BURHAN

Résumé : La rotation dans le plan

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/rotation-dans-le-plan/resume

Chapitre	Semestre
La rotation dans le plan	Semestre 1

Définir une rotation

À retenir : Le réflexe : un centre, un angle, un sens

Une rotation se nomme toujours par son centre **et** par son angle.

Cet angle est un angle orienté : l'ordre des vecteurs compte, et une mesure n'est connue qu'à 2π près.

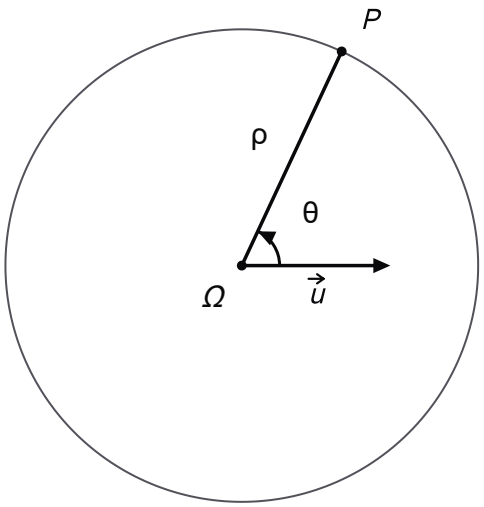
Pense à une grande roue : chaque nacelle garde sa distance au centre, et toutes tournent du même angle.

Propriété : Point défini par une distance et un angle orienté

Soit Ω un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul, ρ un réel strictement positif et θ un réel.

Il existe un unique point P du plan tel que $\Omega P = \rho$ et :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega P}) \equiv \theta \ [2\pi].$$



Autour de Ω, le cercle de rayon ρ et l'angle θ compté depuis la direction de u ne laissent qu'un point possible : P.

Définition : Rotation de centre Ω et d'angle θ

Soit Ω un point du plan et θ un réel. La **rotation de centre Ω et d'angle θ** est l'application r du plan dans lui-même définie par :

- $r(\Omega) = \Omega$;
- pour tout point $M \neq \Omega$, $r(M)$ est l'unique point M' tel que $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

On la note $\mathcal{R}(\Omega, \theta)$; M' est l'**image** de M par r.

Pour tout entier relatif k, $\mathcal{R}(\Omega, \theta + 2k\pi) = \mathcal{R}(\Omega, \theta)$: on dit que θ est **une mesure** de l'angle de la rotation.

Les rotations $\mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\mathcal{R}\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$ sont les **quarts de tour** de centre Ω, direct et indirect.

Propriété : Cas particuliers et point invariant

Soit $r = \mathcal{R}(\Omega, \theta)$.

- Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, r est l'identité du plan : $r(M) = M$ pour tout point M.
- Si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, r est la symétrie centrale de centre Ω : pour tout point M, Ω est le milieu de $[MM']$, où $M' = r(M)$.
- Si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, Ω est le seul point invariant de r : $r(M) = M$ si et seulement si $M = \Omega$.

Méthode : construire l'image d'un point

1. **Regarder** si le point est le centre : $r(\Omega) = \Omega$.
2. **Tracer** le cercle de centre Ω qui passe par M : l'image M' est sur ce cercle.
3. **Reporter** l'angle θ à partir de la demi-droite $[\Omega M)$, dans le sens direct si $\theta > 0$ et dans le sens indirect si $\theta < 0$, puis placer M'.

Rédaction : « M' est le point du cercle de centre Ω passant par M tel que $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$ ».

Méthode : montrer qu'un point est l'image d'un autre

1. **Nommer** la rotation par son centre Ω et son angle θ.
2. **Vérifier** la première condition : $\Omega M' = \Omega M$.
3. **Vérifier** la seconde : $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$, lue sur la figure après avoir dit son sens, direct ou indirect.

Rédaction : « $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$; d'après la définition, M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ ».

Exemple

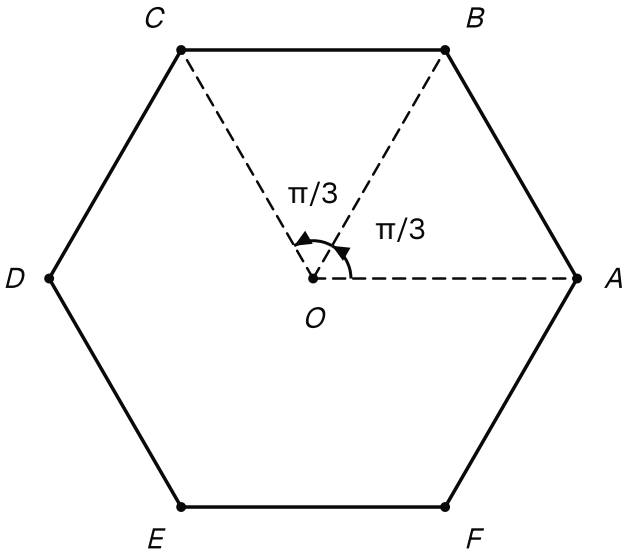
Énoncé. Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O, de sens direct : ses six sommets sont à la même distance de O, et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, … mesurent tous $\frac{\pi}{3}$. Montre que C est l'image de A par $\mathcal{R}\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$.

Distance. Les sommets sont à la même distance de O : $OC = OA$.

Angle. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) &\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ &\equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux conditions de la définition sont vérifiées : C est l'image de A par $\mathcal{R}\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$.



Hexagone régulier direct ABCDEF de centre O : deux sauts de π/3 autour de O font passer de A à C, soit un angle de 2π/3.

Attention : L'ordre des vecteurs compte

L'égalité $\Omega M' = \Omega M$ seule ne prouve rien : chaque point du cercle de centre Ω passant par M la satisfait. L'angle est indispensable, pris dans le bon ordre.

Dans l'hexagone précédent :

$$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

La rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ envoie donc A sur C, et non C sur A.

Réciproque et composée de même centre

Théorème : Bijectivité et réciproque d'une rotation

Soit $r = \mathcal{R}(\Omega, \theta)$ et $r' = \mathcal{R}(\Omega, -\theta)$. Pour tous points M et N :

$$r(M) = N \iff r'(N) = M.$$

Par conséquent, r est une bijection du plan sur lui-même, et sa réciproque est la rotation $r^{-1} = \mathcal{R}(\Omega, -\theta)$.

Propriété : Composée de deux rotations de même centre

Soit Ω un point du plan, et θ, θ' deux réels. Alors :

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(\Omega, \theta') \circ \mathcal{R}(\Omega, \theta)\\ &= \mathcal{R}(\Omega, \theta + \theta')\\ &= \mathcal{R}(\Omega, \theta) \circ \mathcal{R}(\Omega, \theta').\end{aligned}$$

À retenir : Défaire un tour, enchaîner deux tours

Pour défaire une rotation, on tourne autour du même centre, du même angle, dans l'autre sens.

Deux rotations de même centre s'enchaînent en additionnant leurs angles, dans n'importe quel ordre.

Une somme multiple de 2π donne l'identité. Une somme égale à π modulo 2π donne la symétrie centrale de même centre.

Exemple

Énoncé. Dans l'hexagone régulier direct $ABCDEF$ de centre O, soit $r_1 = \mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$ et $r_2 = \mathcal{R}\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$. Détermine $r_2 \circ r_1$, puis r_1^{-1}.

Composée. Les centres sont égaux et $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$, donc :

$$r_2 \circ r_1 = \mathcal{R}(O, \pi).$$

C'est la symétrie centrale de centre O. Elle envoie A sur D : O est le milieu de la grande diagonale $[AD]$.

Réciproque. On a $r_1^{-1} = \mathcal{R}\left(O, -\frac{\pi}{3}\right)$. Elle envoie B sur A, car $OA = OB$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Deux symétries axiales font une rotation

Propriété : Propriétés de la symétrie axiale

Soit Δ une droite et S_Δ la symétrie axiale d'axe Δ. Soit A, B, C, D quatre points, d'images A_1, B_1, C_1, D_1 par S_Δ.

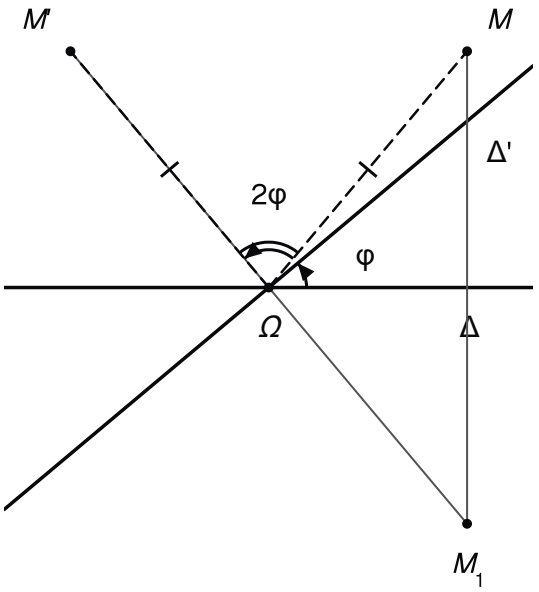
- $A_1B_1 = AB$: une symétrie axiale conserve les distances.
- Si $A \neq B$ et $C \neq D$: $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{C_1D_1}) \equiv -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$: une symétrie axiale change chaque angle orienté en son opposé.
- $S_\Delta \circ S_\Delta$ est l'identité du plan, et les points invariants de S_Δ sont les points de Δ.

Théorème : Composée de deux symétries axiales d'axes passant par un même point

Soit Δ et Δ' deux droites passant par un même point Ω, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, et φ une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{u}')$. Alors :

$$S_{\Delta'} \circ S_\Delta = \mathcal{R}(\Omega, 2\varphi).$$

Le résultat ne dépend pas des vecteurs directeurs choisis : remplacer $\vec{u}$ par $-\vec{u}$ ajoute π à φ, donc 2π à 2φ.



Symétrie d'axe Δ, puis symétrie d'axe Δ' : le point M tourne autour de Ω d'un angle 2φ, double de l'angle orienté des deux axes.

À retenir : Deux miroirs, un angle doublé

Deux miroirs sécants en Ω font tourner la figure autour de Ω.

Si φ mesure l'angle des vecteurs directeurs, du premier axe vers le second, la composée tourne de 2φ.

Le premier axe est celui de la symétrie appliquée d'abord, écrite à droite.

Exemple

Énoncé. Les droites Δ et Δ' se coupent en Ω, avec des vecteurs directeurs tels que $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv -\frac{\pi}{8}\ [2\pi]$. Identifie $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ et $S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$.

Premier ordre. D'abord S_{Δ}, puis $S_{\Delta'}$: c'est la rotation de centre Ω et d'angle

$$2 \times \left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Ordre inverse. Ici $(\vec{u}', \vec{u}) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$, donc :

$$S_{\Delta} \circ S_{\Delta'} = \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{4}\right).$$

Les deux composées sont réciproques l'une de l'autre.

Attention : L'ordre des symétries compte

$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ se lit de droite à gauche : d'abord S_{Δ}, puis $S_{\Delta'}$.

Échanger les deux symétries change l'angle de la rotation en son opposé. Les deux composées ne coïncident que si cet angle vaut 0 ou π modulo 2π, par exemple pour deux axes perpendiculaires.

Décomposer une rotation

Théorème : Décomposition d'une rotation en deux symétries axiales

Soit $r = \mathcal{R}(\Omega, \theta)$ et Δ une droite quelconque passant par Ω, de vecteur directeur $\vec{u}$.

- Soit Δ' la droite passant par Ω de vecteur directeur $\vec{u}'$, où $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$. Alors $r = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.
- Soit Δ'' la droite passant par Ω de vecteur directeur $\vec{u}''$, où $(\vec{u}'', \vec{u}) \equiv \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$. Alors $r = S_{\Delta} \circ S_{\Delta''}$.

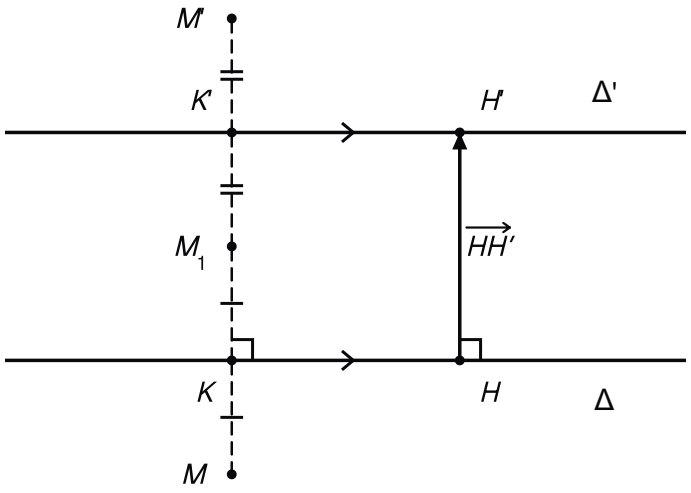
Ainsi, toute rotation est la composée de deux symétries axiales dont les axes passent par son centre, l'un des deux axes pouvant être choisi.

Propriété : Composée de deux symétries axiales d'axes parallèles

Soit Δ et Δ' deux droites parallèles, H un point de Δ et H' le point d'intersection de Δ' avec la perpendiculaire à Δ passant par H.

Alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{HH'}$.

En particulier, si $\Delta' = \Delta$, alors $H' = H$ et $S_{\Delta} \circ S_{\Delta}$ est l'identité du plan.



Deux axes parallèles : la composée des deux symétries fait glisser chaque point du double du vecteur HH', perpendiculaire aux axes.

Méthode : décomposer une rotation en deux symétries

1. **Choisir** l'axe imposé Δ, qui passe par le centre : par exemple la droite qui joint deux centres, ou un côté de la figure.
2. **Placer** l'autre axe par le centre, à l'angle $\dfrac{\theta}{2}$: de Δ vers le nouvel axe si S_Δ agit en premier, du nouvel axe vers Δ si elle agit en second.
3. **Écrire** la composée dans le bon ordre, la première symétrie à droite, puis **contrôler** sur un point.

Rédaction : « soit Δ' la droite passant par Ω dirigée par $\vec{u}'$, avec $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$; d'après le théorème de décomposition, $r = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ ».

Exemple

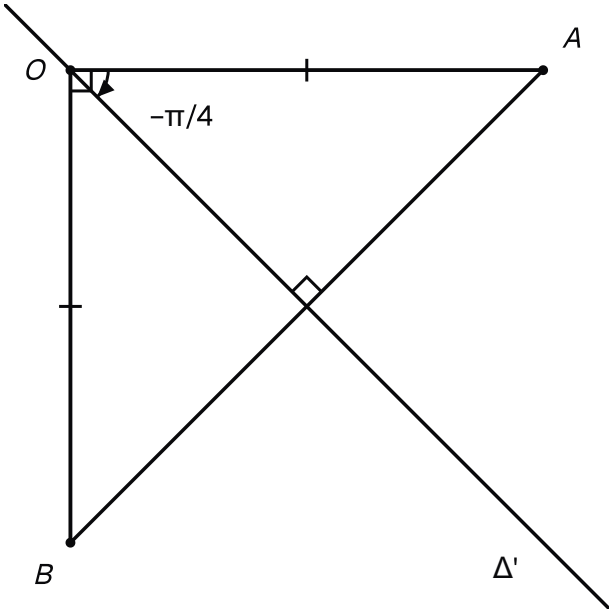
Énoncé. Soit OAB un triangle rectangle isocèle en O, de sens indirect : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Décompose $r = \mathcal{R}\left(O, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ sous la forme $S_{\Delta'} \circ S_{(OA)}$.

Second axe. Il passe par O, et son vecteur directeur $\vec{u}'$ vérifie :

$$(\overrightarrow{OA}, \vec{u}') \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

C'est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$, qui est aussi la médiatrice de $[AB]$.

Contrôle. $S_{(OA)}$ laisse A fixe, puis la symétrie d'axe la médiatrice de $[AB]$ envoie A sur B. On retrouve $r(A) = B$.



Triangle OAB rectangle isocèle en O, indirect : le second axe Δ' est la médiatrice de [AB], à -π/4 de la droite (OA).

Attention : Deux fois l'angle des axes

La composée tourne de **deux fois** l'angle formé par les axes. Pour une rotation d'angle θ, les axes font l'angle $\frac{\theta}{2}$.

Un demi-tour demande deux axes perpendiculaires, et non confondus : la composée $S_\Delta \circ S_\Delta$ est l'identité.

Ce qu'une rotation conserve

Théorème : Conservation des distances et des angles orientés

Soit r une rotation, et A, B, C, D quatre points d'images A', B', C', D' par r.

- $A'B' = AB$: une rotation conserve les distances.
- Si $A \neq B$ et $C \neq D$, alors $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$: une rotation conserve les angles orientés.

Théorème : Propriété caractéristique d'une rotation

Soit $r = \mathcal{R}(\Omega, \theta)$, et M, N deux points d'images M' et N' par r. Alors $M'N' = MN$ et, si $M \neq N$:

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv \theta\ [2\pi].$$

Seule cette implication est établie ici : pour montrer qu'une application est une rotation, on utilise la définition, ou l'un des théorèmes sur les composées (de deux symétries axiales, de deux rotations).

Propriété : Conservation des relations vectorielles et du barycentre

Soit r une rotation, et A, B, C, E quatre points d'images A', B', C', E' par r.

- Pour tout réel k : si $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CE}$, alors $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{C'E'}$.
- Si $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$, alors $r(G) = \mathrm{Bar}\{(A',\alpha),(B',\beta)\}$. En particulier, l'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$.

Méthode : démontrer une propriété de figure

1. **Repérer** une rotation qui envoie une partie de la figure sur une autre : angle $\pm\dfrac{\pi}{3}$ dans un triangle équilatéral, quart de tour dans un carré, selon le sens de la figure.
2. **Écrire** les images de deux ou trois points, chacune justifiée par les deux conditions de la définition.
3. **Conclure** par une propriété conservée nommée : distance, angle orienté, milieu, barycentre ou alignement.

Rédaction : « $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$; d'après la propriété caractéristique, $A'B' = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi]$ ».

Exemple

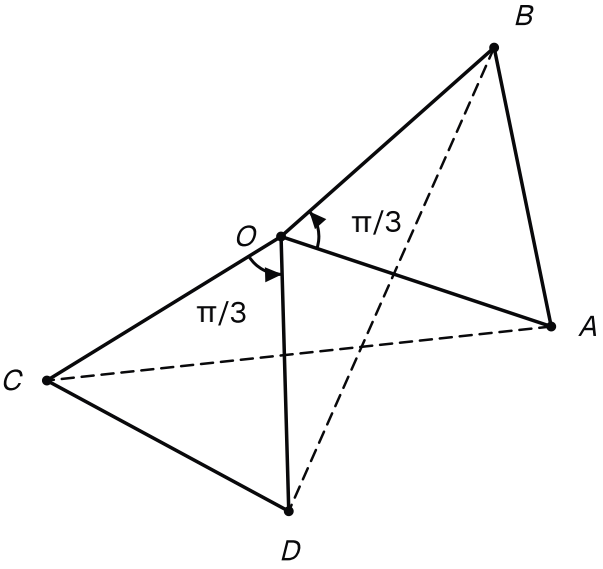
Énoncé. Les triangles OAB et OCD sont équilatéraux et de sens direct : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Compare AC et BD.

Rotation. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Comme $OB = OA$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, on a $r(A) = B$. De même, $r(C) = D$.

Conclusion. D'après la propriété caractéristique, $BD = AC$ et :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Si I et J sont les milieux de $[AC]$ et $[BD]$, alors $r(I) = J$: pour $I \neq O$, le triangle OIJ est équilatéral.



Les triangles équilatéraux directs OAB et OCD partagent le sommet O : la rotation de centre O et d'angle π/3 envoie [AC] sur [BD].

Attention : Sens direct ou indirect

Avant d'écrire le signe d'un angle lu sur une figure, dis le sens de la figure.

Si ABC est équilatéral direct, la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie B sur C. S'il est indirect, il faut l'angle $-\frac{\pi}{3}$; l'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie alors C sur B.

Image d'une figure

Propriété : Image d'une droite, d'un segment, d'un cercle

Soit r une rotation, A et B deux points distincts d'images A' et B', I un point d'image I' et ρ un réel strictement positif.

- L'image de la droite (AB) par r est la droite $(A'B')$; l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- L'image du cercle de centre I et de rayon ρ est le cercle de centre I' et de rayon ρ.

Propriété : Parallélisme, orthogonalité, angle d'une droite et de son image

Soit $r = \mathcal{R}(\Omega, \theta)$, et $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ deux droites d'images $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}'_1$ par r.

- Si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{D}$, d'images A' et B' par r, alors $\overrightarrow{A'B'}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$, et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.
- Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ sont parallèles, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}'_1$ sont parallèles ; si elles sont perpendiculaires, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}'_1$ sont perpendiculaires.

Méthode : trouver l'image d'une figure

1. **Droite** : placer les images de deux points de la droite, ou bien l'image d'un seul point et sa direction tournée de θ.
2. **Segment** : construire les images de ses deux extrémités.
3. **Cercle** : construire l'image de son centre ; le rayon ne change pas.

Rédaction : « $r(I) = I'$ et une rotation conserve les distances ; l'image de ce cercle est donc le cercle de même rayon centré en I' ».

Exemple

Énoncé. Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$, et $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de rayon $1{,}5$, avec $\Omega I = 2$. Décris l'image $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$, puis compare les deux cercles.

Image. Avec $I' = r(I)$, $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre I' et de rayon $1{,}5$.

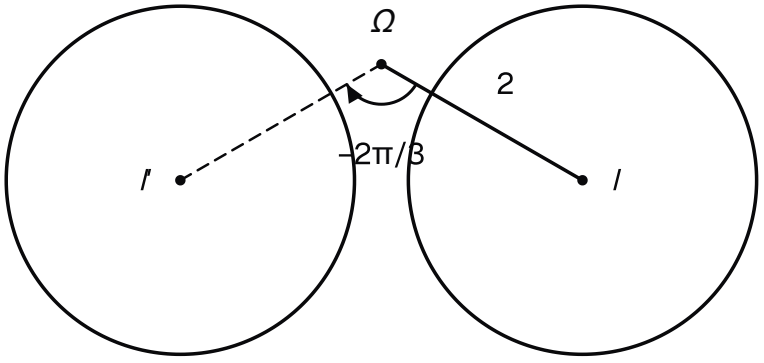
Distance des centres. Le triangle $\Omega I I'$ est isocèle en Ω, d'angle au sommet $\dfrac{2\pi}{3}$. Sa hauteur issue de Ω coupe $[II']$ en son milieu, donc :

$$II' = 2 \times \Omega I \sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Position. La somme des rayons vaut 3, et :

$$2\sqrt{3} \approx 3{,}46 > 3.$$

Les deux cercles n'ont donc aucun point commun.



Le cercle de centre I et de rayon 1,5 tourne autour de Ω d'un angle -2π/3 : son image, de même rayon, a pour centre I'.

Exemple

Énoncé. Soit r un quart de tour de centre Ω, $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{D}'$ son image. Montre que $\mathcal{D}'$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

Angle. Si $\overrightarrow{AB}$ dirige $\mathcal{D}$, alors $\overrightarrow{A'B'}$ dirige $\mathcal{D}'$, et la propriété caractéristique donne :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Conclusion. Les deux vecteurs directeurs forment un angle droit : $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires.

Composer deux rotations de centres distincts

Théorème : Composée de deux rotations de centres distincts

Soit $r_1 = \mathcal{R}(\Omega_1, \theta_1)$ et $r_2 = \mathcal{R}(\Omega_2, \theta_2)$ deux rotations de centres distincts.

- Si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.
- Si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0\ [2\pi]$, alors $r_2 \circ r_1$ est une translation.

Méthode : composer deux rotations

1. **Même centre** : additionner les angles.
2. **Centres distincts** : calculer $\theta_1 + \theta_2$. Si cette somme n'est pas un multiple de 2π, la composée est une rotation de cet angle ; sinon, c'est une translation.
3. **Chercher** son centre, ou son vecteur : écrire chacune comme composée de deux symétries dont l'axe partagé est la droite des centres ; ces deux symétries s'annulent.

Rédaction : « $r_1 = S_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ S_{\Delta_1}$ et $r_2 = S_{\Delta_2} \circ S_{(\Omega_1\Omega_2)}$, donc $r_2 \circ r_1 = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$ ».

Exemple

Énoncé. Soit A et B deux points distincts, $r_1 = \mathcal{R}\left(A, \frac{2\pi}{3}\right)$ et $r_2 = \mathcal{R}\left(B, \frac{\pi}{3}\right)$. Détermine $r_2 \circ r_1$.

Nature. Les centres sont distincts et $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$: c'est une rotation d'angle π, donc une symétrie centrale.

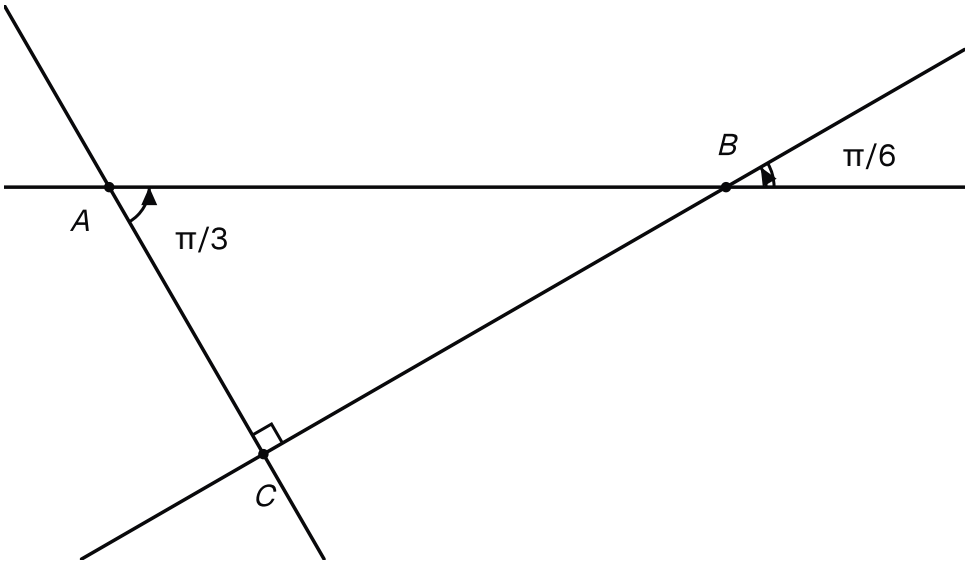
Décomposition. On choisit (AB) comme axe commun.

- $r_1 = S_{(AB)} \circ S_{\Delta_1}$, où Δ_1 passe par A, dirigée par $\vec{u}_1$, avec $(\vec{u}_1, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
- $r_2 = S_{\Delta_2} \circ S_{(AB)}$, où Δ_2 passe par B, dirigée par $\vec{u}_2$, avec $(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_2) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Donc $r_2 \circ r_1 = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$.

Centre. C'est le point C commun à Δ_1 et Δ_2. Le triangle ABC a pour angles $\frac{\pi}{3}$ en A et $\frac{\pi}{6}$ en B : il est rectangle en C, et :

$$AC = \frac{AB}{2}.$$



Les axes Δ1, issu de A, et Δ2, issu de B, se coupent en C, sommet de l'angle droit du triangle ABC : C est le centre du demi-tour r2 ∘ r1.

Attention : Somme nulle : une translation

Si les centres sont distincts et $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0\ [2\pi]$, la composée $r_2 \circ r_1$ est une translation.

Son vecteur n'est pas nul : r_1 fixe Ω_1, et r_2 déplace Ω_1, car Ω_2 est son seul point invariant. Une translation de vecteur non nul n'a aucun point invariant : la composée n'est donc pas une rotation.

Par exemple, avec $A \neq B$, la composée $\mathcal{R}\left(B, -\frac{\pi}{3}\right) \circ \mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$ est une translation, sans aucun point invariant.

Déterminer une rotation

Théorème : Rotation transformant deux points donnés en deux points donnés

Soit A, B, A', B' quatre points tels que $A \neq B$, $A'B' = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi]$, avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$.

Il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$; son angle est θ, et son centre Ω vérifie $\Omega A = \Omega A'$ et $\Omega B = \Omega B'$.

Méthode : retrouver une rotation à partir de deux points et de leurs images

1. **Vérifier** que $A'B' = AB$: sinon, aucune rotation ne convient.

2. **Lire** l'angle par la propriété caractéristique : $\theta \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})\ [2\pi]$, qui doit être non nul modulo 2π.
3. **Chercher** le centre Ω : il est sur la médiatrice de $[AA']$ si $A \neq A'$, et sur celle de $[BB']$ si $B \neq B'$; contrôler ensuite l'angle en Ω.

Rédaction : « $A'B' = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi]$ avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$; une seule rotation envoie A sur A' et B sur B', et son angle est θ ».

Exemple

Énoncé. Dans l'hexagone régulier direct $ABCDEF$ de centre O, détermine la rotation qui envoie A sur C et B sur D.

Un candidat. Soit $\rho = \mathcal{R}\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$. On a vu que $\rho(A) = C$. De même, $OD = OB$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $\rho(B) = D$.

Unicité. D'après la propriété caractéristique, $CD = AB$ et :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

Cet angle n'est pas nul : une seule rotation envoie A sur C et B sur D, c'est ρ.

Attention : Ni formule ni calcul d'image

Dans ce chapitre, une image ne se calcule pas par une formule.

Elle se justifie par la définition, par la propriété caractéristique ou par une propriété conservée nommée.

L'écriture complexe d'une rotation sera étudiée en 2BAC SM.

Réciproque

$$\mathcal{R}(\Omega, \theta)^{-1} = \mathcal{R}(\Omega, -\theta)$$

Même centre

$$\mathcal{R}(\Omega, \theta') \circ \mathcal{R}(\Omega, \theta) = \mathcal{R}(\Omega, \theta + \theta')$$

Axes sécants en Ω, angle φ

$$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = \mathcal{R}(\Omega, 2\varphi)$$

Axes parallèles

$$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{2\overrightarrow{HH'}}$$

Propriété caractéristique

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv \theta\ [2\pi]$$

À retenir : Coin devoir : les formes de questions

Un devoir surveillé sur la rotation enchaîne des questions types.

- « Montrer que $M' = r(M)$ » : les deux conditions de la définition.

> - « Montrer que deux longueurs sont égales » : une rotation nommée, puis la conservation des distances.
> - « Déterminer la composée » : la somme des angles, puis une décomposition.
> - « Déterminer la rotation » : longueurs, angle, puis centre.

Rédige chaque réponse comme une courte preuve.

Nomme la rotation par son centre et son angle, et dis le sens de la figure avant de lire un angle. Vérifie les deux conditions de la définition, ou nomme la propriété conservée.

Pour une composée, écris l'ordre ; pour une décomposition, nomme les axes et l'angle de leurs vecteurs directeurs.