BURHAN

La rotation dans le plan : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/rotation-dans-le-plan/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
La rotation dans le plan	Niveau examen	5

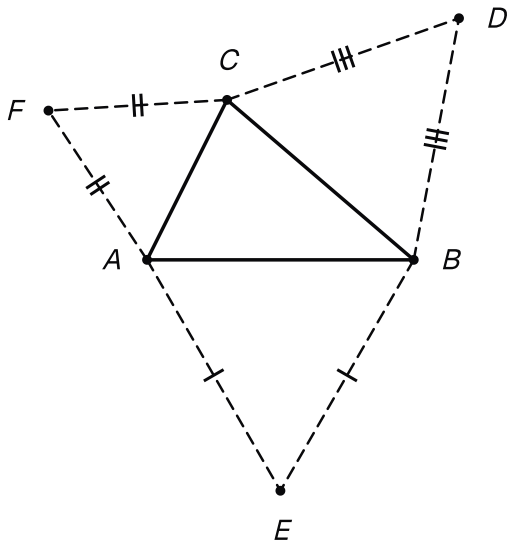
Exercice 1 — 10 pts

Problème : Triangles équilatéraux construits sur les côtés

Soit ABC un triangle de sens direct : une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ appartient à $]0, \pi[$. On construit, à l'extérieur du triangle, trois triangles équilatéraux :

- ABE, avec $AE = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$;
- ACF, avec $AF = AC$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}) \equiv (\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$;
- BCD, avec $CD = CB$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et ρ la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



Le triangle direct ABC et les trois triangles équilatéraux ABE, ACF et BCD construits à l'extérieur de ses côtés.

1. — 1,5 pts

Montrer que $r(E) = B$ et $r(C) = F$.

INDICE

L'angle donné pour E part de $\overrightarrow{AB}$: change l'ordre des vecteurs.

2. — 1,5 pts

En déduire que $BF = EC$, puis que les droites (EC) et (BF) sont sécantes.

3. — 1,5 pts

Soit I et J les milieux respectifs de $[EC]$ et $[BF]$; on suppose $I \neq A$. Montrer que $r(I) = J$, et en déduire la nature du triangle AIJ.

4. 1,5 pts

Soit Δ la médiatrice de $[BE]$. Montrer que $r = S_{\Delta} \circ S_{(AE)}$.

INDICE

La droite Δ passe par A et partage l'angle $\widehat{EAB}$ en deux : quel angle fait-elle avec (AE) ?

5. 1,5 pts

Montrer que $\rho(F) = A$ et $\rho(B) = D$.

INDICE

Pour chaque point, les deux conditions de la définition se lisent dans l'introduction.

6. 1 pts

En déduire que $AD = BF = CE$.

7. 1,5 pts

Soit $g = \rho \circ r$. Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle, et déterminer $g(E)$.

INDICE

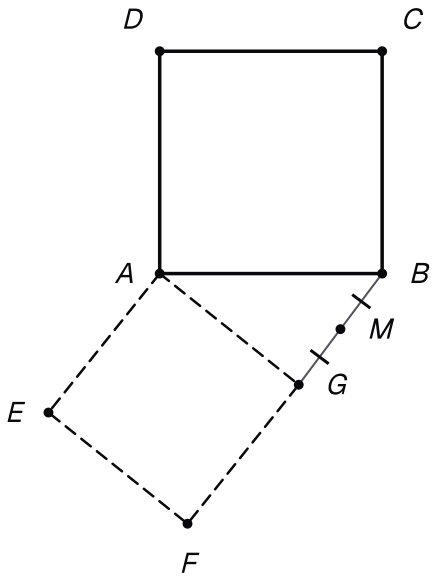
Les centres A et C sont distincts : regarde la somme des angles.

Exercice 2 10 pts

Problème : Deux carrés de même sommet

Soit $ABCD$ et $AEFG$ deux carrés de même sommet A, tous deux de sens direct : $AD = AB$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $AG = AE$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On suppose que E est distinct de B et de D.

On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $B_1 = r(D)$ et M le milieu de $[BG]$.



Les carrés directs ABCD et AEFG, qui ont le sommet A en commun, et le milieu M de [BG].

1. 1,5 pts

Montrer que $r(B) = D$ et $r(E) = G$.

2. 1,5 pts

En déduire que $DG = BE$ et que les droites (BE) et (DG) sont perpendiculaires.

3. 1,5 pts

Montrer que $r \circ r$ est la symétrie centrale de centre A. En déduire que A est le milieu de $[BB_1]$.

INDICE

Compose deux rotations de même centre, puis écris B_1 comme une image de B.

4. 1,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1G}$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$, puis utilise $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B_1A}$.

5. 1,5 pts

Montrer que $B_1G = DE$ et que $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{B_1G}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

6. 1,5 pts

En déduire que $DE = 2AM$ et que la droite (AM) est perpendiculaire à la droite (DE).

7. 1 pts

Montrer que r est la seule rotation qui envoie B sur D et E sur G.

INDICE

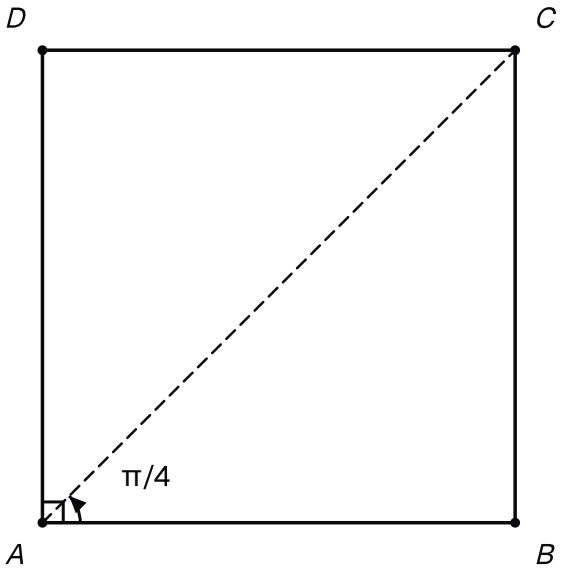
Pense au théorème qui détermine une rotation par deux points et leurs images.

Exercice 3 — 10 pts

Problème : Deux quarts de tour dans un carré

Soit $ABCD$ un carré de sens direct : $AB = AD$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Sa diagonale vérifie $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

On note $r_1 = \mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$, $r_2 = \mathcal{R}\left(C, \frac{\pi}{2}\right)$, $f = r_2 \circ r_1$ et $g = r_1 \circ r_2$.



Le carré direct ABCD, dont les sommets A et C sont les centres des deux quarts de tour, et l'angle orienté π/4 de AB vers AC.

1. — 1 pts

Montrer que $r_1(B) = D$ et $r_2(D) = B$.

2. — 1 pts

Montrer que f est une rotation d'angle π.

3. — 1,5 pts

Montrer que $r_1 = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.

INDICE

Les deux axes passent par A : double l'angle de leurs vecteurs directeurs, pris dans l'ordre d'application des symétries.

4. — 1,5 pts

Montrer que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, puis que $r_2 = S_{(BC)} \circ S_{(AC)}$.

5. — 1,5 pts

En déduire que f est la symétrie centrale de centre B.

6. 1,5 pts

Soit $A_2 = r_2(A)$. Montrer que B est le milieu de $[AA_2]$.

INDICE

Le centre A est fixe par r_1 : exprime A_2 à l'aide de f.

7. 2 pts

Déterminer de même g. Les applications f et g sont-elles égales ?

INDICE

Décompose cette fois r_2 avec (AC) comme second axe, et r_1 avec (AC) comme premier axe ; les droites (CD) et (AD) apparaissent.

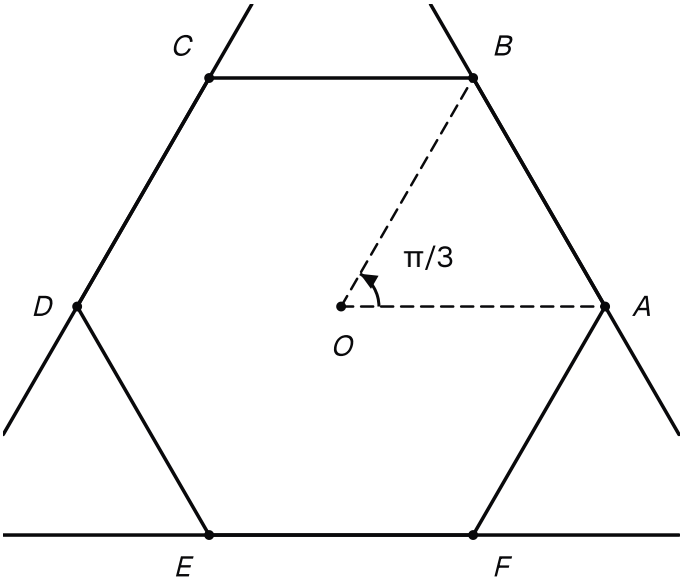
Exercice 4 10 pts

Problème : Trois côtés d'un hexagone régulier

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O, de sens direct : $OA = OB = OC = OD = OE = OF$ et

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &\equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \\ &\equiv (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \\ &\equiv (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}) \\ &\equiv (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) \\ &\equiv (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA}) \\ &\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et $\rho = r \circ r$.



L'hexagone régulier direct ABCDEF de centre O et les droites (AB), (CD) et (EF), portées par un côté sur deux.

1. 1 pts

Montrer que $r(A) = B, r(B) = C, r(C) = D, r(D) = E, r(E) = F$ et $r(F) = A$.

2. 1,5 pts

Montrer que ρ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. En déduire les images par ρ des droites (AB), (CD) et (EF).

INDICE

Calcule d'abord les images par ρ des six sommets à l'aide de la question 1.

3. 1,5 pts

Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont sécantes, puis qu'il en est de même des droites (CD) et (EF), et des droites (EF) et (AB).

4. 1,5 pts

Soit K le point d'intersection des droites (AB) et (CD), L celui des droites (CD) et (EF), et M celui des droites (EF) et (AB). Montrer que $\rho(K) = L$, $\rho(L) = M$ et $\rho(M) = K$.

INDICE

Le point K appartient à deux droites : à quelles droites son image appartient-elle ?

5. 1,5 pts

En déduire que le triangle KLM est équilatéral et que $OK = OL = OM$. Montrer que la droite (OK) est perpendiculaire à la droite (LM).

6. 1,5 pts

Soit $K' = r(K)$. Montrer que K' est le point d'intersection des droites (BC) et (DE).

INDICE

Détermine les images par r des droites (AB) et (CD), puis raisonne comme à la question 4.

7. 1,5 pts

Montrer que $r \circ \rho$ est la symétrie centrale de centre O. En déduire que le point d'intersection des droites (DE) et (FA) est le symétrique de K par rapport à O.

Exercice 5 10 pts

Problème : Deux rotations d'angles opposés

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct : $AB = BC = CA$ et

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &\equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\ &\equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ &\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On note $r_1 = \mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$, $r_2 = \mathcal{R}\left(C, -\frac{\pi}{3}\right)$ et $t = r_2 \circ r_1$.

1. 1 pts

Montrer que $r_1(B) = C$ et $r_2(B) = A$.

2. 1,5 pts

Montrer que t est une translation et que $t(B) = C$. En déduire le vecteur de t.

INDICE

Les centres sont distincts : additionne les angles. Une translation est connue dès que l'on connaît l'image d'un point.

3. 1,5 pts

Soit $D = r_2(A)$. Montrer que $t(A) = D$. En déduire que $ABCD$ est un parallélogramme, puis que c'est un losange.

4. 1,5 pts

Soit M un point du plan, distinct de A et de B, $M_1 = r_1(M)$ et $M_2 = r_2(M_1)$. Montrer que les triangles AMM_1 et CM_1M_2 sont équilatéraux, et préciser le sens de chacun. À l'aide de la question 2, montrer que $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{BC}$.

5. 1,5 pts

Soit Γ le cercle de centre B et de rayon AB. Déterminer son image Γ_1 par r_1, puis son image Γ' par t. Montrer que Γ' passe par A, B et D.

INDICE

Cherche l'image du centre de chaque cercle ; le rayon ne change pas.

6. 1,5 pts

Soit E le point tel que $t(E) = A$. Montrer que $r_1(E) = B$. En déduire que le triangle ABE est équilatéral, et préciser son sens.

INDICE

Écris $r_2(r_1(E)) = A$: quel point a pour image A par r_2 ?

7. 1,5 pts

Montrer que A est le milieu de $[ED]$. Existe-t-il une rotation qui envoie E sur A et A sur D ?

INDICE

Si une telle rotation existe, compare son angle à une mesure de $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{AD})$.