BURHAN

# La rotation dans le plan : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/rotation-dans-le-plan/exercices/application

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| La rotation dans le plan | Application | 8 |

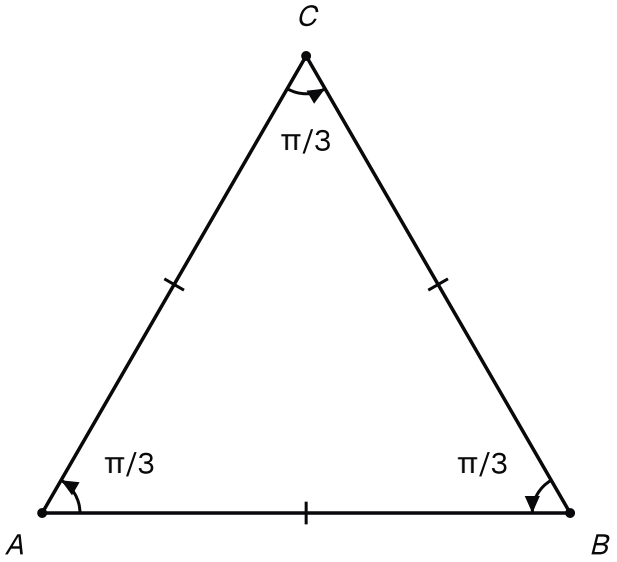
### Exercice 1

## Trois rotations dans un triangle équilatéral

Soit $ABC$ un triangle équilatéral de sens direct : ses trois angles orientés vérifient

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$
$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$
$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Fais la figure sur ton cahier.




**Le triangle équilatéral direct ABC et ses trois angles orientés de π/3, chacun lu du côté qui part du sommet vers le côté suivant.**

#### 1.

Montrer que $C$ est l'image de $B$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

INDICE

Écris les deux conditions de la définition avec le centre $A$ : une égalité de distances, puis un angle orienté qui part de $\overrightarrow{AB}$.

#### 2.

Déterminer l'image de $C$ par la rotation de centre $B$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis l'image de $A$ par la rotation de centre $C$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

INDICE

Cherche parmi les sommets le point $P$ tel que $BP = BC$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ : l'introduction donne cet angle.

### 3.

Un élève affirme que $B$ est l'image de $C$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Expliquer son erreur, puis donner l'angle de la rotation de centre $A$ qui envoie $C$ sur $B$.

INDICE

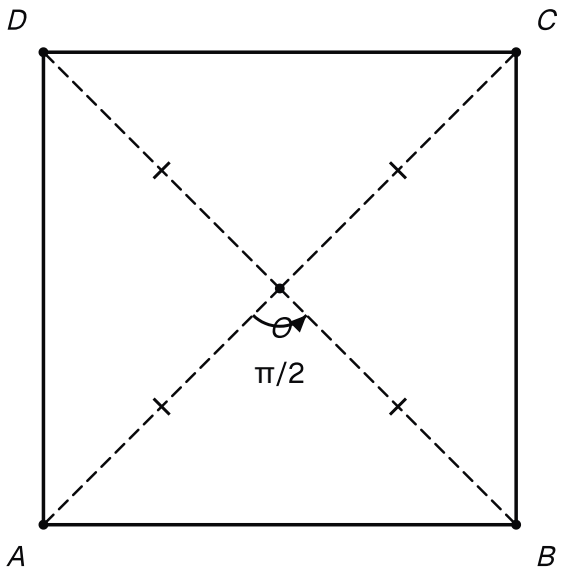
L'angle à contrôler est $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ : compare-le à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

### Exercice 2

## Un quart de tour dans un carré

Soit $ABCD$ un carré de centre $O$, de sens direct. Ses diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu $O$, donc $OA = OB = OC = OD$.

Le carré étant direct, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.




**Le carré direct ABCD, son centre O et l'angle orienté de OA vers OB, qui mesure π/2.**

### 1.

Montrer que $r(A) = B$.

INDICE

Les deux conditions de la définition sont dans l'introduction : repère-les.

### 2.

Montrer que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, puis que $r(B) = C$.

INDICE

Le point $O$ est le milieu de $[AC]$ : que vaut l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ ? Utilise ensuite la relation de Chasles.

### 3.

On obtient de la même façon $r(C) = D$ et $r(D) = A$. Déterminer l'image du segment $[AB]$, puis celle du carré $ABCD$.

INDICE

L'image d'un segment est le segment qui joint les images de ses extrémités.

**4.**

Quelle est l'image de $A$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ ?

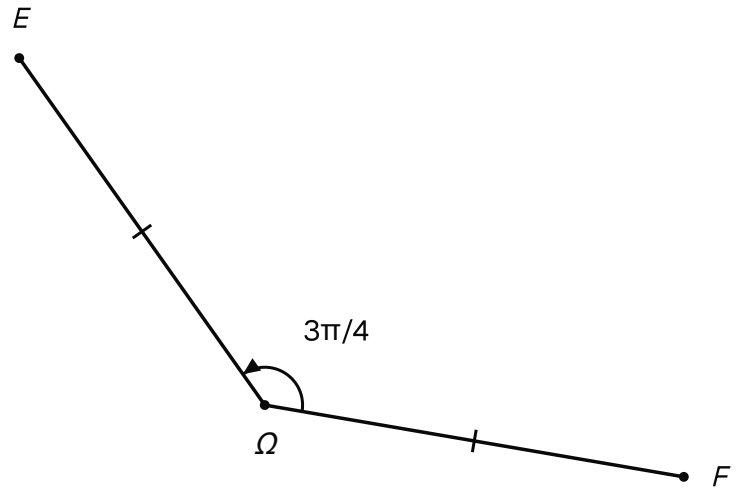
INDICE

Cette rotation est la réciproque de $r$ : elle défait le quart de tour.

### Exercice 3

## Défaire une rotation

Soit $\Omega$, $E$ et $F$ trois points tels que $\Omega E = \Omega F$ et $(\overrightarrow{\Omega F}, \overrightarrow{\Omega E}) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$. On note $r$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.




**Les points E et F, à la même distance de Ω, avec l'angle orienté de ΩF vers ΩE égal à 3π/4.**

**1.**

Montrer que $r(F) = E$.

INDICE

Attention à l'ordre : l'angle de la définition part du vecteur qui va du centre au point de départ.

**2.**

Donner la réciproque $r^{-1}$ par son centre et une mesure de son angle, puis par une seconde mesure comprise entre $0$ et $2\pi$.

INDICE

La réciproque garde le centre et change l'angle en son opposé. Pour une seconde mesure, pense à ajouter ou retrancher $2\pi$.

**3.**

En déduire l'image de $E$ par la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\frac{5\pi}{4}$.

INDICE

Reconnais $r^{-1}$, puis utilise la question 1.

**4.**

La rotation $r$ est-elle égale à sa réciproque ? Justifier.

INDICE

Compare les images de $F$ par $r$ et par $r^{-1}$ : un seul point où elles diffèrent suffit.

### Exercice 4

## Enchaîner des rotations de même centre

Soit $\Omega$ un point du plan et $M$ un point distinct de $\Omega$. On considère les rotations $r_1 = \mathcal{R}\left(\Omega, \dfrac{5\pi}{6}\right)$, $r_2 = \mathcal{R}\left(\Omega, \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $r_3 = \mathcal{R}\left(\Omega, \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

**1.**

Déterminer $r_2 \circ r_1$, et donner une mesure de son angle comprise entre $-\pi$ et $\pi$.

INDICE

Même centre : les angles s'additionnent. Cherche ensuite une mesure dans l'intervalle demandé.

**2.**

Montrer que $r_3 \circ r_3 \circ r_3$ est l'identité du plan.

INDICE

Compose d'abord deux fois $r_3$, puis une troisième fois.

**3.**

Déterminer un réel $\theta$ tel que $\mathcal{R}(\Omega, \theta) \circ r_1$ soit la symétrie centrale de centre $\Omega$.

INDICE

La symétrie centrale de centre $\Omega$ est la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\pi$.

**4.**

On note $M_1 = r_2(M)$ et $M_2 = r_2(M_1)$. Montrer que $\Omega$ est le milieu de $[MM_2]$.

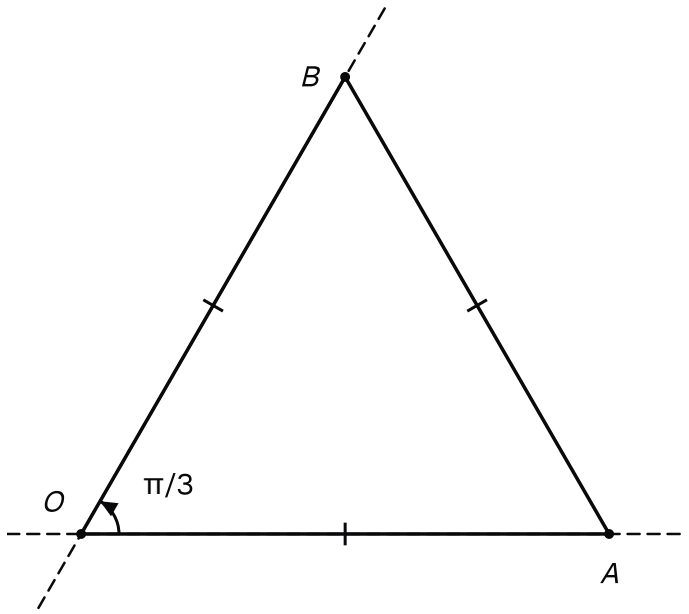
INDICE

Écris $M_2$ comme l'image de $M$ par une seule rotation.

### Exercice 5

## Deux miroirs dans un triangle équilatéral

Soit $OAB$ un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ : il est de sens direct. On note $S_{(OA)}$ et $S_{(OB)}$ les symétries axiales d'axes $(OA)$ et $(OB)$.




**Le triangle équilatéral direct OAB et les deux axes (OA) et (OB), qui se coupent en O sous l'angle orienté π/3.**

**1.**

Montrer que $S_{(OB)} \circ S_{(OA)}$ est la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

INDICE

Les deux axes passent par $O$. Prends comme vecteurs directeurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, dans l'ordre d'application des symétries.

**2.**

Déterminer $S_{(OA)} \circ S_{(OB)}$. Les deux composées sont-elles égales ?

INDICE

Ici, le premier axe est $(OB)$ : l'angle à doubler est $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.

**3.**

On note $A_1$ l'image de $A$ par $S_{(OB)} \circ S_{(OA)}$. Donner $OA_1$ en fonction de $OA$, puis une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_1})$ et de $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA_1})$.

INDICE

Utilise la question 1, puis la relation de Chasles.

**4.**

Soit $\Delta$ la droite perpendiculaire à $(OA)$ en $O$. Identifier $S_{\Delta} \circ S_{(OA)}$.

INDICE

Choisis un vecteur directeur $\vec{v}$ de $\Delta$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \vec{v}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

**Exercice 6**

## Décomposer avec un axe imposé

Soit $\Omega$ un point, $r$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$, et $\Delta$ une droite passant par $\Omega$, de vecteur directeur $\vec{u}$.

**1.**

Déterminer une droite $\Delta_1$ telle que $r = S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta}$.

INDICE

La symétrie $S_{\Delta}$ agit en premier : l'angle se mesure de $\vec{u}$ vers le vecteur directeur cherché, et il vaut la moitié de l'angle de $r$.

**2.**

Déterminer une droite $\Delta_2$ telle que $r = S_{\Delta} \circ S_{\Delta_2}$.

INDICE

Cette fois $S_{\Delta}$ agit en second : l'angle se mesure du vecteur directeur cherché vers $\vec{u}$.

**3.**

Les droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont-elles confondues ? Justifier.

INDICE

Calcule $(\vec{u}_2, \vec{u}_1)$ par la relation de Chasles.

**4.**

Un élève choisit l'axe $\Delta_3$ passant par $\Omega$, de vecteur directeur $\vec{u}_3$ tel que $(\vec{u}, \vec{u}_3) \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$. Quelle rotation obtient-il avec $S_{\Delta_3} \circ S_{\Delta}$ ?

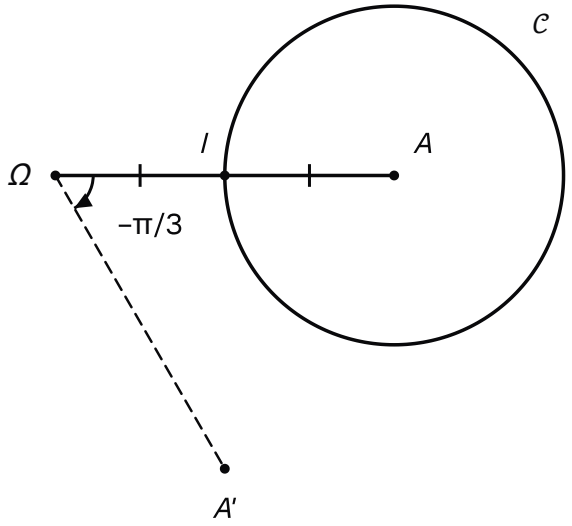
INDICE

La composée tourne du double de l'angle des axes.

### Exercice 7

## L'image d'un cercle

Soit $\Omega$ et $A$ deux points tels que $\Omega A = 4$ cm, $r$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$, et $A' = r(A)$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A$ et de rayon $2$ cm, et $I$ le milieu de $[\Omega A]$.




**Données : ΩA = 4 cm, A' image de A par la rotation de centre Ω et d'angle -π/3, le cercle de centre A et de rayon 2 cm, et I milieu de [ΩA].**

### 1.

Déterminer l'image $\mathcal{C}'$ du cercle $\mathcal{C}$ par $r$.

INDICE

Une rotation transforme un cercle en un cercle de même rayon : cherche l'image du centre.

### 2.

Montrer que le triangle $\Omega A A'$ est équilatéral, puis donner la longueur $AA'$.

INDICE

Tu connais deux côtés égaux et l'angle qu'ils forment.

### 3.

En déduire la position relative des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

INDICE

Compare la distance des centres à la somme des rayons.

### 4.

Déterminer l'image du segment $[\Omega A]$, puis l'image du point $I$.

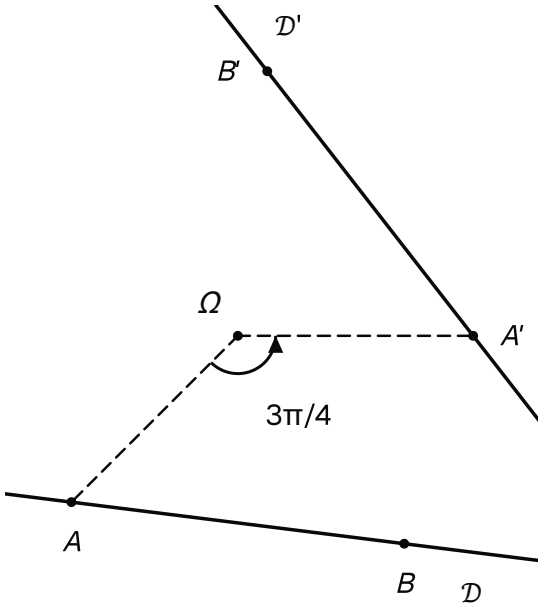
INDICE

Le centre est fixe ; une rotation conserve les milieux.

### Exercice 8

## Une droite et son image

Soit $r$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite, $A$ et $B$ deux points distincts de $\mathcal{D}$, d'images $A'$ et $B'$ par $r$, et $\mathcal{D}'$ l'image de $\mathcal{D}$.




**La droite $\mathcal{D}$ portant A et B, leurs images A' et B' par la rotation de centre Ω et d'angle 3π/4, et la droite image $\mathcal{D}$'.**

**1.**

Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$, et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

INDICE

Pense à la propriété caractéristique.

**2.**

Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.

INDICE

Deux droites sont parallèles si et seulement si l'angle de leurs vecteurs directeurs est nul modulo $\pi$.

**3.**

Soit $\mathcal{D}_1$ une droite parallèle à $\mathcal{D}$, et $\mathcal{D}'_1$ son image par $r$. Quelle est la position de $\mathcal{D}'_1$ par rapport à $\mathcal{D}'$ ?

INDICE

Quelle propriété d'une rotation porte sur deux droites parallèles ?

**4.**

Pour quelles valeurs de $\theta$ (modulo $2\pi$) la rotation $\mathcal{R}(\Omega, \theta)$ transforme-t-elle toute droite en une droite qui lui est parallèle ?

INDICE

Reprends la question 2 avec un angle $\theta$ quelconque.