BURHAN

La rotation dans le plan : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/rotation-dans-le-plan/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
La rotation dans le plan	Entraînement	7

Exercice 1

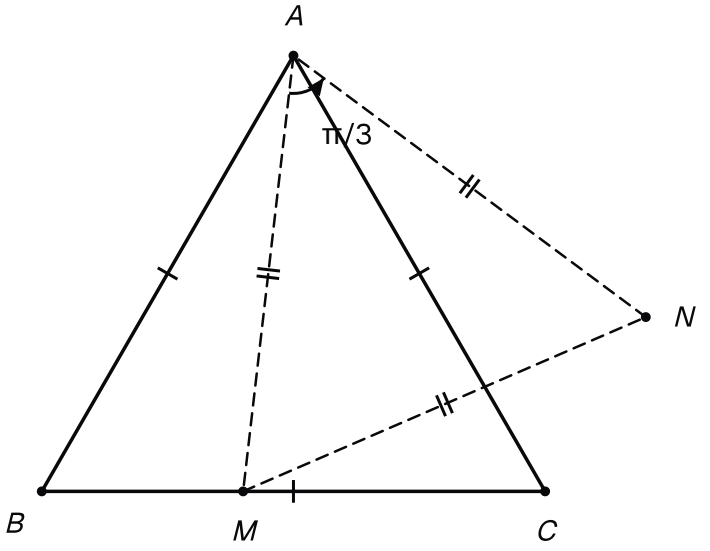
Un triangle équilatéral qui glisse

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &\equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\ &\equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ &\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Soit M un point du segment $[BC]$, distinct de B, et N le point tel que $AN = AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$: le triangle AMN est équilatéral direct.

On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



Le triangle équilatéral direct ABC, un point M de [BC] et le point N qui rend le triangle AMN équilatéral direct.

1.

Montrer que $r(B) = C$ et $r(M) = N$.

INDICE

Pour chaque point, vérifie les deux conditions de la définition avec le centre A.

2.

En déduire que $CN = BM$ et que $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

INDICE

Les points C et N sont les images de B et M.

3.

Montrer que la droite (CN) est parallèle à la droite (AB).

INDICE

Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont même sens. Calcule ensuite $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ en passant par $\overrightarrow{BA}$.

4.

Lorsque M décrit le segment $[BC]$ privé de B, quel ensemble le point N décrit-il ?

INDICE

Le point N est l'image de M : cherche l'image du segment $[BC]$.

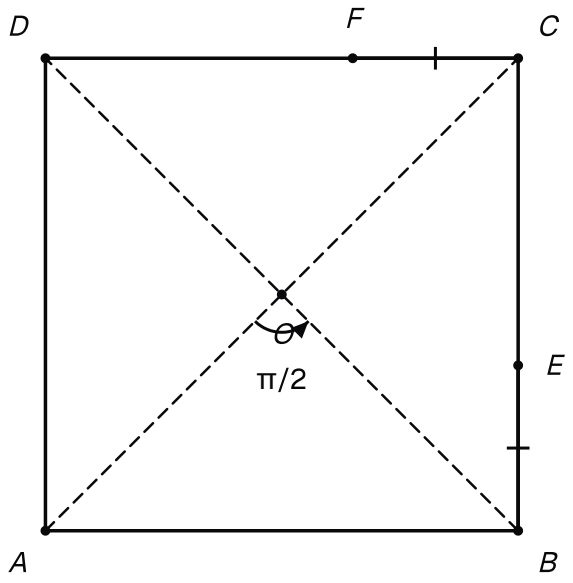
Exercice 2

Deux segments perpendiculaires dans un carré

Soit $ABCD$ un carré de centre O, de sens direct : $OA = OB = OC = OD$ et

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &\equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \\ &\equiv (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \\ &\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Soit E un point du segment $[BC]$, distinct de C, et F le point du segment $[CD]$ tel que $CF = BE$. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Le carré direct ABCD de centre O, avec E sur [BC] et F sur [CD] tels que CF = BE.

1.

Montrer que $r(A) = B$, $r(B) = C$ et $r(C) = D$. En déduire l'image du segment $[BC]$.

INDICE

Les trois égalités d'angles de l'introduction donnent les trois images.

2.

Montrer que $r(E) = F$.

INDICE

L'image E' de E est sur $[CD]$. Compare CE' et BE par la conservation des distances.

3.

En déduire que $BF = AE$ et que les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires.

INDICE

Utilise la propriété caractéristique avec $r(A) = B$ et $r(E) = F$.

4.

Soit I et J les milieux respectifs de $[AE]$ et $[BF]$. Montrer que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.

INDICE

Une rotation conserve les milieux : quelle est l'image de I ? Vérifie aussi que I n'est pas le point O.

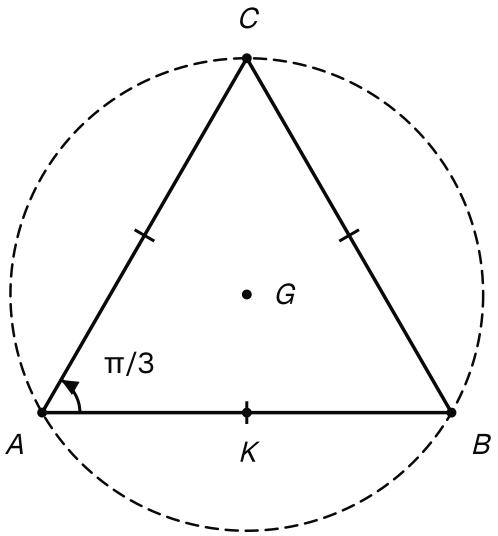
Exercice 3

Retrouver une rotation

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &\equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\ &\equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ &\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On note G le centre de son cercle circonscrit et K le milieu de $[AB]$.



Le triangle équilatéral direct ABC, son cercle circonscrit de centre G et le milieu K de [AB].

1.

Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

INDICE

Insère $\overrightarrow{BA}$ par la relation de Chasles.

2.

Montrer qu'il existe une unique rotation ρ qui envoie A sur B et B sur C. Préciser son angle et son centre.

INDICE

Vérifie l'égalité des longueurs, lis l'angle, puis cherche le centre sur deux médiatrices.

3.

Montrer que $\rho(C) = A$, puis déterminer $\rho(K)$.

INDICE

Remarque que $C = \rho(\rho(A))$, puis calcule $\rho \circ \rho \circ \rho$ avec la composée de rotations de même centre. Pour K, pense aux milieux.

4.

Existe-t-il une rotation qui envoie A sur K et B sur C ? Une rotation qui envoie A sur A et B sur C ?

INDICE

Une rotation conserve les distances. Pour le second cas, lis l'angle en A.

Exercice 4

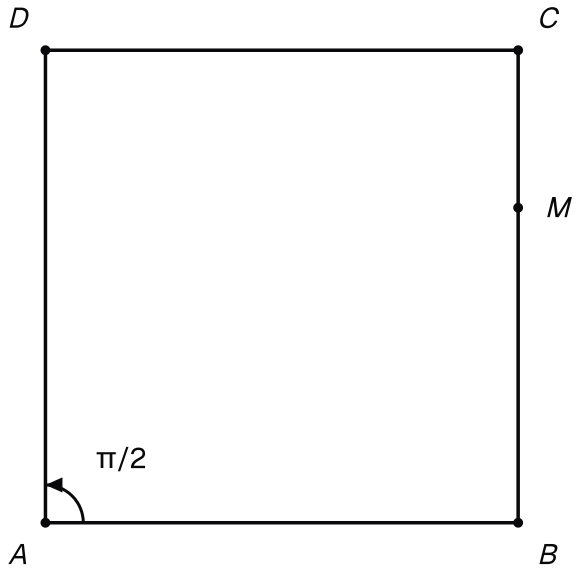
Un quart de tour autour d'un sommet

Soit $ABCD$ un carré de sens direct : $AB = AD$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $C' = r(C)$,

$$M = \mathrm{Bar}\{(B, 1), (C, 2)\}$$

et $M' = r(M)$.



Le carré direct ABCD et le point M de [BC] tel que BM soit les deux tiers de BC.

1.

Montrer que $r(B) = D$, puis que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

INDICE

Pour l'angle, remplace chaque vecteur par un vecteur égal d'origine A.

2.

Montrer que D est le milieu de $[CC']$.

INDICE

Applique la propriété caractéristique à B et C, puis compare les vecteurs $\overrightarrow{DC'}$ et $\overrightarrow{DC}$.

3.

Montrer que $M' = \mathrm{Bar}\{(D, 1), (C', 2)\}$. En déduire que les points C, D et M' sont alignés.

INDICE

Une rotation conserve le barycentre. D'après la question 2, que dire de la droite (DC') ?

4.

On suppose $AB = 3$. Calculer AM, puis MM'.

INDICE

Le triangle ABM est rectangle en B. Pour MM', étudie le triangle AMM'.

Exercice 5

Deux rotations de centres distincts

Soit A et B deux points distincts, $r_1 = \mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$, $r_2 = \mathcal{R}\left(B, \frac{\pi}{3}\right)$ et $f = r_2 \circ r_1$. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

1.

Montrer que f est une rotation, et donner son angle.

INDICE

Les centres sont distincts : regarde la somme des angles modulo 2π.

2.

Soit Δ_1 la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}_1$, où $(\vec{u}_1, \vec{u}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, et Δ_2 la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{u}_2$, où $(\vec{u}, \vec{u}_2) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Montrer que $r_1 = S_{(AB)} \circ S_{\Delta_1}$ et $r_2 = S_{\Delta_2} \circ S_{(AB)}$.

INDICE

Applique deux fois le théorème de décomposition, en repérant la symétrie qui agit en premier.

3.

En déduire que $f = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$, puis que Δ_1 et Δ_2 se coupent en un point Ω, centre de f.

INDICE

Une symétrie axiale composée avec elle-même est l'identité. Calcule ensuite $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

4.

Soit C le point tel que $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$; le triangle ABC est équilatéral direct, et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Montrer que $f(B) = A$. En déduire que $\Omega A = \Omega B$, et donner une mesure de $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A})$.

INDICE

Calcule $r_1(B)$, puis l'image de ce point par r_2.

Exercice 6

Quand la somme des angles est nulle

Soit A et B deux points distincts, $r_1 = \mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$, $r_2 = \mathcal{R}\left(B, -\frac{\pi}{2}\right)$ et $g = r_2 \circ r_1$. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

1.

Quelle est la nature de g ?

INDICE

Calcule la somme des angles.

2.

On considère la droite Δ_1 passant par A et dirigée par $\vec{u}_1$, avec $(\vec{u}_1, \vec{u}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, et la droite Δ_2 passant par B et dirigée par $\vec{u}_2$, avec $(\vec{u}, \vec{u}_2) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Montrer que $g = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$ et que Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

INDICE

Décompose chaque rotation avec (AB) comme axe commun, puis calcule $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

3.

Soit $A_1 = r_2(A)$. Montrer que $g(A) = A_1$, et en déduire que g est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA_1}$. Exprimer la longueur AA_1 en fonction de AB.

INDICE

Le point A est fixe par r_1. Le triangle ABA_1 a deux côtés égaux et un angle droit en B.

4.

Soit H' le point d'intersection de Δ_2 avec la perpendiculaire à Δ_1 passant par A. Montrer que H' est le milieu de $[AA_1]$.

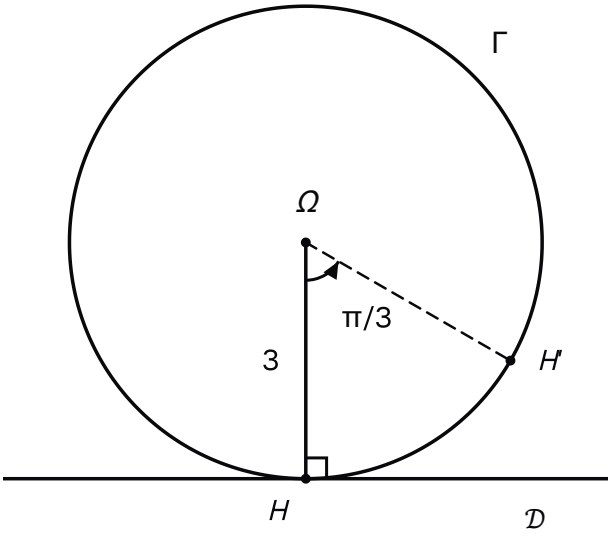
INDICE

Applique le théorème sur la composée de deux symétries d'axes parallèles, avec le point A de Δ_1.

Exercice 7

Deux tangentes qui se coupent

Soit Ω un point, $\mathcal{D}$ une droite et H le pied de la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par Ω, avec $\Omega H = 3$. Soit $r = \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)$, $H' = r(H)$ et $\mathcal{D}'$ l'image de $\mathcal{D}$ par r. On note Γ le cercle de centre Ω et de rayon 3.



Le cercle Γ de centre Ω et de rayon 3, la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire en H au rayon [ΩH], et le point H', image de H par la rotation de centre Ω et d'angle π/3.

1.

Montrer que $\mathcal{D}'$ est la droite passant par H' et perpendiculaire à $(\Omega H')$.

INDICE

Le centre Ω est fixe, et une rotation conserve l'orthogonalité.

2.

Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont tangentes au cercle Γ, respectivement en H et en H'.

INDICE

Une droite est tangente à un cercle en un point du cercle lorsqu'elle y est perpendiculaire au rayon.

3.

Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en un point K.

INDICE

Lis l'angle entre une droite et son image.

4.

Montrer que $KH = KH'$ et que Ω et K sont sur la médiatrice de $[HH']$.

INDICE

Les triangles ΩHK et $\Omega H'K$ sont rectangles et ont la même hypoténuse.

5.

Calculer ΩK et KH.

INDICE

La droite (ΩK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{H\Omega H'}$: l'angle $\widehat{H\Omega K}$ mesure $\frac{\pi}{6}$. Utilise le cosinus et la tangente dans le triangle ΩHK.