BURHAN

La rotation dans le plan : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/rotation-dans-le-plan/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
La rotation dans le plan	Application	8

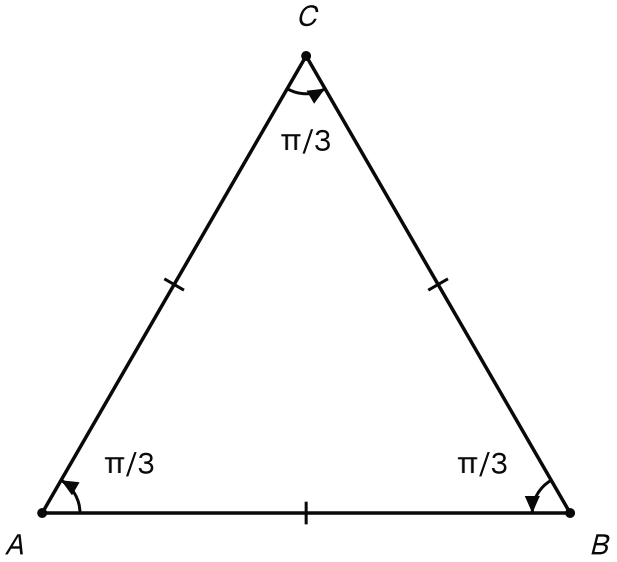
Exercice 1

Trois rotations dans un triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct : ses trois angles orientés vérifient

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$
$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$
$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Fais la figure sur ton cahier.



Le triangle équilatéral direct ABC et ses trois angles orientés de π/3, chacun lu du côté qui part du sommet vers le côté suivant.

1.

Montrer que C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

INDICE

Écris les deux conditions de la définition avec le centre A : une égalité de distances, puis un angle orienté qui part de $\overrightarrow{AB}$.

CORRIGÉ

Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Vérifions pour le point B les deux conditions de la définition.

Distance au centre. Le triangle est équilatéral, donc $AC = AB$.

Angle orienté. Le triangle est de sens direct, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Conclusion. Les deux conditions sont vérifiées : C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire $r_A(B) = C$.

2.

Déterminer l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

INDICE

Cherche parmi les sommets le point P tel que $BP = BC$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$: l'introduction donne cet angle.

CORRIGÉ

Rotation de centre B. Soit r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On a $BA = BC$ et, d'après l'introduction, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Donc $r_B(C) = A$.

Rotation de centre C. Soit r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On a $CB = CA$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Donc $r_C(A) = B$.

Conclusion. L'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est A ; l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est B.

3.

Un élève affirme que B est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Expliquer son erreur, puis donner l'angle de la rotation de centre A qui envoie C sur B.

INDICE

L'angle à contrôler est $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$: compare-le à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

CORRIGÉ

L'erreur. Pour que B soit l'image de C par r_A, il faudrait $AB = AC$ et

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Or, en échangeant les deux vecteurs, l'angle change de signe :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) &\equiv -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &\equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

La différence entre $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ vaut $\frac{2\pi}{3}$, qui n'est pas un multiple de 2π : $-\frac{\pi}{3} \not\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. L'élève a lu l'angle dans le mauvais ordre.

L'angle correct. On a $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$: d'après la définition, la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ envoie C sur B.

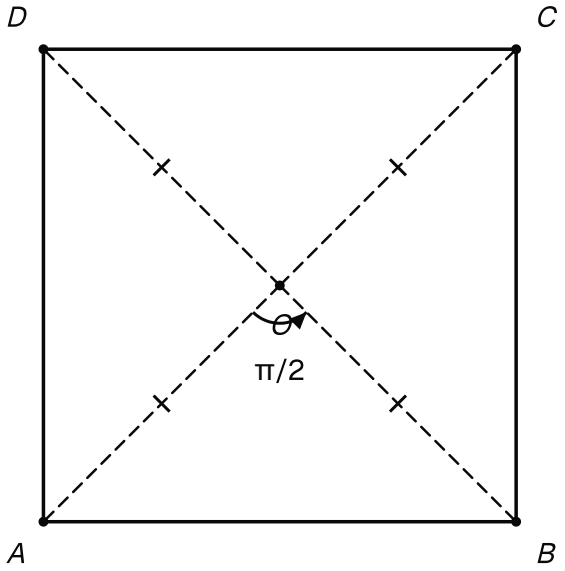
Conclusion. B n'est pas l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. La rotation de centre A qui envoie C sur B a pour angle $-\frac{\pi}{3}$: c'est la réciproque de r_A.

Exercice 2

Un quart de tour dans un carré

Soit $ABCD$ un carré de centre O, de sens direct. Ses diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu O, donc $OA = OB = OC = OD$.

Le carré étant direct, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.



Le carré direct ABCD, son centre O et l'angle orienté de OA vers OB, qui mesure π/2.

1.

Montrer que $r(A) = B$.

INDICE

Les deux conditions de la définition sont dans l'introduction : repère-les.

CORRIGÉ

D'après l'introduction, $OB = OA$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Ce sont les deux conditions de la définition de r pour le point A.

Conclusion. $r(A) = B$.

2.

Montrer que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, puis que $r(B) = C$.

INDICE

Le point O est le milieu de $[AC]$: que vaut l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$? Utilise ensuite la relation de Chasles.

CORRIGÉ

Deux angles connus. Comme O est le milieu de $[AC]$, $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$, donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \pi\ [2\pi]$. En échangeant les vecteurs de l'introduction, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Calcul de l'angle. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})\\ &\equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})\\ &\quad + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})\\ &\equiv -\frac{\pi}{2} + \pi \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Image de B. De plus $OC = OB$: les deux conditions de la définition de r sont vérifiées pour le point B.

Conclusion. $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $r(B) = C$.

3.

On obtient de la même façon $r(C) = D$ et $r(D) = A$. Déterminer l'image du segment $[AB]$, puis celle du carré $ABCD$.

INDICE

L'image d'un segment est le segment qui joint les images de ses extrémités.

CORRIGÉ

Image du segment $[AB]$. L'image d'un segment est le segment qui joint les images de ses extrémités. Comme $r(A) = B$ et $r(B) = C$, l'image de $[AB]$ est $[BC]$.

Image des autres côtés. De même, avec $r(C) = D$ et $r(D) = A$, les images de $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ sont $[CD]$, $[DA]$ et $[AB]$.

Image du carré. Le carré est formé de ses quatre côtés, et leurs images sont ces mêmes quatre côtés.

Conclusion. L'image du segment $[AB]$ est le segment $[BC]$, et l'image du carré $ABCD$ est le carré $ABCD$ lui-même : il est globalement invariant par r, alors qu'aucun de ses sommets n'est fixe.

4.

Quelle est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$?

INDICE

Cette rotation est la réciproque de r : elle défait le quart de tour.

CORRIGÉ

La rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ a le même centre que r et un angle opposé : c'est la réciproque r^{-1}. Comme $r(D) = A$, on a $r^{-1}(A) = D$.

Contrôle par la définition : $OD = OA$ et, puisque $r(D) = A$,

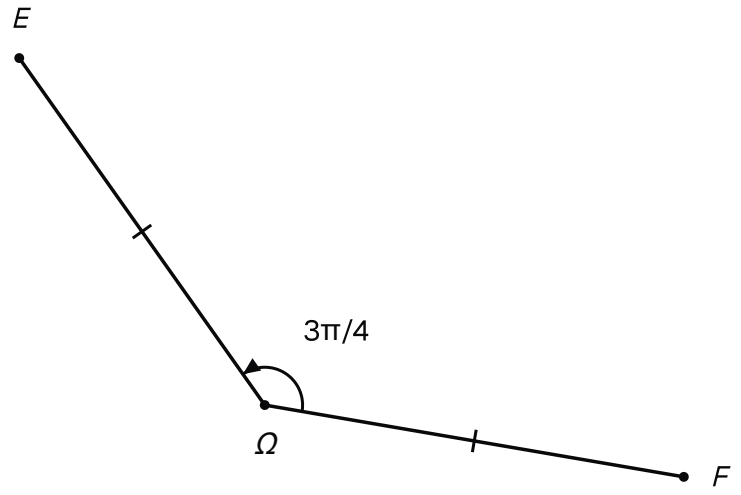
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) &\equiv -(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}) \\ &\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. L'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est D.

Exercice 3

Défaire une rotation

Soit Ω, E et F trois points tels que $\Omega E = \Omega F$ et $(\overrightarrow{\Omega F}, \overrightarrow{\Omega E}) \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$. On note r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.



Les points E et F, à la même distance de Ω, avec l'angle orienté de ΩF vers ΩE égal à 3π/4.

1.

Montrer que $r(F) = E$.

INDICE

Attention à l'ordre : l'angle de la définition part du vecteur qui va du centre au point de départ.

CORRIGÉ

D'après l'introduction, $\Omega E = \Omega F$ et

$$(\overrightarrow{\Omega F}, \overrightarrow{\Omega E}) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi].$$

L'angle part de $\overrightarrow{\Omega F}$: le point de départ est F, et le point d'arrivée est E.

Conclusion. D'après la définition de la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$, $r(F) = E$.

2.

Donner la réciproque r^{-1} par son centre et une mesure de son angle, puis par une seconde mesure comprise entre 0 et 2π.

INDICE

La réciproque garde le centre et change l'angle en son opposé. Pour une seconde mesure, pense à ajouter ou retrancher 2π.

CORRIGÉ

Une première mesure. La réciproque d'une rotation est la rotation de même centre et d'angle opposé :

$$r^{-1} = \mathcal{R}\left(\Omega, -\frac{3\pi}{4}\right).$$

Une seconde mesure. Ajouter 2π à une mesure en donne une autre : $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$, et $0 \leq \frac{5\pi}{4} < 2\pi$.

Conclusion. r^{-1} est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$, c'est-à-dire aussi $r^{-1} = \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{5\pi}{4}\right)$.

3.

En déduire l'image de E par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{5\pi}{4}$.

INDICE

Reconnais r^{-1}, puis utilise la question 1.

CORRIGÉ

D'après la question 2, la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{5\pi}{4}$ est r^{-1}. Comme $r(F) = E$, on a $r^{-1}(E) = F$.

Contrôle par la définition : $\Omega F = \Omega E$ et

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega F}) &\equiv -\frac{3\pi}{4} \\ &\equiv \frac{5\pi}{4}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. L'image de E par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{5\pi}{4}$ est F.

4.

La rotation r est-elle égale à sa réciproque ? Justifier.

INDICE

Compare les images de F par r et par r^{-1} : un seul point où elles diffèrent suffit.

CORRIGÉ

Il suffit de trouver un point dont les images par r et par r^{-1} diffèrent. On a $r(F) = E$.

Supposons $r^{-1}(F) = E$. Comme r^{-1} a pour angle $-\dfrac{3\pi}{4}$, la définition donnerait

$$(\overrightarrow{\Omega F}, \overrightarrow{\Omega E}) \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi].$$

Or cet angle mesure $\dfrac{3\pi}{4}$, et la différence $\dfrac{3\pi}{4} - \left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$ n'est pas un multiple de 2π. Donc $r^{-1}(F) \neq E$, c'est-à-dire $r^{-1}(F) \neq r(F)$.

Conclusion. La rotation r n'est pas égale à sa réciproque : elles n'envoient pas F sur le même point.

Exercice 4

Enchaîner des rotations de même centre

Soit Ω un point du plan et M un point distinct de Ω. On considère les rotations $r_1 = \mathcal{R}\left(\Omega, \dfrac{5\pi}{6}\right)$, $r_2 = \mathcal{R}\left(\Omega, \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $r_3 = \mathcal{R}\left(\Omega, \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

1.

Déterminer $r_2 \circ r_1$, et donner une mesure de son angle comprise entre $-\pi$ et π.

INDICE

Même centre : les angles s'additionnent. Cherche ensuite une mesure dans l'intervalle demandé.

CORRIGÉ

Les deux rotations ont le même centre Ω. D'après la composée de deux rotations de même centre, les angles s'additionnent :

$$\begin{aligned} r_2 \circ r_1 &= \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{4\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{2\pi}{3}$, et $-\pi < -\dfrac{2\pi}{3} \leq \pi$, on a aussi $r_2 \circ r_1 = \mathcal{R}\left(\Omega, -\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Conclusion. $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$; une mesure de son angle comprise entre $-\pi$ et π est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

2.

Montrer que $r_3 \circ r_3 \circ r_3$ est l'identité du plan.

INDICE

Compose d'abord deux fois r_3, puis une troisième fois.

CORRIGÉ

Deux fois r_3. D'après la composée de deux rotations de même centre :

$$r_3 \circ r_3 = \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{4\pi}{3}\right).$$

Trois fois r_3. Composée encore avec r_3, cette rotation donne la rotation de centre Ω dont l'angle est $\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = 2\pi$:

$$r_3 \circ r_3 \circ r_3 = \mathcal{R}(\Omega, 2\pi).$$

Conclusion. Comme $2\pi \equiv 0\ [2\pi]$, la rotation $r_3 \circ r_3 \circ r_3$ est l'identité du plan.

3.

Déterminer un réel θ tel que $\mathcal{R}(\Omega, \theta) \circ r_1$ soit la symétrie centrale de centre Ω.

INDICE

La symétrie centrale de centre Ω est la rotation de centre Ω et d'angle π.

CORRIGÉ

Soit θ un réel. D'après la composée de deux rotations de même centre :

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}(\Omega, \theta) \circ r_1 \\ &= \mathcal{R}\left(\Omega, \theta + \frac{5\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

La symétrie centrale de centre Ω est la rotation $\mathcal{R}(\Omega, \pi)$. Pour $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, on a $\theta + \dfrac{5\pi}{6} = \pi$.

Conclusion. Le réel $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ convient : $\mathcal{R}\left(\Omega, \dfrac{\pi}{6}\right) \circ r_1$ est la symétrie centrale de centre Ω.

4.

On note $M_1 = r_2(M)$ et $M_2 = r_2(M_1)$. Montrer que Ω est le milieu de $[MM_2]$.

INDICE

Écris M_2 comme l'image de M par une seule rotation.

CORRIGÉ

Une seule rotation. Par définition, $M_2 = r_2(M_1) = r_2 \circ r_2(M)$. D'après la composée de deux rotations de même centre :

$$\begin{aligned} r_2 \circ r_2 &= \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \mathcal{R}(\Omega, \pi). \end{aligned}$$

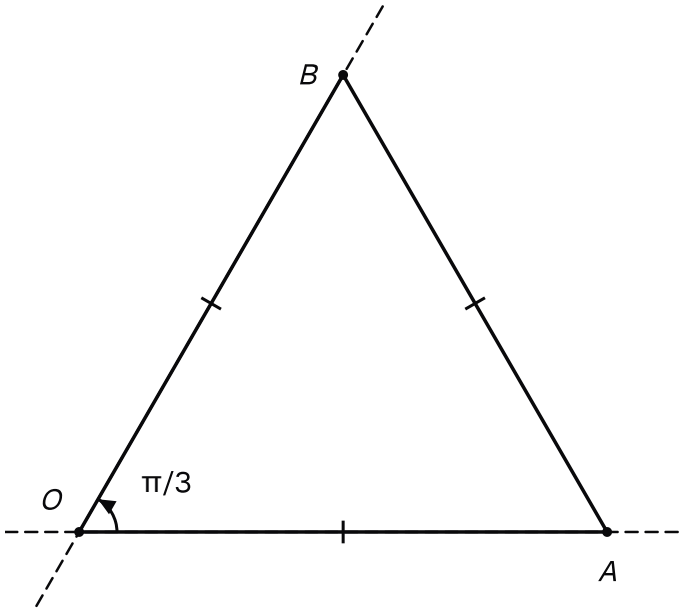
C'est la symétrie centrale de centre Ω : M_2 est le symétrique de M par rapport à Ω.

Conclusion. Le point Ω est le milieu de $[MM_2]$.

Exercice 5

Deux miroirs dans un triangle équilatéral

Soit OAB un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$: il est de sens direct. On note $S_{(OA)}$ et $S_{(OB)}$ les symétries axiales d'axes (OA) et (OB).



Le triangle équilatéral direct OAB et les deux axes (OA) et (OB), qui se coupent en O sous l'angle orienté π/3.

1.

Montrer que $S_{(OB)} \circ S_{(OA)}$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

INDICE

Les deux axes passent par O. Prends comme vecteurs directeurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, dans l'ordre d'application des symétries.

CORRIGÉ

Les axes. Les droites (OA) et (OB) se coupent en O, de vecteurs directeurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, avec $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. La symétrie appliquée d'abord est $S_{(OA)}$.

Composée. D'après le théorème sur la composée de deux symétries d'axes sécants :

$$\begin{aligned} & S_{(OB)} \circ S_{(OA)} \\ &= \mathcal{R}\left(O, 2 \times \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \mathcal{R}\left(O, \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Conclusion. $S_{(OB)} \circ S_{(OA)}$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2.

Déterminer $S_{(OA)} \circ S_{(OB)}$. Les deux composées sont-elles égales ?

INDICE

Ici, le premier axe est (OB) : l'angle à doubler est $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.

CORRIGÉ

Composée. La symétrie appliquée d'abord est maintenant $S_{(OB)}$, et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. D'après le même théorème, $S_{(OA)} \circ S_{(OB)} = \mathcal{R}\left(O, -\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Comparaison. Les deux rotations ont le même centre O, mais leurs angles $\dfrac{2\pi}{3}$ et $-\dfrac{2\pi}{3}$ diffèrent de $\dfrac{4\pi}{3}$, qui n'est pas un multiple de 2π. Elles n'envoient donc pas A sur le même point.

Conclusion. $S_{(OA)} \circ S_{(OB)}$ est la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$. Les deux composées ne sont pas égales : l'ordre des symétries compte.

3.

On note A_1 l'image de A par $S_{(OB)} \circ S_{(OA)}$. Donner OA_1 en fonction de OA, puis une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_1})$ et de $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA_1})$.

INDICE

Utilise la question 1, puis la relation de Chasles.

CORRIGÉ

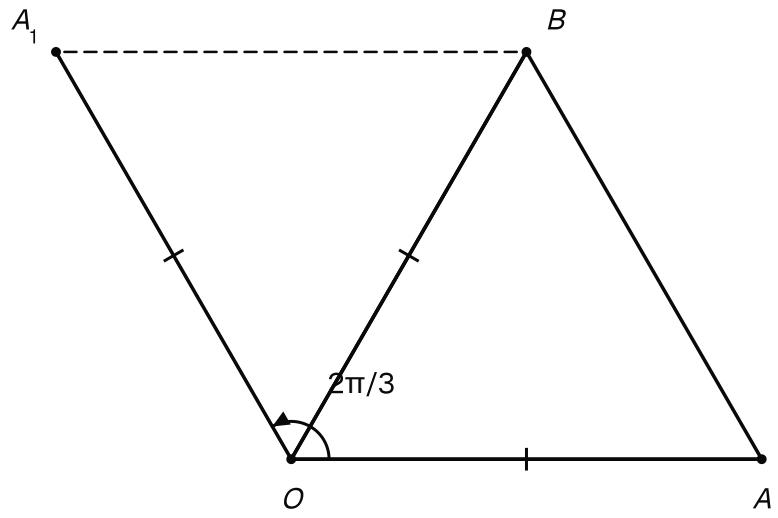
Distance et premier angle. D'après la question 1, A_1 est l'image de A par $\mathcal{R}\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$. Par définition, $OA_1 = OA$ et

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_1}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

Second angle. Comme $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, la relation de Chasles donne :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA_1}) &\equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \\ &\quad + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_1}) \\ &\equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. $OA_1 = OA$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_1}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA_1}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Comme $OA_1 = OB$, le triangle OBA_1 est un second triangle équilatéral direct, accolé au premier le long de $[OB]$.



Le point A1, image de A par la rotation de centre O et d'angle 2π/3, forme avec O et B un second triangle équilatéral direct.

4.

Soit Δ la droite perpendiculaire à (OA) en O. Identifier $S_{\Delta} \circ S_{(OA)}$.

INDICE

Choisis un vecteur directeur $\vec{v}$ de Δ tel que $(\overrightarrow{OA}, \vec{v}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

CORRIGÉ

Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de Δ tel que $(\overrightarrow{OA}, \vec{v}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Les axes (OA) et Δ se coupent en O, et $S_{(OA)}$ est appliquée d'abord.

D'après le théorème sur deux symétries d'axes sécants :

$$\begin{aligned} S_{\Delta} \circ S_{(OA)} &= \mathcal{R}\left(O, 2 \times \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \mathcal{R}(O, \pi). \end{aligned}$$

Conclusion. $S_{\Delta} \circ S_{(OA)}$ est la rotation de centre O et d'angle π, c'est-à-dire la symétrie centrale de centre O.

Exercice 6

Décomposer avec un axe imposé

Soit Ω un point, r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$, et Δ une droite passant par Ω, de vecteur directeur $\vec{u}$.

1.

Déterminer une droite Δ_1 telle que $r = S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta}$.

INDICE

La symétrie S_{Δ} agit en premier : l'angle se mesure de $\vec{u}$ vers le vecteur directeur cherché, et il vaut la moitié de l'angle de r.

CORRIGÉ

La symétrie S_{Δ} agit en premier. On cherche donc un axe Δ_1 passant par Ω dont un vecteur directeur $\vec{u}_1$ fait avec $\vec{u}$ la moitié de l'angle de r.

Soit Δ_1 la droite passant par Ω, de vecteur directeur $\vec{u}_1$ tel que

$$(\vec{u}, \vec{u}_1) \equiv \frac{5\pi}{12} \ [2\pi].$$

Les deux axes passent par Ω, et $2 \times \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{6}$. D'après le théorème de décomposition d'une rotation, $S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta} = r$.

Conclusion. La droite Δ_1 convient : $r = S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta}$.

2.

Déterminer une droite Δ_2 telle que $r = S_{\Delta} \circ S_{\Delta_2}$.

INDICE

Cette fois S_{Δ} agit en second : l'angle se mesure du vecteur directeur cherché vers $\vec{u}$.

CORRIGÉ

Cette fois, S_{Δ} agit en second. Soit Δ_2 la droite passant par Ω, de vecteur directeur $\vec{u}_2$ tel que

$$(\vec{u}_2, \vec{u}) \equiv \frac{5\pi}{12} \ [2\pi].$$

Les deux axes passent par Ω, et le double de cet angle est $\dfrac{5\pi}{6}$. D'après le théorème de décomposition, $S_{\Delta} \circ S_{\Delta_2} = r$.

Conclusion. La droite Δ_2 convient : $r = S_{\Delta} \circ S_{\Delta_2}$.

3.

Les droites Δ_1 et Δ_2 sont-elles confondues ? Justifier.

INDICE

Calcule $(\vec{u}_2, \vec{u}_1)$ par la relation de Chasles.

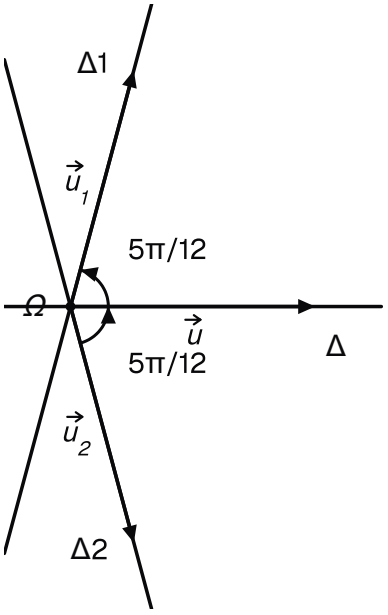
CORRIGÉ

Angle des deux droites. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\vec{u}_2, \vec{u}_1) &\equiv (\vec{u}_2, \vec{u}) \\ &\quad + (\vec{u}, \vec{u}_1) \\ &\equiv \frac{5\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \\ &\equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Parallélisme. Deux droites sont parallèles si et seulement si l'angle de leurs vecteurs directeurs est nul modulo π. Or $\frac{5\pi}{6}$ n'est pas un multiple de π.

Conclusion. Les droites Δ_1 et Δ_2 ne sont pas confondues : ce sont deux droites distinctes, sécantes en Ω.



Les axes Δ1 et Δ2, symétriques de part et d'autre de Δ à 5π/12, font entre eux un angle de 5π/6 : ils sont distincts.

4.

Un élève choisit l'axe Δ_3 passant par Ω, de vecteur directeur $\vec{u}_3$ tel que $(\vec{u}, \vec{u}_3) \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$. Quelle rotation obtient-il avec $S_{\Delta_3} \circ S_{\Delta}$?

INDICE

La composée tourne du double de l'angle des axes.

CORRIGÉ

Les axes Δ et Δ_3 passent par Ω, et S_{Δ} agit en premier. D'après le théorème sur deux symétries d'axes sécants, la composée tourne du double de l'angle des axes :

$$\begin{aligned} & S_{\Delta_3} \circ S_{\Delta} \\ &= \mathcal{R}\left(\Omega, 2 \times \frac{5\pi}{6}\right) \\ &= \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{5\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

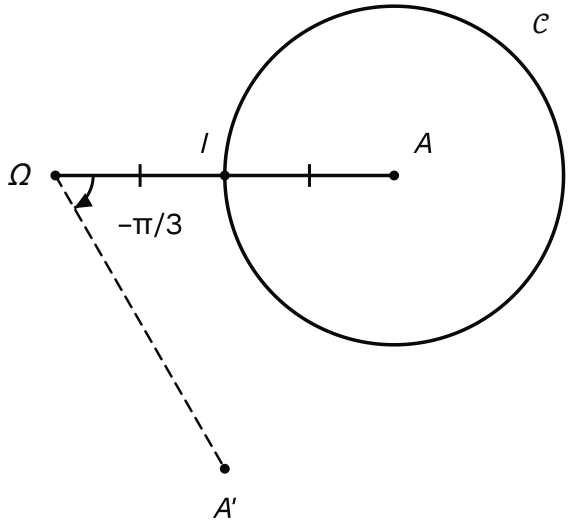
Comme $\dfrac{5\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{\pi}{3}$, c'est aussi $\mathcal{R}\left(\Omega, -\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Conclusion. L'élève obtient la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$, qui n'est pas r : il a pris l'angle de la rotation comme angle des axes, au lieu de sa moitié.

Exercice 7

L'image d'un cercle

Soit Ω et A deux points tels que $\Omega A = 4$ cm, r la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$, et $A' = r(A)$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2 cm, et I le milieu de $[\Omega A]$.



Données : ΩA = 4 cm, A' image de A par la rotation de centre Ω et d'angle -π/3, le cercle de centre A et de rayon 2 cm, et I milieu de [ΩA].

1.

Déterminer l'image $\mathcal{C}'$ du cercle $\mathcal{C}$ par r.

INDICE

Une rotation transforme un cercle en un cercle de même rayon : cherche l'image du centre.

CORRIGÉ

D'après la propriété des images de cercles, une rotation transforme un cercle en un cercle de même rayon, dont le centre est l'image du centre. Ici, l'image du centre A est A'.

Conclusion. $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre A' et de rayon 2 cm.

2.

Montrer que le triangle $\Omega AA'$ est équilatéral, puis donner la longueur AA'.

INDICE

Tu connais deux côtés égaux et l'angle qu'ils forment.

CORRIGÉ

Deux côtés égaux. Par définition de $A' = r(A)$, on a $\Omega A' = \Omega A = 4$ cm et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Le triangle $\Omega AA'$ est isocèle en Ω, et son angle géométrique en Ω mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

Les deux autres angles. Ils sont égaux, car le triangle est isocèle, et leur somme vaut $\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$. Chacun mesure donc $\dfrac{\pi}{3}$.

Conclusion. Le triangle $\Omega AA'$ a trois angles égaux : il est équilatéral, et $AA' = 4$ cm.

3.

En déduire la position relative des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

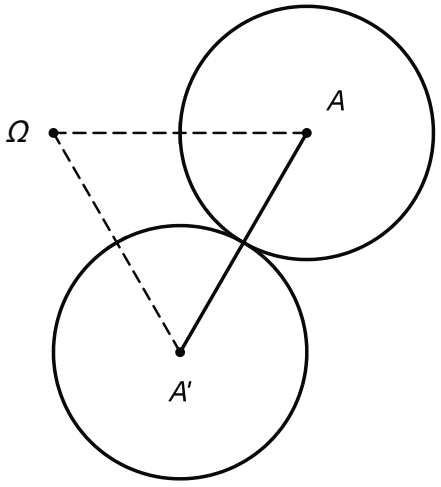
INDICE

Compare la distance des centres à la somme des rayons.

CORRIGÉ

Les deux cercles ont pour rayon 2 cm, et leurs centres sont à la distance $AA' = 4$ cm (question 2). Cette distance est égale à la somme $2 + 2$ des rayons.

Conclusion. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents extérieurement, en un seul point : le milieu de $[AA']$.



Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de rayon 2 cm, ont leurs centres A et A' à 4 cm l'un de l'autre : ils se touchent au milieu de [AA'].

4.

Déterminer l'image du segment $[\Omega A]$, puis l'image du point I.

INDICE

Le centre est fixe ; une rotation conserve les milieux.

CORRIGÉ

Image du segment. On a $r(\Omega) = \Omega$, car le centre est fixe, et $r(A) = A'$. L'image du segment $[\Omega A]$ est donc le segment $[\Omega A']$.

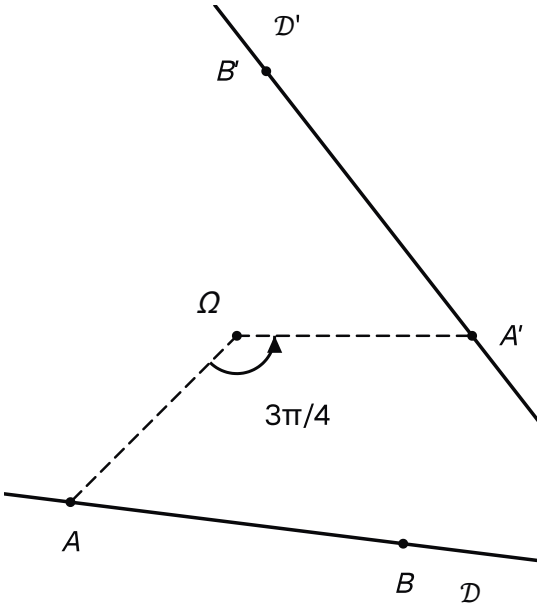
Image du milieu. Une rotation conserve les milieux : comme I est le milieu de $[\Omega A]$, $r(I)$ est le milieu de $[\Omega A']$.

Conclusion. L'image de $[\Omega A]$ est $[\Omega A']$, et l'image de I est le milieu de $[\Omega A']$.

Exercice 8

Une droite et son image

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite, A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$, d'images A' et B' par r, et $\mathcal{D}'$ l'image de $\mathcal{D}$.



La droite $\mathcal{D}$ portant A et B, leurs images A' et B' par la rotation de centre Ω et d'angle 3π/4, et la droite image $\mathcal{D}$'.

1.

Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$, et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

INDICE

Pense à la propriété caractéristique.

CORRIGÉ

Vecteur directeur. L'image de la droite (AB) est la droite qui passe par A' et B', distincts car $A \neq B$. Donc $\mathcal{D}' = (A'B')$, et le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ dirige $\mathcal{D}'$.

Angle. D'après la propriété caractéristique, appliquée aux points distincts A et B :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi].$$

Conclusion. $\overrightarrow{A'B'}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$, et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

2.

Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.

INDICE

Deux droites sont parallèles si et seulement si l'angle de leurs vecteurs directeurs est nul modulo π.

CORRIGÉ

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ dirigent $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (question 1), et leur angle mesure $\frac{3\pi}{4}$. Ce réel n'est pas un multiple de π : les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles : elles sont sécantes.

3.

Soit $\mathcal{D}_1$ une droite parallèle à $\mathcal{D}$, et $\mathcal{D}'_1$ son image par r. Quelle est la position de $\mathcal{D}'_1$ par rapport à $\mathcal{D}'$?

INDICE

Quelle propriété d'une rotation porte sur deux droites parallèles ?

CORRIGÉ

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ sont parallèles. Une rotation conserve le parallélisme, donc leurs images $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}'_1$ sont parallèles.

Conclusion. La droite $\mathcal{D}'_1$ est parallèle à $\mathcal{D}'$.

4.

Pour quelles valeurs de θ (modulo 2π) la rotation $\mathcal{R}(\Omega, \theta)$ transforme-t-elle toute droite en une droite qui lui est parallèle ?

INDICE

Reprends la question 2 avec un angle θ quelconque.

CORRIGÉ

Soit θ un réel, $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{D}'$ son image par $\mathcal{R}(\Omega, \theta)$. D'après la propriété caractéristique, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et son image, qui dirige $\mathcal{D}'$, font l'angle θ.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc parallèles si et seulement si $\theta \equiv 0\ [\pi]$, c'est-à-dire $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$. Cette condition ne dépend pas de la droite choisie.

Conclusion. Les valeurs cherchées sont $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ et $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$: la rotation est alors l'identité du plan ou la symétrie centrale de centre Ω.