BURHAN

La rotation dans le plan : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/rotation-dans-le-plan/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
La rotation dans le plan	Niveau examen	5

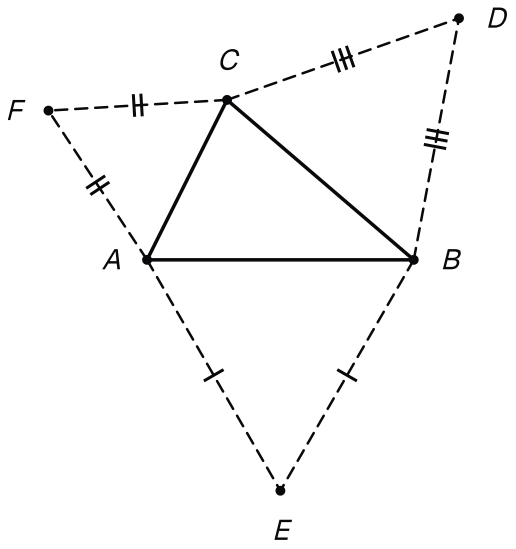
Exercice 1 10 pts

Problème : Triangles équilatéraux construits sur les côtés

Soit ABC un triangle de sens direct : une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ appartient à $]0, \pi[$. On construit, à l'extérieur du triangle, trois triangles équilatéraux :

- ABE, avec $AE = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$;
- ACF, avec $AF = AC$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}) \equiv (\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CA}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$;
- BCD, avec $CD = CB$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On note r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, et ρ la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.



Le triangle direct ABC et les trois triangles équilatéraux ABE, ACF et BCD construits à l'extérieur de ses côtés.

1. 1,5 pts

Montrer que $r(E) = B$ et $r(C) = F$.

INDICE

L'angle donné pour E part de $\overrightarrow{AB}$: change l'ordre des vecteurs.

CORRIGÉ

Image de E. On a $AB = AE$ et, en échangeant les deux vecteurs :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) &\equiv -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \\ &\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

D'après la définition, $r(E) = B$.

Image de C. De même, $AF = AC$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $r(C) = F$.

Conclusion. $r(E) = B$ et $r(C) = F$.

2. 1,5 pts

En déduire que $BF = EC$, puis que les droites (EC) et (BF) sont sécantes.

CORRIGÉ

Les points E et C sont distincts. On a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, alors qu'une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ appartient à $]0, \pi[$: ces deux angles ne sont pas égaux modulo 2π, donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont différents et $E \neq C$.

Propriété caractéristique. On a $r(E) = B$ et $r(C) = F$, avec $E \neq C$. Donc $BF = EC$ et

$$(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BF}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Droites sécantes. Comme $\dfrac{\pi}{3}$ n'est pas nul modulo π, les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. $BF = EC$, et les droites (EC) et (BF) sont sécantes.

3. 1,5 pts

Soit I et J les milieux respectifs de $[EC]$ et $[BF]$; on suppose $I \neq A$. Montrer que $r(I) = J$, et en déduire la nature du triangle AIJ.

CORRIGÉ

Image de I. Une rotation conserve les milieux : comme $r(E) = B$ et $r(C) = F$, l'image du milieu I de $[EC]$ est le milieu J de $[BF]$, donc $r(I) = J$.

Nature du triangle. Par définition de r, $AJ = AI$ et $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, avec $I \neq A$. Le triangle AIJ est isocèle en A, d'angle au sommet $\dfrac{\pi}{3}$: ses deux autres angles mesurent aussi $\dfrac{\pi}{3}$.

Conclusion. $r(I) = J$, et le triangle AIJ est équilatéral, de sens direct.

4. 1,5 pts

Soit Δ la médiatrice de $[BE]$. Montrer que $r = S_{\Delta} \circ S_{(AE)}$.

INDICE

La droite Δ passe par A et partage l'angle $\widehat{EAB}$ en deux : quel angle fait-elle avec (AE) ?

CORRIGÉ

Une décomposition de r. Soit Δ_0 la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{v}$, où $(\overrightarrow{AE}, \vec{v}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$. Les droites (AE) et Δ_0 passent par A, et $2 \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. D'après le théorème de décomposition, $r = S_{\Delta_0} \circ S_{(AE)}$.

Identification de Δ_0. Le point E est sur l'axe (AE), donc $S_{(AE)}(E) = E$. Avec $r(E) = B$ (question 1), on obtient $S_{\Delta_0}(E) = B$, avec $E \neq B$. L'axe d'une symétrie qui échange deux points distincts est leur médiatrice : Δ_0 est la médiatrice de $[BE]$, c'est-à-dire Δ.

Conclusion. $r = S_{\Delta} \circ S_{(AE)}$.

5. 1,5 pts

Montrer que $\rho(F) = A$ et $\rho(B) = D$.

INDICE

Pour chaque point, les deux conditions de la définition se lisent dans l'introduction.

CORRIGÉ

Image de F. Le triangle ACF est équilatéral, donc $CA = CF$, et $(\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CA}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$: d'après la définition, $\rho(F) = A$.

Image de B. De même, $CD = CB$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $\rho(B) = D$.

Conclusion. $\rho(F) = A$ et $\rho(B) = D$.

6. 1 pts

En déduire que $AD = BF = CE$.

CORRIGÉ

D'après la question 5, $\rho(F) = A$ et $\rho(B) = D$. Une rotation conserve les distances, donc $AD = FB$.

D'après la question 2, $BF = EC$. Ainsi $AD = BF = EC$.

Conclusion. $AD = BF = CE$.

7. 1,5 pts

Soit $g = \rho \circ r$. Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle, et déterminer $g(E)$.

INDICE

Les centres A et C sont distincts : regarde la somme des angles.

CORRIGÉ

Nature de g. Les centres A et C sont distincts, et

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \not\equiv 0\ [2\pi].$$

D'après le théorème sur la composée de deux rotations de centres distincts, g est une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Image de E. D'après les questions 1 et 5, $g(E) = \rho(r(E)) = \rho(B) = D$.

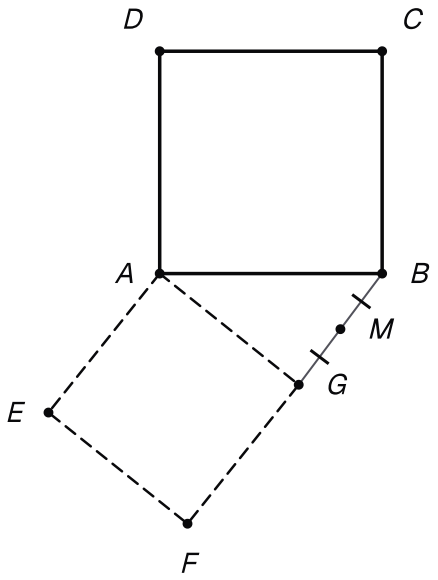
Conclusion. g est une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$, et $g(E) = D$.

Exercice 2 10 pts

Problème : Deux carrés de même sommet

Soit $ABCD$ et $AEFG$ deux carrés de même sommet A, tous deux de sens direct : $AD = AB$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $AG = AE$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On suppose que E est distinct de B et de D.

On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $B_1 = r(D)$ et M le milieu de $[BG]$.



Les carrés directs ABCD et AEFG, qui ont le sommet A en commun, et le milieu M de [BG].

1. 1,5 pts

Montrer que $r(B) = D$ et $r(E) = G$.

CORRIGÉ

Image de B. On a $AD = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$: d'après la définition, $r(B) = D$.

Image de E. De même, $AG = AE$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc $r(E) = G$.

Conclusion. $r(B) = D$ et $r(E) = G$.

2. 1,5 pts

En déduire que $DG = BE$ et que les droites (BE) et (DG) sont perpendiculaires.

CORRIGÉ

On a $r(B) = D$ et $r(E) = G$, avec $B \neq E$. D'après la propriété caractéristique, $DG = BE$ et

$$(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DG}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Conclusion. $DG = BE$, et les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DG}$ font un angle droit : les droites (BE) et (DG) sont perpendiculaires.

3. 1,5 pts

Montrer que $r \circ r$ est la symétrie centrale de centre A. En déduire que A est le milieu de $[BB_1]$.

INDICE

Compose deux rotations de même centre, puis écris B_1 comme une image de B.

CORRIGÉ

Composée. Les deux rotations ont le même centre A. D'après la composée de deux rotations de même centre :

$$\begin{aligned} r \circ r &= \mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \mathcal{R}(A, \pi). \end{aligned}$$

C'est la symétrie centrale de centre A.

Le point B_1. Comme $B_1 = r(D) = r(r(B))$, le point B_1 est le symétrique de B par rapport à A.

Conclusion. $r \circ r$ est la symétrie centrale de centre A, et A est le milieu de $[BB_1]$.

4. 1,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1G}$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$, puis utilise $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B_1A}$.

CORRIGÉ

Le point M est le milieu de $[BG]$, donc $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}\right)$. D'après la question 3, A est le milieu de $[BB_1]$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B_1A}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AG}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1G}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1G}$.

5. 1,5 pts

Montrer que $B_1G = DE$ et que $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{B_1G}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

CORRIGÉ

On a $r(D) = B_1$ et $r(E) = G$, avec $D \neq E$. D'après la propriété caractéristique d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, $B_1G = DE$ et

$$(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{B_1G}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Conclusion. $B_1G = DE$ et $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{B_1G}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

6. 1,5 pts

En déduire que $DE = 2AM$ et que la droite (AM) est perpendiculaire à la droite (DE).

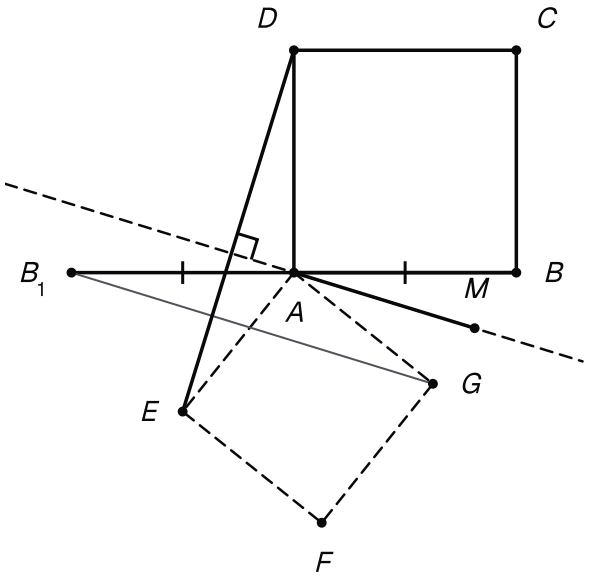
CORRIGÉ

Longueurs. D'après la question 4, $AM = \frac{1}{2}B_1G$, et $\overrightarrow{AM}$ a même sens que $\overrightarrow{B_1G}$. Avec la question 5, $AM = \frac{1}{2}DE$, soit $DE = 2AM$. En particulier $AM \neq 0$, car $D \neq E$.

Angle. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{B_1G}$ ont même sens, donc :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AM}) &\equiv (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{B_1G}) \\ &\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. $DE = 2AM$, et la droite (AM) est perpendiculaire à la droite (DE).



B1, symétrique de B par rapport à A, donne le vecteur B1G, double du vecteur AM : la droite (AM) est perpendiculaire à (DE).

7. 1 pts

Montrer que r est la seule rotation qui envoie B sur D et E sur G.

INDICE

Pense au théorème qui détermine une rotation par deux points et leurs images.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $B \neq E$, $DG = BE$ et $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DG}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, avec $\frac{\pi}{2} \not\equiv 0\ [2\pi]$. D'après le théorème de détermination d'une rotation par deux points et leurs images, une seule rotation envoie B sur D et E sur G.

La rotation r convient, d'après la question 1.

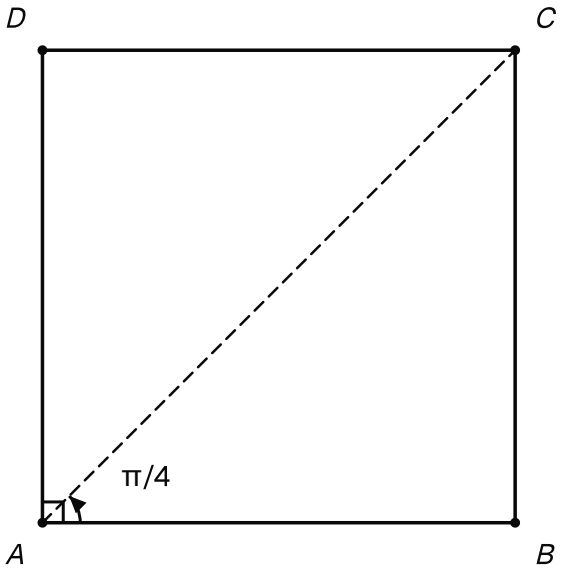
Conclusion. r est la seule rotation qui envoie B sur D et E sur G.

Exercice 3 — 10 pts

Problème : Deux quarts de tour dans un carré

Soit $ABCD$ un carré de sens direct : $AB = AD$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Sa diagonale vérifie $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

On note $r_1 = \mathcal{R}\left(A, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $r_2 = \mathcal{R}\left(C, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f = r_2 \circ r_1$ et $g = r_1 \circ r_2$.



Le carré direct ABCD, dont les sommets A et C sont les centres des deux quarts de tour, et l'angle orienté π/4 de AB vers AC.

1. — 1 pts

Montrer que $r_1(B) = D$ et $r_2(D) = B$.

CORRIGÉ

Image de B par r_1. On a $AD = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc $r_1(B) = D$.

Image de D par r_2. On a $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$, donc $CD = CB$. Changer les deux vecteurs en leurs opposés ne change pas l'angle :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \\ &\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

D'après la définition, $r_2(D) = B$.

Conclusion. $r_1(B) = D$ et $r_2(D) = B$.

2. 1 pts

Montrer que f est une rotation d'angle π.

CORRIGÉ

Les centres A et C sont distincts, et

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \not\equiv 0\ [2\pi].$$

Conclusion. D'après le théorème sur la composée de deux rotations de centres distincts, f est une rotation d'angle π.

3. 1,5 pts

Montrer que $r_1 = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.

INDICE

Les deux axes passent par A : double l'angle de leurs vecteurs directeurs, pris dans l'ordre d'application des symétries.

CORRIGÉ

Les droites (AB) et (AC) passent par A, de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. La symétrie $S_{(AB)}$ agit en premier.

D'après le théorème sur deux symétries d'axes sécants, la composée est la rotation de centre A d'angle $2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$:

$$S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = \mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{2}\right).$$

Conclusion. $r_1 = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.

4. 1,5 pts

Montrer que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, puis que $r_2 = S_{(BC)} \circ S_{(AC)}$.

CORRIGÉ

Calcul de l'angle. Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, la relation de Chasles donne :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) &\\ &\equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \\ &\quad + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \\ &\equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Décomposition de r_2. Les droites (AC) et (BC) passent par C, de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$, et $S_{(AC)}$ agit en premier. D'après le théorème sur deux symétries d'axes sécants, $S_{(BC)} \circ S_{(AC)} = \mathcal{R}\left(C, \frac{\pi}{2}\right)$.

Conclusion. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $r_2 = S_{(BC)} \circ S_{(AC)}$.

5. 1,5 pts

En déduire que f est la symétrie centrale de centre B.

CORRIGÉ

Simplification. D'après les questions 3 et 4, et comme $S_{(AC)} \circ S_{(AC)}$ est l'identité du plan :

$$\begin{aligned} f &= r_2 \circ r_1 \\ &= S_{(BC)} \circ S_{(AC)} \\ &\quad \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \\ &= S_{(BC)} \circ S_{(AB)}. \end{aligned}$$

Axes perpendiculaires. Les droites (AB) et (BC) se coupent en B, et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. D'après le théorème sur deux symétries d'axes sécants, $f = \mathcal{R}(B, \pi)$.

Conclusion. f est la symétrie centrale de centre B. On retrouve $f(B) = r_2(r_1(B)) = r_2(D) = B$.

6. 1,5 pts

Soit $A_2 = r_2(A)$. Montrer que B est le milieu de $[AA_2]$.

INDICE

Le centre A est fixe par r_1 : exprime A_2 à l'aide de f.

CORRIGÉ

Le point A est fixe par r_1, donc :

$$\begin{aligned} f(A) &= r_2(r_1(A)) \\ &= r_2(A) = A_2. \end{aligned}$$

D'après la question 5, f est la symétrie centrale de centre B : A_2 est le symétrique de A par rapport à B.

Conclusion. B est le milieu de $[AA_2]$.

7. 2 pts

Déterminer de même g. Les applications f et g sont-elles égales ?

INDICE

Décompose cette fois r_2 avec (AC) comme second axe, et r_1 avec (AC) comme premier axe ; les droites (CD) et (AD) apparaissent.

CORRIGÉ

Décomposition de r_2. Comme $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, on a $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Les droites (CD) et (AC) passent par C : $r_2 = S_{(AC)} \circ S_{(CD)}$.

Décomposition de r_1. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) &\equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \\ &\quad + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \\ &\equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Les droites (AC) et (AD) passent par A : $r_1 = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$.

Simplification. Comme $S_{(AC)} \circ S_{(AC)}$ est l'identité :

$$\begin{aligned}g &= r_1 \circ r_2 \\ &= S_{(AD)} \circ S_{(AC)} \\ &\quad \circ S_{(AC)} \circ S_{(CD)} \\ &= S_{(AD)} \circ S_{(CD)}.\end{aligned}$$

Nature de g. On a $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$: les droites (CD) et (AD) sont perpendiculaires en D. Donc $g = \mathcal{R}(D, \pi)$, la symétrie centrale de centre D.

Comparaison. Comme $B \neq D$, on a $f(B) = B$ alors que $g(B) \neq B$.

Conclusion. g est la symétrie centrale de centre D, et $f \neq g$: l'ordre de la composée compte.

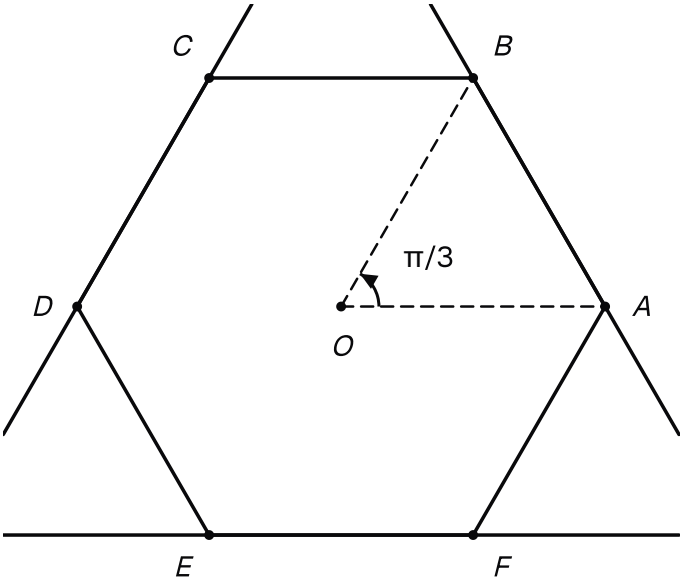
Exercice 4 10 pts

Problème : Trois côtés d'un hexagone régulier

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O, de sens direct : $OA = OB = OC = OD = OE = OF$ et

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &\equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \\ &\equiv (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \\ &\equiv (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}) \\ &\equiv (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) \\ &\equiv (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA}) \\ &\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et $\rho = r \circ r$.



L'hexagone régulier direct ABCDEF de centre O et les droites (AB), (CD) et (EF), portées par un côté sur deux.

1. 1 pts

Montrer que $r(A) = B, r(B) = C, r(C) = D, r(D) = E, r(E) = F$ et $r(F) = A$.

CORRIGÉ

Image de A. On a $OB = OA$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$: d'après la définition, $r(A) = B$.

Les autres sommets. Les cinq autres égalités s'obtiennent de la même façon avec les cinq autres angles de l'introduction. Par exemple, $OC = OB$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ donnent $r(B) = C$; $OA = OF$ et $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ donnent $r(F) = A$.

Conclusion. $r(A) = B, r(B) = C, r(C) = D, r(D) = E, r(E) = F$ et $r(F) = A$.

2. 1,5 pts

Montrer que ρ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. En déduire les images par ρ des droites (AB), (CD) et (EF).

INDICE

Calcule d'abord les images par ρ des six sommets à l'aide de la question 1.

CORRIGÉ

La rotation ρ. Les deux rotations composées ont le même centre O. D'après la composée de deux rotations de même centre :

$$\begin{aligned}\rho &= \mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \mathcal{R}\left(O, \frac{2\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Images des sommets. D'après la question 1 :

- $\rho(A) = r(B) = C$ et $\rho(B) = r(C) = D$;
- $\rho(C) = r(D) = E$ et $\rho(D) = r(E) = F$;
- $\rho(E) = r(F) = A$ et $\rho(F) = r(A) = B$.

Images des droites. L'image de la droite passant par deux points distincts est la droite passant par leurs images.

Conclusion. ρ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Les images par ρ des droites (AB), (CD) et (EF) sont respectivement (CD), (EF) et (AB).

3. 1,5 pts

Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont sécantes, puis qu'il en est de même des droites (CD) et (EF), et des droites (EF) et (AB).

CORRIGÉ

Angle de (AB) vers (CD). On a $\rho(A) = C$ et $\rho(B) = D$, avec $A \neq B$. D'après la propriété caractéristique :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

Comme $\frac{2\pi}{3}$ n'est pas nul modulo π, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires : les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Les deux autres paires. De même, $\rho(C) = E$ et $\rho(D) = F$ donnent $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, et $\rho(E) = A$ et $\rho(F) = B$ donnent $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Conclusion. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, et les droites (AB) et (CD) sont sécantes, ainsi que (CD) et (EF), et (EF) et (AB).

4. 1,5 pts

Soit K le point d'intersection des droites (AB) et (CD), L celui des droites (CD) et (EF), et M celui des droites (EF) et (AB). Montrer que $\rho(K) = L$, $\rho(L) = M$ et $\rho(M) = K$.

INDICE

Le point K appartient à deux droites : à quelles droites son image appartient-elle ?

CORRIGÉ

Image de K. Le point K appartient à (AB), donc $\rho(K)$ appartient à l'image de (AB), c'est-à-dire à (CD) (question 2). De même, K appartient à (CD), donc $\rho(K)$ appartient à (EF). Les droites (CD) et (EF) sont sécantes (question 3) : leur seul point commun est L, donc $\rho(K) = L$.

Image de L. Le point L appartient à (CD) et à (EF), donc $\rho(L)$ appartient à (EF) et à (AB) : $\rho(L) = M$.

Image de M. Le point M appartient à (EF) et à (AB), donc $\rho(M)$ appartient à (AB) et à (CD) : $\rho(M) = K$.

Conclusion. $\rho(K) = L$, $\rho(L) = M$ et $\rho(M) = K$.

5. 1,5 pts

En déduire que le triangle KLM est équilatéral et que $OK = OL = OM$. Montrer que la droite (OK) est perpendiculaire à la droite (LM).

CORRIGÉ

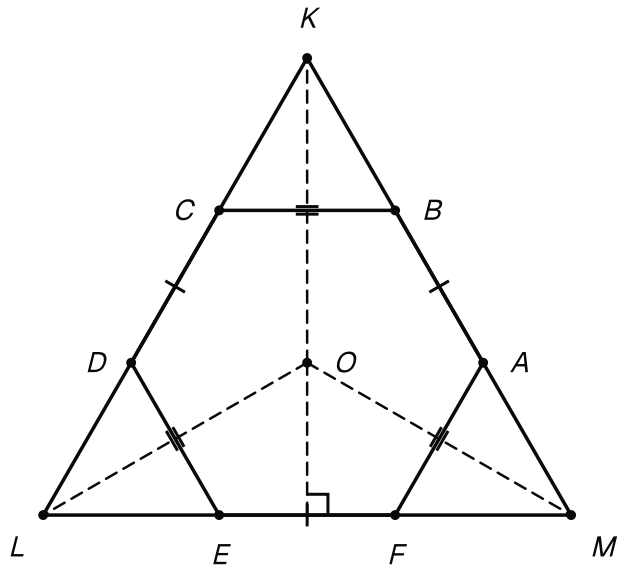
Le triangle n'est pas aplati. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires, car $\frac{\pi}{3}$ n'est pas nul modulo π : le point O n'appartient pas à la droite (AB), donc $K \neq O$. Comme O est le seul point invariant de ρ, on a $L = \rho(K) \neq K$.

Triangle équilatéral. Une rotation conserve les distances : $\rho(K) = L$ et $\rho(L) = M$ donnent $LM = KL$, puis $\rho(L) = M$ et $\rho(M) = K$ donnent $MK = LM$. Ainsi $KL = LM = MK$, avec $KL \neq 0$: le triangle KLM est équilatéral.

Distances au centre. Par définition de ρ, $OL = OK$ et $OM = OL$, donc $OK = OL = OM$.

Perpendicularité. On a $OL = OM$ et $KL = KM$: les points O et K, distincts, appartiennent tous deux à la médiatrice de $[LM]$. La droite (OK) est donc cette médiatrice.

Conclusion. Le triangle KLM est équilatéral, $OK = OL = OM$, et la droite (OK) est perpendiculaire à la droite (LM).



Les droites (AB), (CD) et (EF) forment le triangle équilatéral KLM, de centre O ; la droite (OK) coupe [LM] à angle droit.

6. 1,5 pts

Soit $K' = r(K)$. Montrer que K' est le point d'intersection des droites (BC) et (DE).

INDICE

Détermine les images par r des droites (AB) et (CD), puis raisonne comme à la question 4.

CORRIGÉ

Images des droites par r. D'après la question 1, $r(A) = B, r(B) = C, r(C) = D$ et $r(D) = E$: l'image de la droite (AB) par r est (BC), et celle de (CD) est (DE). Le point K appartient à (AB) et à (CD), donc K' appartient à (BC) et à (DE).

Droites sécantes. De plus, $\rho(B) = D$ et $\rho(C) = E$ donnent, d'après la propriété caractéristique, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DE}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. Cet angle n'est pas nul modulo π : les droites (BC) et (DE) sont sécantes, et leur seul point commun est K'.

Conclusion. $K' = r(K)$ est le point d'intersection des droites (BC) et (DE).

7. 1,5 pts

Montrer que $r \circ \rho$ est la symétrie centrale de centre O. En déduire que le point d'intersection des droites (DE) et (FA) est le symétrique de K par rapport à O.

CORRIGÉ

La composée. Les rotations r et ρ ont le même centre O :

$$\begin{aligned} r \circ \rho &= \mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \mathcal{R}(O, \pi). \end{aligned}$$

C'est la symétrie centrale de centre O.

Le point $L' = r(L)$. Le point L appartient à (CD) et à (EF). Comme $r(C) = D, r(D) = E, r(E) = F$ et $r(F) = A$, les images de ces droites par r sont (DE) et (FA) : donc L' appartient à (DE) et à (FA).

Ces deux droites sont sécantes, car $\rho(D) = F$ et $\rho(E) = A$ donnent $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{FA}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. Ainsi L' est le point d'intersection des droites (DE) et (FA).

Lien avec K. D'après la question 4, $L = \rho(K)$, donc $L' = r(\rho(K)) = (r \circ \rho)(K)$.

Conclusion. $r \circ \rho$ est la symétrie centrale de centre O, et le point d'intersection des droites (DE) et (FA) est le symétrique de K par rapport à O.

Exercice 5 10 pts

Problème : Deux rotations d'angles opposés

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct : $AB = BC = CA$ et

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &\equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\ &\equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ &\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On note $r_1 = \mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$, $r_2 = \mathcal{R}\left(C, -\frac{\pi}{3}\right)$ et $t = r_2 \circ r_1$.

1. 1 pts

Montrer que $r_1(B) = C$ et $r_2(B) = A$.

CORRIGÉ

Image de B par r_1. On a $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$: d'après la définition, $r_1(B) = C$.

Image de B par r_2. On a $CA = CB$ et, en échangeant les deux vecteurs :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) &\equiv -(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ &\equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

D'après la définition, $r_2(B) = A$.

Conclusion. $r_1(B) = C$ et $r_2(B) = A$.

2. 1,5 pts

Montrer que t est une translation et que $t(B) = C$. En déduire le vecteur de t.

INDICE

Les centres sont distincts : additionne les angles. Une translation est connue dès que l'on connaît l'image d'un point.

CORRIGÉ

Nature de t. Les centres A et C sont distincts, et $\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$. D'après le théorème sur la composée de deux rotations de centres distincts, t est une translation.

Image de B. Le centre C est fixe par r_2, donc, d'après la question 1 :

$$\begin{aligned}t(B) &= r_2(r_1(B)) \\ &= r_2(C) = C.\end{aligned}$$

Conclusion. t est une translation qui envoie B sur C : c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

3. 1,5 pts

Soit $D = r_2(A)$. Montrer que $t(A) = D$. En déduire que $ABCD$ est un parallélogramme, puis que c'est un losange.

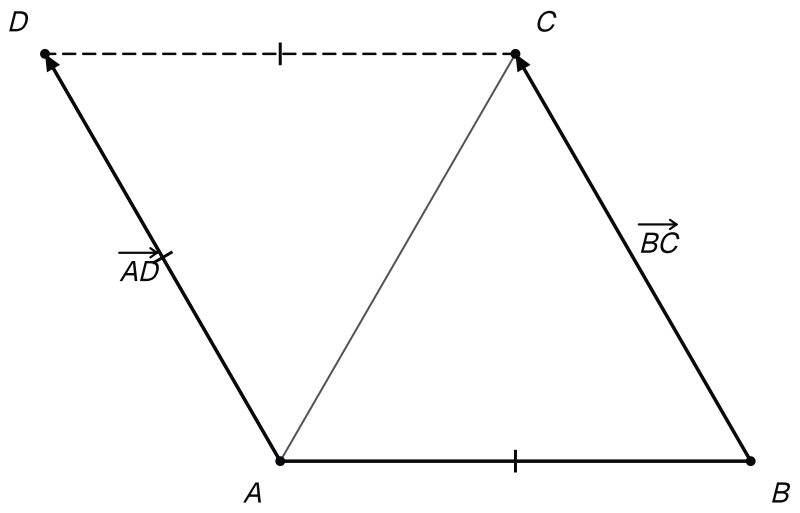
CORRIGÉ

Image de A. Le centre A est fixe par r_1, donc $t(A) = r_2(r_1(A)) = r_2(A) = D$.

Parallélogramme. D'après la question 2, t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, non aplati car A, B et C ne sont pas alignés.

Losange. Ses côtés consécutifs $[AB]$ et $[BC]$ ont même longueur, car le triangle ABC est équilatéral.

Conclusion. $t(A) = D$, et $ABCD$ est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont égaux : c'est un losange.



La translation t envoie B sur C et A sur D : le vecteur AD égale le vecteur BC, et ABCD est un losange.

4. 1,5 pts

Soit M un point du plan, distinct de A et de B, $M_1 = r_1(M)$ et $M_2 = r_2(M_1)$. Montrer que les triangles AMM_1 et CM_1M_2 sont équilatéraux, et préciser le sens de chacun. À l'aide de la question 2, montrer que $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{BC}$.

CORRIGÉ

Le triangle AMM_1. Comme $M \neq A$, on a $AM_1 = AM \neq 0$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM_1}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Le triangle AMM_1 est isocèle en A, d'angle au sommet $\dfrac{\pi}{3}$: il est équilatéral, de sens direct.

Le triangle CM_1M_2. Comme $M \neq B$ et $r_1(B) = C$, on a $M_1 \neq C$, car une rotation est une bijection. Alors $CM_2 = CM_1 \neq 0$ et $(\overrightarrow{CM_1}, \overrightarrow{CM_2}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Le triangle CM_1M_2 est isocèle en C et son angle géométrique $\widehat{M_1CM_2}$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$: il est équilatéral, de sens indirect.

Le vecteur $\overrightarrow{MM_2}$. On a $M_2 = r_2(r_1(M)) = t(M)$, et t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ (question 2).

Conclusion. AMM_1 est équilatéral direct, CM_1M_2 est équilatéral indirect, et $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{BC}$.

5. 1,5 pts

Soit Γ le cercle de centre B et de rayon AB. Déterminer son image Γ_1 par r_1, puis son image Γ' par t. Montrer que Γ' passe par A, B et D.

INDICE

Cherche l'image du centre de chaque cercle ; le rayon ne change pas.

CORRIGÉ

Image par r_1. L'image d'un cercle par une rotation est le cercle de même rayon dont le centre est l'image du centre. Comme $r_1(B) = C$, le cercle Γ_1 est le cercle de centre C et de rayon AB.

Image par t. Comme $r_2(C) = C$, l'image de Γ_1 par r_2 est le cercle de centre C et de même rayon, c'est-à-dire Γ_1 lui-même. Donc $\Gamma' = r_2(\Gamma_1) = \Gamma_1$.

Trois points. On a $CA = AB$ et $CB = AB$, car le triangle ABC est équilatéral, et $CD = CA = AB$ par définition de $D = r_2(A)$.

Conclusion. Γ_1 et Γ' sont tous deux le cercle de centre C et de rayon AB, et ce cercle passe par A, B et D.

6. 1,5 pts

Soit E le point tel que $t(E) = A$. Montrer que $r_1(E) = B$. En déduire que le triangle ABE est équilatéral, et préciser son sens.

INDICE

Écris $r_2(r_1(E)) = A$: quel point a pour image A par r_2 ?

CORRIGÉ

Image de E par r_1. On a $r_2(r_1(E)) = t(E) = A$. D'après la question 1, $r_2(B) = A$; une rotation étant une bijection, B est le seul point dont l'image par r_2 est A. Donc $r_1(E) = B$.

Le triangle ABE. D'après le théorème sur la réciproque, E est l'image de B par $r_1^{-1} = \mathcal{R}\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)$: $AE = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, avec $B \neq A$. Le triangle ABE est isocèle en A et son angle géométrique $\widehat{BAE}$ mesure $\frac{\pi}{3}$.

Conclusion. $r_1(E) = B$, et le triangle ABE est équilatéral, de sens indirect.

7. 1,5 pts

Montrer que A est le milieu de $[ED]$. Existe-t-il une rotation qui envoie E sur A et A sur D ?

INDICE

Si une telle rotation existe, compare son angle à une mesure de $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{AD})$.

CORRIGÉ

Le milieu. D'après la question 2, t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Comme $t(E) = A$, on a $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BC}$; comme $t(A) = D$ (question 3), on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Donc $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AD}$: le point A est le milieu de $[ED]$.

Aucune rotation. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'une rotation f, d'angle θ, envoie E sur A et A sur D. Comme $E \neq A$, la propriété caractéristique donne $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{AD}) \equiv \theta\ [2\pi]$. Or $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EA}$, donc $\theta \equiv 0\ [2\pi]$: f est l'identité du plan. Mais l'identité envoie E sur E, et $E \neq A$: c'est une contradiction.

Conclusion. A est le milieu de $[ED]$, et aucune rotation n'envoie E sur A et A sur D ; la translation t, elle, le fait.