BURHAN

La rotation dans le plan : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/rotation-dans-le-plan/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
La rotation dans le plan	Entraînement	7

Exercice 1

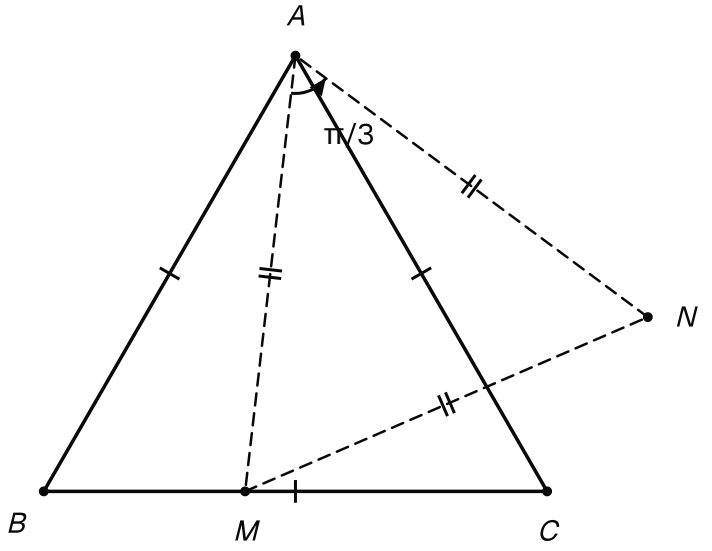
Un triangle équilatéral qui glisse

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &\equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\ &\equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ &\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Soit M un point du segment $[BC]$, distinct de B, et N le point tel que $AN = AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$: le triangle AMN est équilatéral direct.

On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



Le triangle équilatéral direct ABC, un point M de [BC] et le point N qui rend le triangle AMN équilatéral direct.

1.

Montrer que $r(B) = C$ et $r(M) = N$.

INDICE

Pour chaque point, vérifie les deux conditions de la définition avec le centre A.

CORRIGÉ

Image de B. On a $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$: ce sont les deux conditions de la définition de r, donc $r(B) = C$.

Image de M. De même, $AN = AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $r(M) = N$.

Conclusion. $r(B) = C$ et $r(M) = N$.

2.

En déduire que $CN = BM$ et que $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

INDICE

Les points C et N sont les images de B et M.

CORRIGÉ

D'après la question 1, C et N sont les images de B et M par r, avec $B \neq M$. La propriété caractéristique d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ donne alors $CN = BM$ et

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Conclusion. $CN = BM$ et $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

3.

Montrer que la droite (CN) est parallèle à la droite (AB).

INDICE

Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont même sens. Calcule ensuite $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ en passant par $\overrightarrow{BA}$.

CORRIGÉ

Angle de $\overrightarrow{BC}$ vers $\overrightarrow{CN}$. Le point M est sur $[BC]$ et distinct de B : $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de même sens. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CN}) &\equiv (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}) \\ &\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Angle de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{BC}$. On a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) \equiv \pi\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv -(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \\ &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) \\ &\quad + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \\ &\equiv \pi - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Angle de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{CN}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CN}) \\ &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \\ &\quad + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CN}) \\ &\equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \equiv \pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $CN = BM \neq 0$, la droite (CN) est bien définie. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN}$ font un angle de mesure π : ils sont colinéaires, donc la droite (CN) est parallèle à la droite (AB).

4.

Lorsque M décrit le segment $[BC]$ privé de B, quel ensemble le point N décrit-il ?

INDICE

Le point N est l'image de M : cherche l'image du segment $[BC]$.

CORRIGÉ

Le point N est une image. D'après la question 1, $N = r(M)$: le point N décrit l'image par r du segment $[BC]$ privé de B.

Image du segment $[BC]$. Soit $D = r(C)$: $AD = AC$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Comme $r(B) = C$, l'image du segment $[BC]$ est le segment $[CD]$.

On retire B. Une rotation est bijective : chaque point de $[CD]$ distinct de C est l'image d'un unique point de $[BC]$, et ce point est distinct de B, puisque $r(B) = C$.

Conclusion. Lorsque M décrit $[BC]$ privé de B, le point N décrit le segment $[CD]$ privé de C, où D est l'image de C par r.

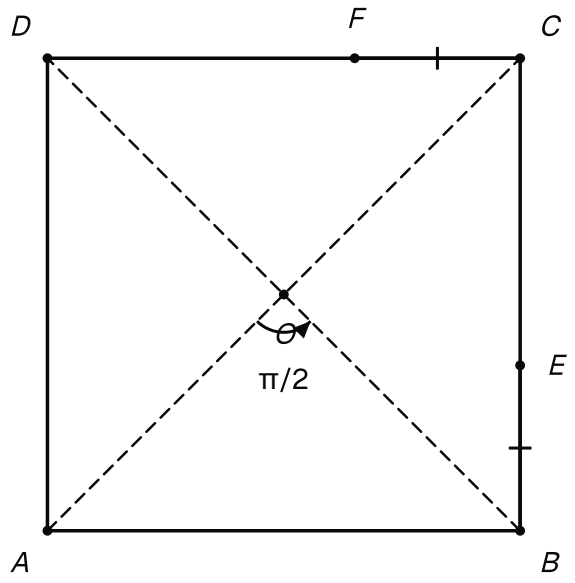
Exercice 2

Deux segments perpendiculaires dans un carré

Soit $ABCD$ un carré de centre O, de sens direct : $OA = OB = OC = OD$ et

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &\equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \\ &\equiv (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \\ &\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Soit E un point du segment $[BC]$, distinct de C, et F le point du segment $[CD]$ tel que $CF = BE$. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Le carré direct ABCD de centre O, avec E sur [BC] et F sur [CD] tels que CF = BE.

1.

Montrer que $r(A) = B$, $r(B) = C$ et $r(C) = D$. En déduire l'image du segment $[BC]$.

INDICE

Les trois égalités d'angles de l'introduction donnent les trois images.

CORRIGÉ

Images des sommets. Pour chaque point, les deux conditions de la définition sont dans l'introduction. Par exemple, $OB = OA$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc $r(A) = B$. De même, $OC = OB$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donnent $r(B) = C$, et $OD = OC$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donnent $r(C) = D$.

Image du segment. L'image du segment $[BC]$ est le segment qui joint $r(B)$ et $r(C)$.

Conclusion. $r(A) = B, r(B) = C, r(C) = D$, et l'image du segment $[BC]$ est le segment $[CD]$.

2.

Montrer que $r(E) = F$.

INDICE

L'image E' de E est sur $[CD]$. Compare CE' et BE par la conservation des distances.

CORRIGÉ

Où se trouve l'image de E. Soit $E' = r(E)$. Comme $E \in [BC]$, la question 1 donne $E' \in [CD]$.

Distance à C. Une rotation conserve les distances : comme $r(B) = C$ et $r(E) = E'$, on a $CE' = BE$.

Identification. Or $BE \leq BC = CD$, et F est le seul point de $[CD]$ situé à la distance BE de C. Donc $E' = F$.

Conclusion. $r(E) = F$.

3.

En déduire que $BF = AE$ et que les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires.

INDICE

Utilise la propriété caractéristique avec $r(A) = B$ et $r(E) = F$.

CORRIGÉ

On a $r(A) = B$ et $r(E) = F$, avec $A \neq E$. D'après la propriété caractéristique d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, $BF = AE$ et

$$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Conclusion. $BF = AE$, et les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BF}$ font un angle droit : les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires.

4.

Soit I et J les milieux respectifs de $[AE]$ et $[BF]$. Montrer que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.

INDICE

Une rotation conserve les milieux : quelle est l'image de I ? Vérifie aussi que I n'est pas le point O.

CORRIGÉ

Image de I. Une rotation conserve les milieux. Comme $r(A) = B$ et $r(E) = F$, l'image du milieu I de $[AE]$ est le milieu J de $[BF]$: $r(I) = J$.

Le point I n'est pas le centre. Comme $E \neq C$, le milieu I de $[AE]$ n'est pas le milieu O de $[AC]$: $I \neq O$.

Le triangle. Par définition de r, $OJ = OI \neq 0$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Conclusion. Le triangle OIJ a deux côtés égaux issus de O qui forment un angle droit : il est rectangle isocèle en O.

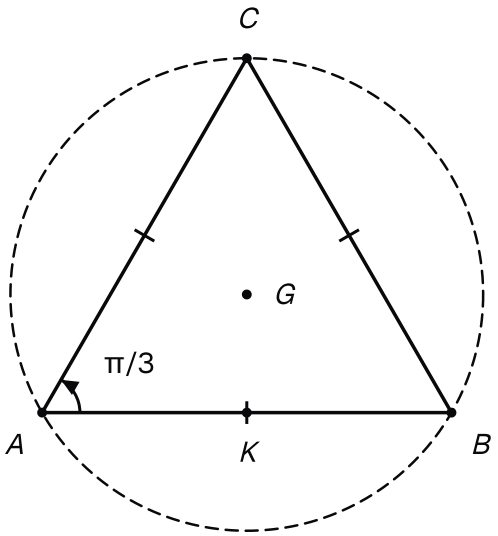
Exercice 3

Retrouver une rotation

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &\equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\ &\equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ &\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On note G le centre de son cercle circonscrit et K le milieu de $[AB]$.



Le triangle équilatéral direct ABC, son cercle circonscrit de centre G et le milieu K de [AB].

1.

Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

INDICE

Insère $\overrightarrow{BA}$ par la relation de Chasles.

CORRIGÉ

On a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) \equiv \pi\ [2\pi]$, et, en échangeant les vecteurs de l'introduction, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \\ &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) \\ &\quad + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \\ &\equiv \pi - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

2.

Montrer qu'il existe une unique rotation ρ qui envoie A sur B et B sur C. Préciser son angle et son centre.

INDICE

Vérifie l'égalité des longueurs, lis l'angle, puis cherche le centre sur deux médiatrices.

CORRIGÉ

Existence et unicité. On a $BC = AB$, avec $A \neq B$, et, d'après la question 1, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, avec $\dfrac{2\pi}{3} \not\equiv 0\ [2\pi]$. D'après le théorème de détermination d'une rotation par deux points et leurs images, une unique rotation ρ vérifie $\rho(A) = B$ et $\rho(B) = C$, et son angle est $\dfrac{2\pi}{3}$.

Centre. Le centre Ω de ρ vérifie $\Omega A = \Omega B$ et $\Omega B = \Omega C$: il est sur les médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$. Ces deux droites se coupent en un seul point, le centre G du cercle circonscrit. Donc $\Omega = G$.

Conclusion. Une seule rotation envoie A sur B et B sur C : c'est $\rho = \mathcal{R}\left(G, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, de centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

3.

Montrer que $\rho(C) = A$, puis déterminer $\rho(K)$.

INDICE

Remarque que $C = \rho(\rho(A))$, puis calcule $\rho \circ \rho \circ \rho$ avec la composée de rotations de même centre. Pour K, pense aux milieux.

CORRIGÉ

Image de C. Soit $C' = \rho(C)$. D'après la propriété caractéristique, appliquée à B et C : $CC' = BC$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Or $CA = BC$ et, par la relation de Chasles, avec $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) &\equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}) \\ &\quad + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \\ &\equiv \pi - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Un seul point P vérifie $CP = BC$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CP}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$: donc $C' = A$.

Variante. On a $C = \rho(\rho(A))$. Les trois rotations ont le même centre G, donc $\rho \circ \rho \circ \rho = \mathcal{R}(G, 2\pi)$, qui est l'identité. Ainsi $\rho(C) = \rho(\rho(\rho(A))) = A$.

Image de K. Le point K est le milieu de $[AB]$, et une rotation conserve les milieux : $\rho(K)$ est le milieu de $[\rho(A)\rho(B)] = [BC]$.

Conclusion. $\rho(C) = A$, et $\rho(K)$ est le milieu de $[BC]$.

4.

Existe-t-il une rotation qui envoie A sur K et B sur C ? Une rotation qui envoie A sur A et B sur C ?

INDICE

Une rotation conserve les distances. Pour le second cas, lis l'angle en A.

CORRIGÉ

Premier cas. Une rotation conserve les distances : une rotation qui envoie A sur K et B sur C vérifierait $KC = AB$. Or la médiane $[CK]$ du triangle équilatéral est aussi une hauteur : le triangle AKC est rectangle en K, d'hypoténuse $[AC]$, donc $KC < AC = AB$. Aucune rotation ne convient.

Second cas. On a $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$: la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ fixe A et envoie B sur C. D'après le théorème de détermination, c'est la seule.

Conclusion. Aucune rotation n'envoie A sur K et B sur C. Une seule rotation envoie A sur A et B sur C : la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 4

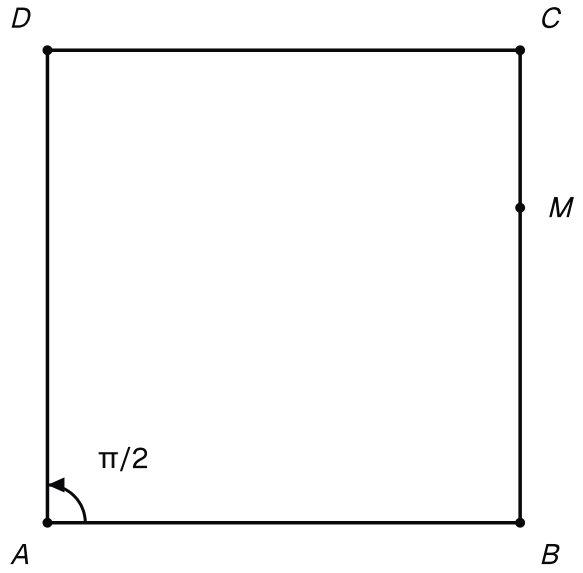
Un quart de tour autour d'un sommet

Soit $ABCD$ un carré de sens direct : $AB = AD$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $C' = r(C)$,

$$M = \mathrm{Bar}\{(B,1),(C,2)\}$$

et $M' = r(M)$.



Le carré direct ABCD et le point M de [BC] tel que BM soit les deux tiers de BC.

1.

Montrer que $r(B) = D$, puis que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

INDICE

Pour l'angle, remplace chaque vecteur par un vecteur égal d'origine A.

CORRIGÉ

Image de B. On a $AD = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$: d'après la définition, $r(B) = D$.

Angle. Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, on remplace chaque vecteur par un vecteur égal d'origine A :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}) &\equiv (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \\ &\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. $r(B) = D$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

2.

Montrer que D est le milieu de $[CC']$.

INDICE

Applique la propriété caractéristique à B et C, puis compare les vecteurs $\overrightarrow{DC'}$ et $\overrightarrow{DC}$.

CORRIGÉ

Propriété caractéristique. On a $r(B) = D$ et $r(C) = C'$, avec $B \neq C$. Donc $DC' = BC$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC'}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Angle en D. D'après la question 1, $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DC'}) &\equiv (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}) \\ &\quad + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC'}) \\ &\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv \pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Longueurs. De plus $DC' = BC = DC$.

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{DC'}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même longueur et des sens contraires : ils sont opposés, donc D est le milieu de $[CC']$.

3.

Montrer que $M' = \mathrm{Bar}\{(D,1),(C',2)\}$. En déduire que les points C, D et M' sont alignés.

INDICE

Une rotation conserve le barycentre. D'après la question 2, que dire de la droite (DC') ?

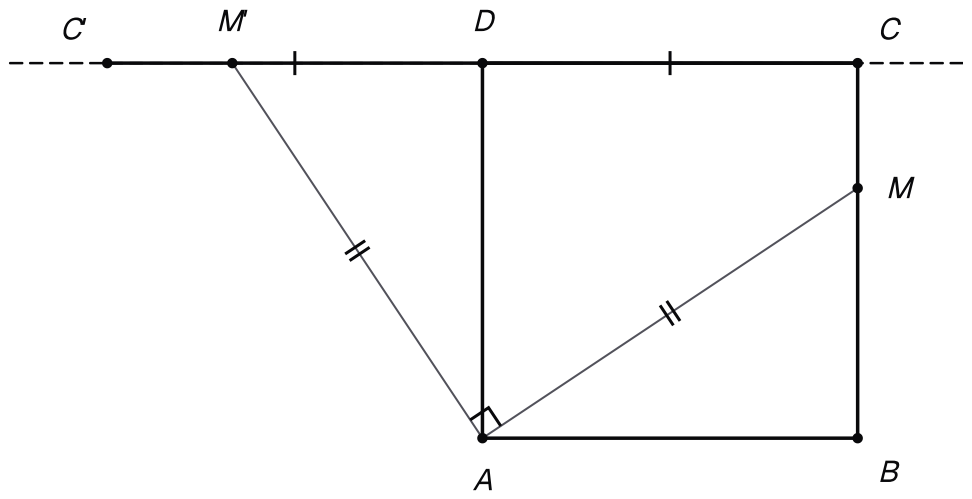
CORRIGÉ

Image du barycentre. Une rotation conserve le barycentre. Comme $r(B) = D$ et $r(C) = C'$:

$$M' = \mathrm{Bar}\{(D,1),(C',2)\}.$$

Alignement. Le point M' est donc sur la droite (DC'). D'après la question 2, D est le milieu de $[CC']$: cette droite passe par C, c'est la droite (CD).

Conclusion. $M' = \mathrm{Bar}\{(D,1),(C',2)\}$, et les points C, D et M' sont alignés.



Le quart de tour de centre A envoie C en C' et M en M' : D est le milieu de [CC'], et M' est sur la droite (CD).

4.

On suppose $AB = 3$. Calculer AM, puis MM'.

INDICE

Le triangle ABM est rectangle en B. Pour MM', étudie le triangle AMM'.

CORRIGÉ

Calcul de AM. Le point M est le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 2)$, donc $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$: $M \in [BC]$ et $BM = 2$. Le triangle ABM est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore :

$$AM = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Calcul de MM'. Par définition de M', $AM' = AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$: le triangle AMM' est rectangle isocèle en A. Son hypoténuse mesure donc :

$$MM' = AM\sqrt{2} = \sqrt{26}.$$

Conclusion. $AM = \sqrt{13}$ et $MM' = \sqrt{26}$.

Exercice 5

Deux rotations de centres distincts

Soit A et B deux points distincts, $r_1 = \mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$, $r_2 = \mathcal{R}\left(B, \frac{\pi}{3}\right)$ et $f = r_2 \circ r_1$. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

1.

Montrer que f est une rotation, et donner son angle.

INDICE

Les centres sont distincts : regarde la somme des angles modulo 2π.

CORRIGÉ

Les centres A et B sont distincts, et la somme des angles vérifie

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \not\equiv 0\ [2\pi].$$

D'après le théorème sur la composée de deux rotations de centres distincts, f est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Conclusion. f est une rotation, d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2.

Soit Δ_1 la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}_1$, où $(\vec{u}_1, \vec{u}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, et Δ_2 la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{u}_2$, où $(\vec{u}, \vec{u}_2) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Montrer que $r_1 = S_{(AB)} \circ S_{\Delta_1}$ et $r_2 = S_{\Delta_2} \circ S_{(AB)}$.

INDICE

Applique deux fois le théorème de décomposition, en repérant la symétrie qui agit en premier.

CORRIGÉ

Décomposition de r_1. Les droites Δ_1 et (AB) passent par A, de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}$. La symétrie S_{Δ_1} agit en premier, $(\vec{u}_1, \vec{u}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et $2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. D'après le théorème de décomposition, $r_1 = S_{(AB)} \circ S_{\Delta_1}$.

Décomposition de r_2. De même, (AB) et Δ_2 passent par B, la symétrie $S_{(AB)}$ agit en premier et $(\vec{u}, \vec{u}_2) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. Donc $r_2 = S_{\Delta_2} \circ S_{(AB)}$.

Conclusion. $r_1 = S_{(AB)} \circ S_{\Delta_1}$ et $r_2 = S_{\Delta_2} \circ S_{(AB)}$.

3.

En déduire que $f = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$, puis que Δ_1 et Δ_2 se coupent en un point Ω, centre de f.

INDICE

Une symétrie axiale composée avec elle-même est l'identité. Calcule ensuite $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

CORRIGÉ

Simplification. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} f &= r_2 \circ r_1 \\ &= S_{\Delta_2} \circ S_{(AB)} \\ &\quad \circ S_{(AB)} \circ S_{\Delta_1} \\ &= S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}, \end{aligned}$$

car $S_{(AB)} \circ S_{(AB)}$ est l'identité du plan.

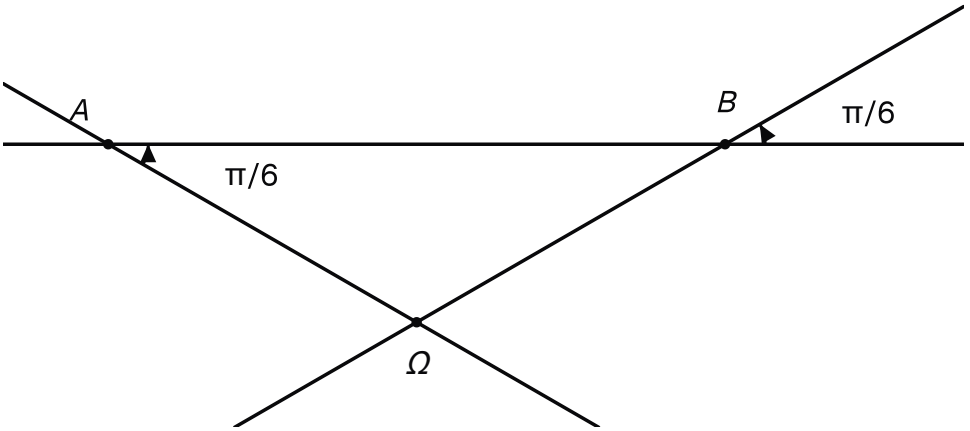
Angle des axes. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1, \vec{u}_2) &\equiv (\vec{u}_1, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{u}_2) \\ &\equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{3} \; [2\pi]. \end{aligned}$$

Cet angle n'est pas nul modulo π : Δ_1 et Δ_2 ne sont pas parallèles, elles se coupent en un point Ω.

Centre de f. D'après le théorème sur deux symétries d'axes sécants, $f = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1} = \mathcal{R}\left(\Omega, \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Conclusion. $f = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$, et les droites Δ_1 et Δ_2 se coupent en un point Ω, centre de f.



Les axes Δ1, issu de A, et Δ2, issu de B, font chacun l'angle π/6 avec (AB) et se coupent en Ω, centre de f.

4.

Soit C le point tel que $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$; le triangle ABC est équilatéral direct, et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Montrer que $f(B) = A$. En déduire que $\Omega A = \Omega B$, et donner une mesure de $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A})$.

INDICE

Calcule $r_1(B)$, puis l'image de ce point par r_2.

CORRIGÉ

Image de B par r_1. On a $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $r_1(B) = C$.

Image de C par r_2. On a $BA = BC$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $r_2(C) = A$. Ainsi $f(B) = r_2(r_1(B)) = r_2(C) = A$.

Centre de f. D'après la question 3, f est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Comme $f(B) = A$, la définition donne $\Omega A = \Omega B$ et

$$(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

Conclusion. $f(B) = A$, $\Omega A = \Omega B$, et $\frac{2\pi}{3}$ est une mesure de $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A})$.

Exercice 6

Quand la somme des angles est nulle

Soit A et B deux points distincts, $r_1 = \mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$, $r_2 = \mathcal{R}\left(B, -\frac{\pi}{2}\right)$ et $g = r_2 \circ r_1$. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

1.

Quelle est la nature de g ?

INDICE

Calcule la somme des angles.

CORRIGÉ

Les centres A et B sont distincts, et la somme des angles est nulle :

$$\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Conclusion. D'après le théorème sur la composée de deux rotations de centres distincts, g est une translation.

2.

On considère la droite Δ_1 passant par A et dirigée par $\vec{u}_1$, avec $(\vec{u}_1, \vec{u}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, et la droite Δ_2 passant par B et dirigée par $\vec{u}_2$, avec $(\vec{u}, \vec{u}_2) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Montrer que $g = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$ et que Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

INDICE

Décompose chaque rotation avec (AB) comme axe commun, puis calcule $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

CORRIGÉ

Décomposition des deux rotations. Les droites Δ_1 et (AB) passent par A, et $2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$: d'après le théorème de décomposition, $r_1 = S_{(AB)} \circ S_{\Delta_1}$. Les droites (AB) et Δ_2 passent par B, et $2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$: $r_2 = S_{\Delta_2} \circ S_{(AB)}$.

Simplification. Comme $S_{(AB)} \circ S_{(AB)}$ est l'identité :

$$\begin{aligned} g &= S_{\Delta_2} \circ S_{(AB)} \\ &\quad \circ S_{(AB)} \circ S_{\Delta_1} \\ &= S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}. \end{aligned}$$

Parallélisme. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1, \vec{u}_2) &\equiv (\vec{u}_1, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{u}_2) \\ &\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \equiv 0\ [2\pi]. \end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires.

Conclusion. $g = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$, et les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

3.

Soit $A_1 = r_2(A)$. Montrer que $g(A) = A_1$, et en déduire que g est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA_1}$. Exprimer la longueur AA_1 en fonction de AB.

INDICE

Le point A est fixe par r_1. Le triangle ABA_1 a deux côtés égaux et un angle droit en B.

CORRIGÉ

Image de A. Le centre A est fixe par r_1, donc $g(A) = r_2(r_1(A)) = r_2(A) = A_1$.

Vecteur de g. D'après la question 1, g est une translation, et une translation est déterminée par l'image d'un seul point : g est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA_1}$.

Longueur AA_1. Par définition de A_1, $BA_1 = BA$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA_1}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$: le triangle ABA_1 est rectangle isocèle en B. D'après le théorème de Pythagore, $AA_1^2 = 2AB^2$.

Conclusion. $g(A) = A_1$, g est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA_1}$, et $AA_1 = AB\sqrt{2}$.

4.

Soit H' le point d'intersection de Δ_2 avec la perpendiculaire à Δ_1 passant par A. Montrer que H' est le milieu de $[AA_1]$.

INDICE

Applique le théorème sur la composée de deux symétries d'axes parallèles, avec le point A de Δ_1.

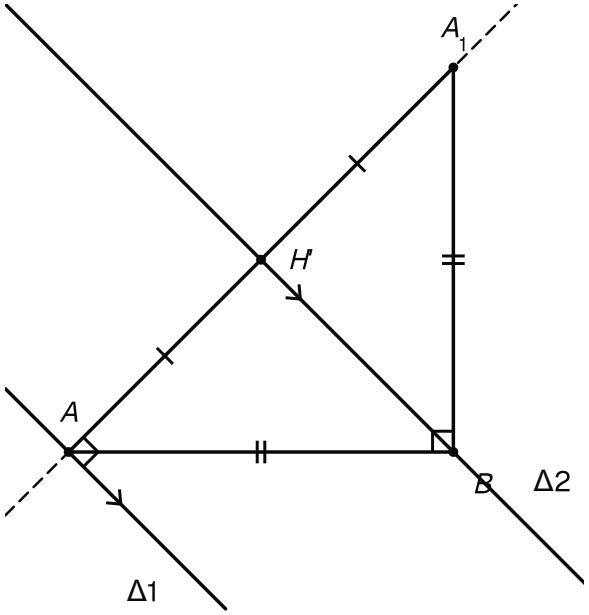
CORRIGÉ

Le point A est sur Δ_1, et H' est le point de Δ_2 situé sur la perpendiculaire à Δ_1 passant par A.
D'après le théorème sur la composée de deux symétries d'axes parallèles, $g = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AH'}$.

D'après la question 3, c'est aussi la translation de vecteur $\overrightarrow{AA_1}$. Donc :

$$2\overrightarrow{AH'} = \overrightarrow{AA_1}.$$

Conclusion. Le point H' est le milieu de $[AA_1]$.

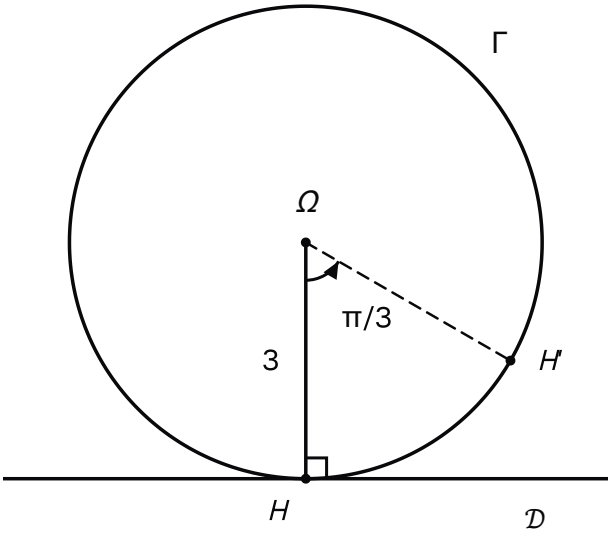


Les axes parallèles Δ1 et Δ2 et le point H', où Δ2 coupe la perpendiculaire à Δ1 menée par A : H' est le milieu de [AA1].

Exercice 7

Deux tangentes qui se coupent

Soit Ω un point, $\mathcal{D}$ une droite et H le pied de la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par Ω, avec $\Omega H = 3$. Soit $r = \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)$, $H' = r(H)$ et $\mathcal{D}'$ l'image de $\mathcal{D}$ par r. On note Γ le cercle de centre Ω et de rayon 3.



Le cercle Γ de centre Ω et de rayon 3, la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire en H au rayon [ΩH], et le point H', image de H par la rotation de centre Ω et d'angle π/3.

1.

Montrer que $\mathcal{D}'$ est la droite passant par H' et perpendiculaire à $(\Omega H')$.

INDICE

Le centre Ω est fixe, et une rotation conserve l'orthogonalité.

CORRIGÉ

Un point de $\mathcal{D}'$. Comme $H \in \mathcal{D}$, on a $H' = r(H) \in \mathcal{D}'$.

Direction de $\mathcal{D}'$. Les droites $\mathcal{D}$ et (ΩH) sont perpendiculaires. Comme $r(\Omega) = \Omega$ et $r(H) = H'$, leurs images sont $\mathcal{D}'$ et $(\Omega H')$. Une rotation conserve l'orthogonalité : $\mathcal{D}'$ et $(\Omega H')$ sont perpendiculaires.

Conclusion. $\mathcal{D}'$ est la droite passant par H' et perpendiculaire à $(\Omega H')$.

2.

Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont tangentes au cercle Γ, respectivement en H et en H'.

INDICE

Une droite est tangente à un cercle en un point du cercle lorsqu'elle y est perpendiculaire au rayon.

CORRIGÉ

Tangente en H. On a $\Omega H = 3$: le point H est sur Γ, et $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au rayon $[\Omega H]$ en H. Donc $\mathcal{D}$ est tangente à Γ en H.

Tangente en H'. Une rotation conserve les distances : $\Omega H' = \Omega H = 3$, donc H' est sur Γ. D'après la question 1, $\mathcal{D}'$ est perpendiculaire au rayon $[\Omega H']$ en H'.

Conclusion. $\mathcal{D}$ est tangente à Γ en H, et $\mathcal{D}'$ est tangente à Γ en H'.

3.

Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en un point K.

INDICE

Lis l'angle entre une droite et son image.

CORRIGÉ

Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$, d'images A' et B' par r. Le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ dirige $\mathcal{D}'$ et, d'après la propriété caractéristique :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi].$$

Comme $\frac{\pi}{3}$ n'est pas nul modulo π, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles : elles se coupent en un point K.

4.

Montrer que $KH = KH'$ et que Ω et K sont sur la médiatrice de $[HH']$.

INDICE

Les triangles ΩHK et $\Omega H'K$ sont rectangles et ont la même hypoténuse.

CORRIGÉ

Points distincts. Comme $\dfrac{\pi}{3} \not\equiv 0\ [2\pi]$ et $\Omega H = 3 \neq 0$, on a $H' \neq H$. La droite $\mathcal{D}'$, tangente à Γ en H', n'a que H' en commun avec Γ : elle ne passe pas par H. Donc $K \neq H$, et de même $K \neq H'$.

Deux triangles rectangles. Les triangles ΩHK et $\Omega H'K$ sont rectangles en H et en H', d'hypoténuse commune $[\Omega K]$, avec $\Omega H = \Omega H'$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} KH^2 &= \Omega K^2 - \Omega H^2 \\ &= \Omega K^2 - \Omega H'^2 \\ &= KH'^2, \end{aligned}$$

donc $KH = KH'$.

Médiatrice. Ainsi $\Omega H = \Omega H'$ et $KH = KH'$: les points Ω et K sont à égale distance de H et de H', donc sur la médiatrice de $[HH']$.

Conclusion. $KH = KH'$, et Ω et K appartiennent à la médiatrice de $[HH']$.

5.

Calculer ΩK et KH.

INDICE

La droite (ΩK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{H\Omega H'}$: l'angle $\widehat{H\Omega K}$ mesure $\frac{\pi}{6}$. Utilise le cosinus et la tangente dans le triangle ΩHK.

CORRIGÉ

Angle en Ω. D'après la question 4, la droite (ΩK) est la médiatrice de $[HH']$. Le triangle $\Omega HH'$ est isocèle en Ω, d'angle au sommet $\frac{\pi}{3}$: cette médiatrice est la bissectrice issue de Ω. L'angle $\widehat{H\Omega K}$ est aigu, car le triangle ΩHK est rectangle en H : il mesure $\frac{\pi}{6}$.

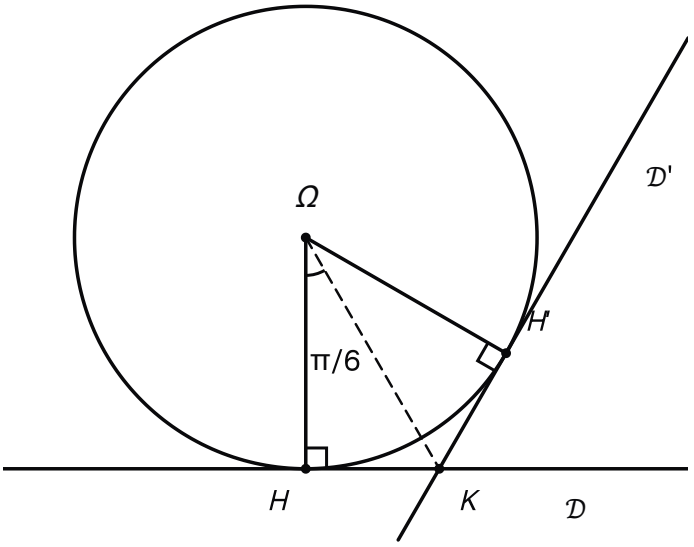
Calcul de ΩK. Dans le triangle ΩHK rectangle en H :

$$\begin{aligned}\Omega K &= \frac{\Omega H}{\cos\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Calcul de KH. Dans le même triangle :

$$\begin{aligned}KH &= \Omega H \tan\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\Omega K = 2\sqrt{3}$ et $KH = \sqrt{3}$.



Les tangentes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ au cercle Γ en H et H' se coupent en K, sur la bissectrice de l'angle HΩH' : l'angle HΩK mesure π/6.