si $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Autrement dit, une suite est arithmétique lorsque la différence $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n ; cette différence constante est sa raison.

Exemple : reconnaître une suite arithmétique

Soit $u_n = 7 - 4n$ pour $n \geq 0$, et soit $n \geq 0$ un entier.

$$\begin{aligned} &u_{n+1} - u_n \\ &= 7 - 4(n+1) - (7 - 4n) \\ &= -4. \end{aligned}$$

La différence ne dépend pas de n : la suite est arithmétique de raison -4, de premier terme $u_0 = 7$.

À l'inverse, pour $u_n = n^2 + 1$, la différence vaut $2n + 1$: elle dépend de n, la suite n'est pas arithmétique.

Méthode : montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique

1. **Arithmétique** : calcule $u_{n+1} - u_n$ pour un entier $n \geq n_0$ quelconque. Si le résultat est un réel r indépendant de n, la suite est arithmétique de raison r.
2. **Géométrique** : écris u_{n+1} sous la forme $q\,u_n$, avec un réel q indépendant de n.
3. **Pour réfuter** : trois termes consécutifs qui ne vérifient pas $a + c = 2b$ (ou $b^2 = ac$) suffisent.

Attention : deux différences égales ne prouvent rien

✗ « Pour $v_n = n + n(n-1)(n-2)$: $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = 2$. Les différences sont égales, donc la suite est arithmétique. »

✓ $v_3 = 3 + 6 = 9$, et $v_3 - v_2 = 7 \neq 1$. Il faut que $u_{n+1} - u_n$ soit le même réel pour **tout** n. En revanche, une seule différence qui change suffit à réfuter.

Le terme général

Pour aller de $u_0 = 7$ à u_{10}, on fait 10 pas de -4 :

$$u_{10} = 7 + 10 \times (-4) = -33.$$

Pourquoi est-ce vrai ? Entre l'indice n_0 et l'indice n, il y a $n - n_0$ pas, chacun de longueur r. La preuve confirme ce comptage par une récurrence.

Propriété : Terme général et sens de variation d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r.

- Pour tous entiers $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$: $u_n = u_p + (n-p)r$. En particulier, $u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$.
- Si $r > 0$, la suite est strictement croissante ; si $r < 0$, elle est strictement décroissante ; si $r = 0$, elle est constante.

Démonstration

Étape 1. Montrons par récurrence que $u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$ pour tout entier $n \geq n_0$. Initialisation : $u_{n_0} = u_{n_0} + 0 \times r$. Hérédité : soit $n \geq n_0$ un entier tel que $u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$; alors, d'après F10, $u_{n+1} = u_n + r = u_{n_0} + (n+1-n_0)r$. Conclusion : d'après le principe de récurrence, la formule vaut pour tout entier $n \geq n_0$.

Étape 2. Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à n_0. Par l'étape 1, $u_n - u_p = (n-n_0)r - (p-n_0)r = (n-p)r$, donc $u_n = u_p + (n-p)r$.

Étape 3. Pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n = r$ (F10). Si $r > 0$, alors $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \geq n_0$; si $r < 0$, alors $u_{n+1} < u_n$; si $r = 0$, alors $u_{n+1} = u_n$. On conclut par F07.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La récurrence établit la formule à partir du premier terme. La formule à deux indices n et p s'en déduit par une soustraction : $u_n - u_p = (n-p)r$.

Le sens de variation vient du signe de la différence constante r.

Retiens : de u_p à u_n, on ajoute $n-p$ fois la raison.

Vérifie : D'où vient la formule à deux indices ?

Dans l'étape 2 de la preuve, d'où vient l'égalité $u_n - u_p = (n-p)r$?

A. D'une récurrence sur p.

Faux.

L'étape 2 n'emploie aucune récurrence : la seule récurrence est celle de l'étape 1, sur n.

B. De la définition d'une suite arithmétique seule.

Faux.

La définition ne relie que deux termes voisins ; ici, n et p peuvent être éloignés.

C. De la soustraction des deux formules de l'étape 1.

Juste.

Juste : on écrit la formule de l'étape 1 pour n et pour p, puis on soustrait.

D. Du sens de variation de la suite.

Faux.

Le sens de variation est traité à l'étape 3 ; il ne donne aucune égalité entre termes.

Correction

L'étape 1 donne

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n_0} + (n-n_0)r, \\ u_p &= u_{n_0} + (p-n_0)r. \end{aligned}$$

En soustrayant, u_{n_0} disparaît :

$$\begin{aligned} &u_n - u_p \\ &= (n-n_0)r - (p-n_0)r \\ &= (n-p)r. \end{aligned}$$

Exemple : deux indices quelconques

Avec la même suite, $u_n = 7 - 4n$ pour tout $n \geq 0$. La formule à deux indices donne

$$\begin{aligned} u_{25} &= u_{10} + (25-10) \times (-4) \\ &= -33 - 60 = -93. \end{aligned}$$

On vérifie : $7 - 4 \times 25 = -93$.

Comme $r = -4 < 0$, la suite est strictement décroissante.

Trois termes consécutifs

Dans $3, -1, -5$, le terme du milieu est la moyenne des deux autres :

$$\frac{3 + (-5)}{2} = -1.$$

Pourquoi est-ce vrai ? Le terme du milieu est à un pas r de chacun de ses voisins, en avant et en arrière. La preuve fait disparaître r en additionnant les deux voisins.

Propriété : Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit a, b, c trois réels. Il existe un réel r tel que $b = a + r$ et $c = b + r$, c'est-à-dire que a, b, c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, si et seulement si $a + c = 2b$.

Démonstration

Étape 1. Supposons qu'il existe un réel r tel que $b = a + r$ et $c = b + r$. Alors $a = b - r$, donc $a + c = (b - r) + (b + r) = 2b$.

Étape 2. Réciproquement, supposons $a + c = 2b$, et posons $r = b - a$. Alors $b = a + r$. De plus, $c = 2b - a = b + (b - a) = b + r$.

Étape 3. Les deux implications sont établies : l'équivalence est démontrée. La raison est alors $r = b - a$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Dans le sens direct, $+r$ et $-r$ s'annulent : $a + c = 2b$. Dans l'autre sens, on fabrique la raison, $r = b - a$, puis on vérifie $c = b + r$.

Retiens le test : trois réels forment une suite arithmétique exactement quand celui du milieu est la moyenne des deux autres.

Exemple : appliquer et réfuter

- Les réels $3, -1, -5$ vérifient $3 + (-5) = -2 = 2 \times (-1)$: ils sont consécutifs dans une suite arithmétique.
- Pour $u_n = n^2 + 1$, les termes $u_1 = 2$, $u_2 = 5$, $u_3 = 10$ donnent $2 + 10 = 12$, alors que $2 \times 5 = 10$. La suite (u_n) n'est donc pas arithmétique.

À toi : Une suite arithmétique

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison -4. Calcule u_{30}. Trouve l'indice n tel que $u_n = -193$. Vérifie enfin que u_9, u_{10}, u_{11} satisfont le test des trois termes. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris d'abord u_n en fonction de n.
Indice 2
Pour l'indice, résous l'équation $7 - 4n = -193$ et vérifie que la solution est un entier naturel.
Indice 3
Point délicat : le test porte sur la somme des deux termes extrêmes, comparée au double du terme du milieu.

Réponse
Terme général. Pour tout $n \geq 0$, $u_n = 7 - 4n$. Donc $u_{30} = 7 - 120 = -113$.

Indice. $7 - 4n = -193$ équivaut à $4n = 200$, soit $n = 50$: c'est u_{50}.

Test des trois termes. $u_9 = -29$, $u_{10} = -33$, $u_{11} = -37$, et

$$\begin{aligned} & -29 + (-37) \\ &= -66 \\ &= 2 \times (-33). \end{aligned}$$

Conclusion. Le test est vérifié.

Somme de termes d'une suite arithmétique

Apparier les termes

Devine : Une somme par paires

On regroupe les termes de $1 + 3 + 5 + \cdots + 19$ par paires : le premier avec le dernier, le deuxième avec l'avant-dernier… Que vaut la somme ?

A. 100

Juste.
Juste : 5 paires, chacune égale à 20.

B. 200

Faux.
Il y a 10 termes, donc 5 paires, pas 10.

C. 90

Faux.
Chaque paire vaut $1 + 19 = 20$, et il y en a 5.

D. 190

Faux.

C'est $1 + 2 + \cdots + 19$, la somme de tous les entiers.

Correction

Les paires ont toutes la même somme :

$$\begin{aligned} 1 + 19 &= 3 + 17 = 5 + 15 \\ &= 7 + 13 = 9 + 11 \\ &= 20. \end{aligned}$$

Les 10 termes forment 5 paires de somme 20 : la somme vaut $5 \times 20 = 100$.

Dans une suite arithmétique, quand on avance d'un pas au début et qu'on recule d'un pas à la fin, la somme des deux termes ne change pas.

Pourquoi est-ce vrai ? On gagne r d'un côté et on perd r de l'autre. La preuve écrit la somme dans les deux sens et additionne terme à terme.

La formule

Propriété : Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique, et p, n deux entiers tels que $n_0 \leq p \leq n$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}.$$

Autrement dit, la somme vaut le nombre de termes multiplié par la demi-somme du premier et du dernier terme. En particulier, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Démonstration

Étape 1. Notons r la raison et S la somme. Soit j un entier tel que $0 \leq j \leq n - p$; alors $p + j \geq n_0$ et $n - j \geq p \geq n_0$. D'après F11, $u_{p+j} = u_p + jr$ et $u_{n-j} = u_n - jr$, donc $u_{p+j} + u_{n-j} = u_p + u_n$.

Étape 2. Écrivons S dans l'ordre croissant puis dans l'ordre décroissant des indices : $S = \sum_{j=0}^{n-p} u_{p+j}$ et $S = \sum_{j=0}^{n-p} u_{n-j}$. En ajoutant ces deux égalités terme à terme, $2S = \sum_{j=0}^{n-p} (u_{p+j} + u_{n-j})$. Par l'étape 1, cette somme compte $n - p + 1$ termes (F04), tous égaux à $u_p + u_n$. Donc $2S = (n - p + 1)(u_p + u_n)$ et, en divisant par 2, $S = (n - p + 1) \times \dfrac{u_p + u_n}{2}$.

Étape 3. Soit $n \geq 1$. La suite $(v_k)_{k \geq 1}$ définie par $v_k = k$ est arithmétique de raison 1 (F10). De $v_1 = 1$ à $v_n = n$, il y a n termes ; l'étape 2, avec $p = 1$, donne $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Écrire la somme à l'endroit puis à l'envers, et additionner : chaque colonne vaut $u_p + u_n$. On obtient $2S$, puis S.

Retiens la forme de la formule : S s'obtient en multipliant le nombre de termes par

$$\frac{u_p + u_n}{2}.$$

Vérifie : Une colonne constante

Dans l'étape 1 de la preuve, pourquoi a-t-on $u_{p+j} + u_{n-j} = u_p + u_n$?

A. Parce que la somme est symétrique.

Faux.

C'est précisément ce qu'il faut démontrer ; l'étape 1 le justifie par un calcul.

B. Parce que $u_{p+j} = u_p + jr$ et $u_{n-j} = u_n - jr$.

Juste.

Juste : les termes $+jr$ et $-jr$ s'annulent.

C. Parce que $u_{p+j} = u_{n-j}$.

Faux.

Ces deux termes sont en général différents, sauf si $r = 0$.

D. Par une récurrence sur j.

Faux.

La preuve n'emploie aucune récurrence ici : elle utilise la formule du terme général.

Correction

D'après la formule à deux indices, $u_{p+j} = u_p + jr$ et $u_{n-j} = u_n - jr$. En les additionnant, jr et $-jr$ s'annulent : il reste $u_p + u_n$.

Exemple : Exemple guidé : la somme des nombres impairs

Soit $n \geq 1$. La suite des nombres impairs, $u_k = 2k - 1$ pour $k \geq 1$, est arithmétique de raison 2. La somme $1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$ va de $u_1 = 1$ à $u_n = 2n - 1$: elle compte n termes. D'après la formule,

$$\begin{aligned} &1 + 3 + \cdots + (2n - 1) \\ &= n \times \frac{1 + (2n - 1)}{2} \\ &= n^2. \end{aligned}$$

C'est le carré de points de l'entrée du chapitre.

De même, les entiers $u_k = k$ forment une suite arithmétique de raison 1, et

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n &= n \times \frac{1+n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Pour $n = 100$, cette somme vaut 5050.

Méthode

Méthode : calculer une somme de termes consécutifs

1. **Reconnais** une suite arithmétique (la somme géométrique viendra plus loin), et donne sa raison.
2. **Repère** le premier terme u_p et le dernier terme u_n de la somme.
3. **Compte** les termes : il y en a $n - p + 1$.
4. **Applique** la formule de la somme, puis simplifie.

Exemple : une somme qui ne commence pas au premier terme

Soit $u_k = 7 - 4k$ pour $k \geq 0$. Calculons $S = \sum_{k=3}^{12} u_k$.

- La suite est arithmétique de raison -4.
- Premier terme : $u_3 = -5$; dernier terme : $u_{12} = -41$.
- Nombre de termes : $12 - 3 + 1 = 10$.

D'après la formule de la somme,

$$\begin{aligned} S &= 10 \times \frac{-5 + (-41)}{2} \\ &= 10 \times (-23) = -230. \end{aligned}$$

Conclusion. La somme vaut -230.

À toi : Une somme arithmétique

Soit $u_k = 7 - 4k$ pour $k \geq 0$. Calcule $\sum_{k=0}^{20} u_k$ en suivant la méthode. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La suite est arithmétique : donne sa raison et son premier terme.
Indice 2
Calcule le dernier terme u_{20}.
Indice 3
Point délicat : de u_0 à u_{20}, il y a 21 termes, et non 20.

Réponse

La suite est arithmétique de raison -4. Le premier terme est $u_0 = 7$, le dernier $u_{20} = 7 - 80 = -73$. Il y a $20 - 0 + 1 = 21$ termes.

D'après la formule de la somme,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{20} u_k \\ &= 21 \times \frac{7 + (-73)}{2} \\ &= 21 \times (-33) = -693.\end{aligned}$$

Conclusion. La somme vaut -693.

Suites géométriques

Toujours le même facteur

Devine : Le terme suivant

Voici le début d'une suite : 5, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{8}$. Si la règle continue, quel est le terme suivant ?

A. $\frac{5}{10}$

Faux.

On n'ajoute pas un nombre fixe au dénominateur : on le double.

B. $\frac{5}{8} - \frac{5}{4}$

Faux.

Ce nombre est négatif, alors que tous les termes sont positifs.

C. 0

Faux.

La moitié d'un réel non nul n'est jamais nulle.

D. $\frac{5}{16}$

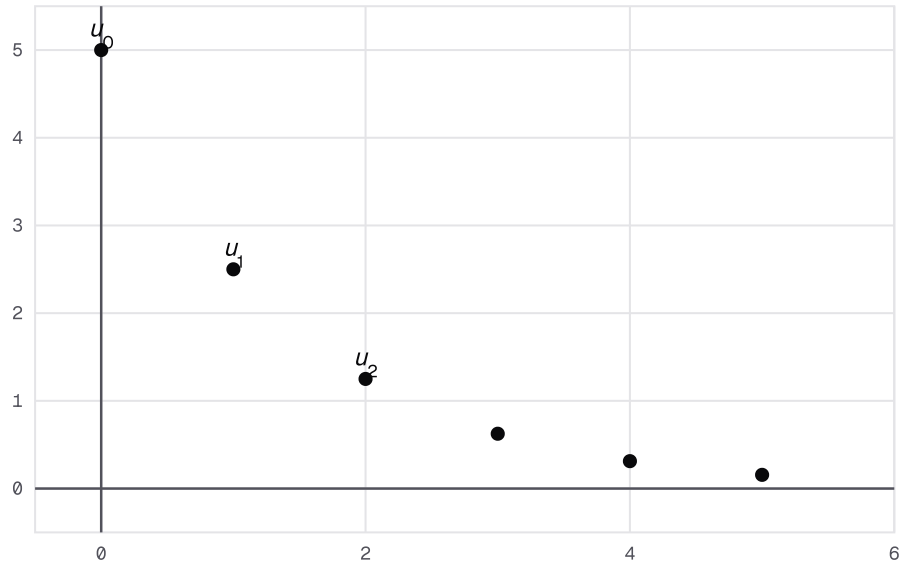
Juste.

Juste : chaque terme est la moitié du précédent.

Correction

Chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par $\frac{1}{2}$. Le suivant est $\frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$.

Retiens l'image. Une suite arithmétique ajoute toujours le même nombre ; une suite **géométrique** multiplie toujours par le même nombre. Ce facteur fixe est sa **raison**, notée q. Ici, le premier terme est $u_0 = 5$ et la raison vaut $\frac{1}{2}$.



● Termes de la suite (u_n)

Les points (n, u_n) de la suite de premier terme 5 et de raison 1/2 : chaque pas divise la hauteur par deux.

La définition

Définition : Suite géométrique

Soit q un réel. Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **géométrique de raison** q si $u_{n+1} = q\,u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Lorsqu'aucun terme n'est nul, la raison d'une suite géométrique est le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, qui ne dépend donc pas de n. Réciproquement, si ce quotient vaut un même réel q pour tout entier $n \geq n_0$, alors $u_{n+1} = q\,u_n$: la suite est géométrique de raison q.

Exemple : deux suites géométriques

- $u_0 = 5$ et $q = \dfrac{1}{2}$: $u_1 = \dfrac{5}{2}$, $u_2 = \dfrac{5}{4}$, $u_3 = \dfrac{5}{8}$.
- $v_1 = 2$ et $q = 3$: $v_2 = 6$, $v_3 = 18$, $v_4 = 54$. Cette suite commence au rang $n_0 = 1$.

À l'inverse, $1, 2, 5$, les premiers termes de $n^2 + 1$, ne sont pas géométriques : $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{5}{2}$.

Pour aller de $v_1 = 2$ à v_4, on multiplie trois fois par 3 :

$$v_4 = 2 \times 3^3 = 54.$$

Pourquoi est-ce vrai ? Entre les indices p et n, il y a $n - p$ multiplications par q. La preuve le confirme par récurrence, puis tire le sens de variation du quotient.

Le terme général

Propriété : Terme général et sens de variation d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q.

- Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p \geq n_0$: $u_n = u_p\, q^{n-p}$, avec la convention $q^0 = 1$. En particulier, $u_n = u_{n_0}\, q^{n-n_0}$.
- Si $u_{n_0} > 0$ et $q > 1$, la suite est strictement croissante ; si $u_{n_0} > 0$ et $0 < q < 1$, elle est strictement décroissante ; si $q = 1$, elle est constante.

Démonstration

Étape 1. Soit $p \geq n_0$ un entier fixé. Montrons par récurrence que $u_n = u_p\, q^{n-p}$ pour tout entier $n \geq p$. Initialisation : $u_p = u_p\, q^0$. Hérédité : soit $n \geq p$ un entier tel que $u_n = u_p\, q^{n-p}$; alors, d'après F14, $u_{n+1} = q\, u_n = u_p\, q^{n+1-p}$. Conclusion par le principe de récurrence. Avec $p = n_0$, on obtient la seconde formule.

Étape 2. Supposons $u_{n_0} > 0$ et $q > 0$. Par l'étape 1, $u_n = u_{n_0}\, q^{n-n_0} > 0$ pour tout entier $n \geq n_0$, et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ (F14). D'après F09, la suite est strictement croissante si $q > 1$, et strictement décroissante si $0 < q < 1$.

Étape 3. Si $q = 1$, alors $u_{n+1} = 1 \times u_n = u_n$ (F14) pour tout entier $n \geq n_0$: la suite est constante (F07).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La formule du terme général sert deux fois.

D'abord, elle montre que tous les termes sont strictement positifs quand $u_{n_0} > 0$ et $q > 0$. Ensuite, elle autorise la comparaison du quotient q à 1.

Retiens l'ordre : signe des termes d'abord, quotient ensuite.

Vérifie : Pourquoi la positivité d'abord ?

Dans l'étape 2 de la preuve, pourquoi établit-on $u_n > 0$ avant de comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ?

A. Parce que la comparaison du quotient à 1 exige des termes strictement positifs.

Juste.

Juste : la monotonie par le quotient ne s'applique qu'à des termes strictement positifs.

B. Pour démontrer que $q > 0$.

Faux.

$q > 0$ est une hypothèse de l'étape 2, pas une conclusion.

C. Parce que des termes positifs forment une suite croissante.

Faux.

Faux : $\dfrac{5}{2^n}$ est positif, et la suite est décroissante.

D. Pour initialiser une récurrence.

Faux.

L'étape 2 n'emploie aucune récurrence : celle de l'étape 1 est déjà conclue.

Correction

L'étape 1 donne $u_n = u_{n_0}\, q^{n-n_0}$; avec $u_{n_0} > 0$ et $q > 0$, tous les termes sont strictement positifs.

Ce n'est qu'ensuite que l'on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ à 1, car diviser par un terme négatif renverserait l'inégalité.

Exemple : sens de variation

Première suite. Pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{5}{2^n}.$$

Comme $u_0 = 5 > 0$ et $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, la suite est strictement décroissante. Par exemple, $u_6 = \dfrac{5}{64}$.

Seconde suite. Pour tout $n \geq 1$, $v_n = 2 \times 3^{n-1}$. Comme $v_1 = 2 > 0$ et $3 > 1$, la suite est strictement croissante. Par exemple, $v_6 = 2 \times 243 = 486$.

Attention : la raison ne suffit pas

✗ « La suite géométrique de premier terme $w_1 = -2$ et de raison 3 est croissante, car $3 > 1$. »

✓ Ses termes sont -2, -6, -18 : elle est strictement décroissante. Le sens de variation dépend aussi du signe du premier terme.

Et si $q < 0$, avec un premier terme non nul, les termes changent de signe : la suite n'est pas monotone. Par exemple, si $u_{n_0} > 0$, alors $u_{n_0+1} < 0 < u_{n_0+2}$, donc $u_{n_0+1} < u_{n_0}$ et $u_{n_0+2} > u_{n_0+1}$.

Trois termes consécutifs

Dans 2, 6, 18, on a

$$6^2 = 36 = 2 \times 18.$$

Pourquoi est-ce vrai ? Le terme du milieu vaut q fois le premier, et le dernier vaut q fois le milieu. La preuve fait disparaître q en multipliant les deux termes extrêmes ; la réciproque demande un premier terme non nul.

Propriété : Trois termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit a, b, c trois réels.

- S'il existe un réel q tel que $b = qa$ et $c = qb$, c'est-à-dire si a, b, c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique, alors $b^2 = ac$.
- Réciproquement, si $a \neq 0$ et $b^2 = ac$, alors a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique, de raison $q = \dfrac{b}{a}$.

Démonstration

Étape 1. Supposons qu'il existe un réel q tel que $b = qa$ et $c = qb$. Alors $ac = a \times qb = (qa) \times b = b \times b = b^2$.

Étape 2. Réciproquement, supposons $a \neq 0$ et $b^2 = ac$, et posons $q = \dfrac{b}{a}$. Alors $qa = b$. Comme $a \neq 0$, l'égalité $b^2 = ac$ donne $c = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{b}{a} \times b = qb$.

Étape 3. L'hypothèse $a \neq 0$ est nécessaire : les réels $a = 0$, $b = 0$ et $c = 1$ vérifient $b^2 = ac$, mais pour tout réel q, $qb = 0 \neq c$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Dans le sens direct,

$$ac = a \times qb = (qa) \times b = b^2.$$

Pour la réciproque, on fabrique la raison $q = \dfrac{b}{a}$: cela exige $a \neq 0$.

Retiens le test : $b^2 = ac$; et n'oublie jamais de vérifier l'hypothèse $a \neq 0$ pour conclure.

Exemple : Contre-exemple : un premier terme nul

Les réels $0, 0, 7$ vérifient $b^2 = ac$, car $0^2 = 0 \times 7$. Pourtant, pour tout réel q, $q \times 0 = 0 \neq 7$: aucune raison ne fait passer du deuxième au troisième. L'hypothèse $a \neq 0$ de la réciproque est donc nécessaire.

À toi : Trois termes consécutifs

Trouve le réel $x > 0$ tel que 2, x, 18 soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Donne la raison. Les réels $1, 2, 5$ sont-ils trois termes consécutifs d'une suite géométrique ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris la condition $b^2 = ac$ avec $a = 2$, $b = x$, $c = 18$.

Indice 2

Le premier terme 2 n'est pas nul : la réciproque s'applique.

Indice 3

Point délicat : l'équation $x^2 = 36$ a deux solutions ; l'énoncé impose $x > 0$.

Réponse

Le premier triplet. D'après le test des trois termes, la condition s'écrit

$$x^2 = 2 \times 18 = 36.$$

Comme $x > 0$, on obtient $x = 6$. Comme $2 \neq 0$, la réciproque donne trois termes consécutifs, de raison $q = \dfrac{6}{2} = 3$.

Le second triplet. Pour $1, 2, 5$: $2^2 = 4$ et $1 \times 5 = 5$. Comme $4 \neq 5$, ce ne sont pas trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Somme de termes d'une suite géométrique

Multiplier pour simplifier

Devine : Un décalage

Soit $S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162$. On calcule $3S = 6 + 18 + 54 + 162 + 486$. Que vaut $3S - S$?

A. 242

Faux.

C'est S lui-même : ici, $3S - S = 2S$.

B. 486

Faux.

Le premier terme 2 de S ne se simplifie pas : il faut le retrancher.

C. 484

Juste.

Juste : il reste $486 - 2$.

D. 160

Faux.

C'est $162 - 2$: on a pris le dernier terme de S au lieu de celui de $3S$.

Correction

Les termes $6, 18, 54, 162$ figurent dans S et dans $3S$: ils disparaissent. Il reste

$$3S - S = 486 - 2 = 484.$$

Donc $2S = 484$ et $S = 242$.

Multiplier une somme géométrique par sa raison la décale d'un cran : presque tous les termes se retrouvent.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque terme multiplié par q devient le terme suivant. La preuve soustrait les deux sommes, puis divise par $1-q$, ce qui exige $q \neq 1$.

La formule

Propriété : Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit q un réel différent de 1. Pour tout entier naturel m :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}.$$

Plus généralement, si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et si p, n sont deux entiers tels que $n_0 \leq p \leq n$, alors

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Si $q = 1$, cette somme vaut $(n - p + 1)\, u_p$.

Démonstration

Étape 1. Soit m un entier naturel ; posons $S = 1 + q + \cdots + q^m$. Alors $qS = q + q^2 + \cdots + q^{m+1}$. Les termes $q, q^2, \ldots, q^m$ figurent dans les deux sommes (si $m = 0$, il n'y en a aucun), donc $S - qS = 1 - q^{m+1}$, soit $(1-q)S = 1 - q^{m+1}$. Comme $q \neq 1$, on a $1 - q \neq 0$, d'où la première formule.

Étape 2. D'après F15, $u_k = u_p\, q^{k-p}$ pour tout entier k tel que $p \leq k \leq n$. Donc $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p\,(1 + q + \cdots + q^{n-p})$. L'étape 1, avec $m = n - p$, donne la deuxième formule.

Étape 3. Si $q = 1$, alors $u_k = u_p$ pour tout entier k tel que $p \leq k \leq n$ (F15). La somme compte $n - p + 1$ termes (F04), donc elle vaut $(n - p + 1)\, u_p$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le calcul de $S - qS$ ne garde que le premier et le dernier terme décalé : $1 - q^{m+1}$. On divise ensuite par $1 - q$, qui n'est pas nul.

Le cas général se ramène au premier en mettant u_p en facteur.

Retiens la forme : premier terme, multiplié par

$$\frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

Vérifie : Une hypothèse indispensable

Dans l'étape 1 de la preuve, où sert l'hypothèse $q \neq 1$?

A. Pour écrire $qS = q + q^2 + \cdots + q^{m+1}$.

Faux.

Ce calcul vaut pour tout réel q.

B. Pour simplifier les termes communs de S et de qS.

Faux.

Cette simplification vaut aussi pour $q = 1$.

C. Pour diviser par $1 - q$, qui n'est alors pas nul.

Juste.

Juste : si $q = 1$, on diviserait par 0.

D. Pour que tous les termes soient positifs.

Faux.

La formule vaut aussi pour une raison négative.

Correction

On obtient $(1-q)S = 1 - q^{m+1}$. Pour isoler S, on divise par $1 - q$, ce qui n'est permis que si $q \neq 1$.

Exemple : Exemple guidé : une somme de moitiés

Soit $u_k = \dfrac{5}{2^k}$ pour $k \geq 0$: cette suite est géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Soit $n \geq 0$. La somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ compte $n+1$ termes, donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k &= 5 \times \frac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{2}} \\ &= 10\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= 10 - \frac{5}{2^n}. \end{aligned}$$

Vérifie pour $n = 2$: $5 + \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{35}{4}$, et $10 - \dfrac{5}{4} = \dfrac{35}{4}$.

Appliquer

Exemple : le cas d'une raison égale à 1

La suite constante égale à 5 est géométrique de raison 1. La formule générale diviserait par $1 - 1 = 0$: elle ne s'applique pas.

On compte simplement les termes : pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} 5 = 5(n+1)$.

À toi : Une somme géométrique

Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite géométrique de premier terme $v_1 = 2$ et de raison 3. Calcule $\sum_{k=1}^{6} v_k$ par la formule, puis vérifie en additionnant les termes. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le premier terme de la somme est $v_1 = 2$.
Indice 2
Compte les termes : de v_1 à v_6.
Indice 3
Point délicat : l'exposant de q dans la formule est le nombre de termes, ici 6.

Réponse
La somme compte $6 - 1 + 1 = 6$ termes, et $q = 3 \neq 1$. D'après la formule de la somme géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6} v_k &= 2 \times \frac{1 - 3^{6}}{1 - 3} \\ &= 2 \times \frac{-728}{-2} = 728.\end{aligned}$$

Vérification. $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 = 728$.

Une suite auxiliaire pour une relation affine

Se ramener à une suite connue

Devine : Ajouter 1

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$: $0, 2, 8, 26, 80$. Ajoute 1 à chaque terme. Que remarques-tu ?

A. On obtient des nombres pairs.
Faux.
$0 + 1 = 1$ est impair.

B. On obtient une suite arithmétique.
Faux.
Les écarts entre $1, 3, 9$ ne sont pas égaux.

C. Rien de particulier.
Faux.
Regarde $1, 3, 9, 27, 81$ de plus près.

D. On obtient les puissances de 3.

Juste.

Juste : $1, 3, 9, 27, 81$.

Correction

$0+1=1, 2+1=3, 8+1=9, 26+1=27, 80+1=81$. Ce sont $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4$. La suite (u_n+1) semble géométrique de raison 3.

En clair. La relation $u_{n+1}=3u_n+2$ n'est ni arithmétique ni géométrique. Mais un simple décalage, ajouter 1, la transforme en suite géométrique, que l'on sait étudier.

On appelle **suite auxiliaire** cette suite décalée. Tout le travail consiste à trouver le bon décalage.

La méthode

Méthode : étudier une suite par une suite auxiliaire

Pour une suite définie par $u_{n+1}=a\,u_n+b$, avec a et b réels et $a\neq 1$:

1. **Cherche** le réel α tel que $\alpha=a\alpha+b$ (possible car $a\neq 1$).
2. **Pose** $v_n=u_n-\alpha$ et montre que $v_{n+1}=a\,v_n$: la suite (v_n) est géométrique de raison a.
3. **Exprime** v_n en fonction de n, puis $u_n=v_n+\alpha$.
4. **Exploite** cette expression : sens de variation, bornes, sommes.

Exemple : Exemple guidé : le terme général

Soit $u_0=0$ et $u_{n+1}=3u_n+2$ pour tout entier $n\geq 0$.

Décalage. $\alpha=3\alpha+2$ équivaut à $\alpha=-1$. Posons $v_n=u_n-(-1)=u_n+1$ pour tout $n\geq 0$.

Suite géométrique. Soit $n\geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 3u_n+2+1 \\ &= 3(u_n+1)=3v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 3, et $v_0=1$. Donc $v_n=3^n$.

Conclusion. Pour tout $n\geq 0$, $u_n=3^n-1$. Vérifie : $u_4=81-1=80$.

Exemple : Exemple guidé : variation et somme

Avec $u_n=3^n-1$, pour tout entier $n\geq 0$:

Sens de variation.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3^{n+1} - 3^n \\ &= 2 \times 3^n > 0. \end{aligned}$$

La suite est strictement croissante.

Somme. D'après les règles de calcul et la somme géométrique de raison 3,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} 3^k - (n+1) \\ &= \frac{3^{n+1} - 1}{2} - (n+1). \end{aligned}$$

Vérifie pour $n = 2$: $0 + 2 + 8 = 10$, et $\dfrac{27 - 1}{2} - 3 = 10$.

Vers le devoir

Vérifie : Le bon décalage

Soit $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$. Quel réel α vérifie $\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 3$?

A. $\alpha = 6$

Juste.
Juste : $\dfrac{1}{2} \times 6 + 3 = 6$.

B. $\alpha = 3$

Faux.
$\dfrac{1}{2} \times 3 + 3 = \dfrac{9}{2} \neq 3$.

C. $\alpha = -6$

Faux.
$\dfrac{1}{2} \times (-6) + 3 = 0 \neq -6$.

D. $\alpha = 2$

Faux.
$\dfrac{1}{2} \times 2 + 3 = 4 \neq 2$.

Correction
$\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 3$ équivaut à $\dfrac{1}{2}\alpha = 3$, soit $\alpha = 6$. La suite auxiliaire sera $v_n = u_n - 6$.

Remarque : Coin devoir : une suite récurrente en plusieurs questions

En devoir, une suite récurrente s'étudie en questions enchaînées. Par exemple, avec $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$:

1. « Montrer que $u_n < 6$ pour tout n » : récurrence titrée.
2. « Montrer que (v_n), avec $v_n = u_n - 6$, est géométrique » : calcul de v_{n+1}.

3. « En déduire u_n en fonction de n », puis le sens de variation.

Chaque « en déduire » utilise la réponse précédente : cite-la.

À toi : La suite du devoir

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$, et $v_n = u_n - 6$. Montre que (v_n) est géométrique. Déduis-en u_n en fonction de n, puis le sens de variation de (u_n) et une borne. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $v_{n+1} = u_{n+1} - 6$ et remplace u_{n+1} par son expression.
Indice 2
Le premier terme est $v_0 = u_0 - 6 = -4$.
Indice 3
Point délicat : v_n est négatif, donc $u_n = 6 + v_n$ reste sous 6.

Réponse
Suite géométrique. Soit $n \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et $v_0 = -4$.

Terme général. Pour tout $n \geq 0$, $v_n = \frac{-4}{2^n}$ et $u_n = 6 - \frac{4}{2^n}$. Vérifie : $u_1 = 4$ et $u_2 = 5$.

Sens de variation. Soit $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4}{2^n} - \frac{4}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2}{2^n} > 0. \end{aligned}$$

La suite est strictement croissante.

Borne. Enfin, $\frac{4}{2^n} > 0$, donc $u_n < 6$ pour tout $n \geq 0$.

Ce qu'il faut retenir

À retenir : quelle méthode pour quelle question

- **Calculer un terme** : remplacer n (suite explicite), ou avancer de proche en proche (suite récurrente).
- **Bien définie** : un intervalle I tel que $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$, contenant le premier terme.

- **Bornée** : un réel indépendant de n, puis des inégalités enchaînées ou une récurrence.
- **Sens de variation** : signe de $u_{n+1} - u_n$; quotient comparé à 1 si les termes sont strictement positifs ; récurrence.
- **Nature** : différence constante (arithmétique), $u_{n+1} = q\,u_n$ (géométrique) ; trois termes pour réfuter.
- **Somme** : nature, premier terme, nombre de termes $n - p + 1$, formule.
- **Relation** $u_{n+1} = au_n + b$: suite auxiliaire géométrique.

Le mot du prof. Tu sais maintenant calculer les termes d'une suite, la borner, trouver son sens de variation et calculer ses sommes. Chaque réponse s'est démontrée, plusieurs fois par récurrence. En 2BAC SM, l'étude des suites se poursuit : ces outils en seront la base.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Suites numériques (généralités) » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)