BURHAN

La rotation dans le plan

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/rotation-dans-le-plan/cours

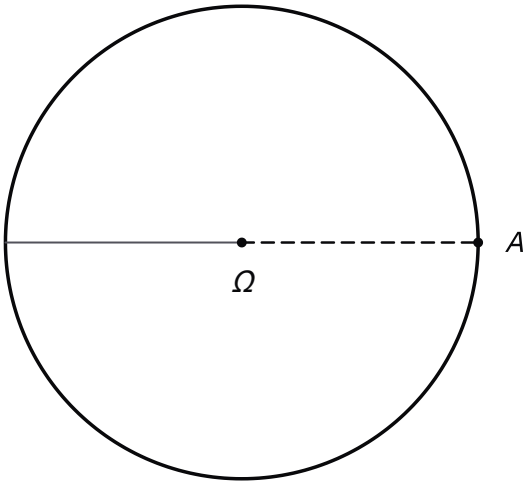
Chapitre	Semestre
La rotation dans le plan	Semestre 1

Tourner autour d'un point

Une grande roue de centre Ω et de rayon 20 m tourne dans le sens direct, contraire à celui des aiguilles d'une montre.

Une nacelle part du point A, à la hauteur du centre et à sa droite. La roue fait un quart de tour.

Où arrive la nacelle ?



La grande roue vue comme un cercle de centre Ω : la nacelle part de A, sur le cercle, à la hauteur du centre et à sa droite.

Devine : Après un quart de tour

Selon toi, où se trouve la nacelle après un quart de tour direct ?

A. Tout en haut, à 20 m au-dessus de Ω.

Juste.

Juste : elle reste à 20 m du centre et tourne d'un angle droit, dans le sens direct.

B. Tout en bas, à 20 m au-dessous de Ω.

Faux.

C'est un quart de tour dans le sens indirect, celui des aiguilles d'une montre.

C. À gauche de Ω, à la hauteur du centre.

Faux.

C'est la position de la nacelle après un demi-tour.

D. Au point A : la roue revient au départ.

Faux.

Elle revient en A après un tour complet, pas après un quart de tour.

Correction

La nacelle reste sur le cercle de centre Ω et de rayon 20 m. Elle tourne d'un angle droit, dans le sens direct.

Si B est sa nouvelle position, alors $\Omega B = \Omega A$ et :

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi].$$

Partie à droite du centre, elle arrive tout en haut. Ce mouvement va s'appeler une rotation.

Dans ce chapitre, tu transformes ce mouvement en un outil de géométrie.

Tu sauras construire l'image d'un point et reconnaître une rotation dans une figure. Tu écriras une rotation comme la composée de deux symétries axiales. Tu démontreras des égalités de longueurs, des alignements et des orthogonalités.

Chaque propriété sera **démontrée**, et tu apprendras à rédiger chaque « montrer que » comme une vraie preuve.

Définir une rotation

Un point repéré par une distance et un angle

Devine : Un seul point ?

Soit Ω et M deux points tels que $\Omega M = 3$. Combien de points P vérifient $\Omega P = 3$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$?

A. Aucun point.

Faux.

Le cercle de centre Ω et de rayon 3 contient un point qui convient.

B. Un seul point.

Juste.

Juste : la distance place le point sur un cercle, et l'angle orienté en choisit un seul.

C. Deux points, symétriques par rapport à (ΩM).

Faux.

Le second point donne l'angle $-\frac{\pi}{2}$: le sens compte.

D. Tous les points du cercle de centre Ω et de rayon 3.

Faux.

La distance seule donne le cercle ; l'angle orienté ne garde qu'un point.

Correction

La condition $\Omega P = 3$ place P sur le cercle de centre Ω et de rayon 3.

L'angle orienté impose la direction de $\overrightarrow{\Omega P}$: un quart de tour direct à partir de $\overrightarrow{\Omega M}$. Un seul point du cercle convient.

Son symétrique par rapport à (ΩM) donnerait :

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Petit rappel. Le chapitre sur les angles orientés t'a appris ceci. Un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs non nuls a une infinité de mesures, égales à 2π près. On écrit $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

- L'ordre des vecteurs compte : $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$.
- Relation de Chasles : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w})\ [2\pi]$.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0\ [\pi]$, et orthogonaux si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.
- Vecteurs opposés : $(-\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$ et $(-\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$.

Un triangle ABC est **direct** si on lit A, B, C dans le sens direct, contraire à celui des aiguilles d'une montre. Alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a une mesure dans $]0, \pi[$, égale à $\frac{\pi}{3}$ si le triangle est équilatéral.

Existence, puis définition

Pense à l'aiguille d'une horloge : sa longueur ne change pas, seule sa direction tourne.

Avant de définir une rotation, il faut savoir qu'une distance et un angle orienté repèrent un point, et un seul.

Pourquoi est-ce vrai ? Sur le cercle trigonométrique, l'angle donné désigne un unique point N. On reporte ensuite la longueur voulue dans la direction de $\overrightarrow{ON}$.

Propriété : Point défini par une distance et un angle orienté

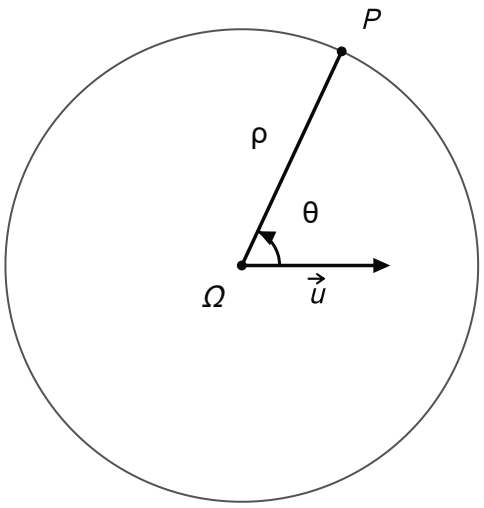
Soit Ω un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul, ρ un réel strictement positif et θ un réel. Il existe un unique point P du plan tel que

$$\Omega P = \rho \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega P}) \equiv \theta\ [2\pi].$$

Démonstration

Étape 1 (existence). Dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit A le point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ tel que $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$, et α une abscisse curviligne de A. Soit N le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne $\alpha + \theta$, et P le point tel que $\overrightarrow{\Omega P} = \rho\,\overrightarrow{ON}$. Alors $\Omega P = \rho$, car $ON = 1$; comme $\dfrac{1}{\Omega P}\overrightarrow{\Omega P} = \overrightarrow{ON}$, la définition des mesures d'un angle orienté donne $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega P}) \equiv (\alpha + \theta) - \alpha = \theta\ [2\pi]$.

Étape 2 (unicité). Soit Q un point tel que $\Omega Q = \rho$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega Q}) \equiv \theta\ [2\pi]$, et N_1 le point tel que $\overrightarrow{ON_1} = \dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{\Omega Q}$; il est sur $\mathcal{C}$, car $\Omega Q = \rho$. Si β est une abscisse curviligne de N_1, alors $\beta - \alpha \equiv \theta\ [2\pi]$: le réel $\alpha + \theta$ est aussi une abscisse curviligne de N_1, donc $N_1 = N$. Ainsi $\overrightarrow{\Omega Q} = \rho\,\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{\Omega P}$, et $Q = P$.



Une distance ρ et un angle orienté θ, compté à partir du vecteur u, désignent un seul point P autour de Ω.

Vérifie : Le rôle de l'unicité

Dans la preuve, l'étape 2 montre l'unicité. Pourquoi les points N_1 et N du cercle trigonométrique sont-ils égaux ?

A. Le réel ρ est strictement positif.

Faux.

L'hypothèse $\rho > 0$ sert à diviser par ρ, pas à identifier les points.

B. La relation de Chasles s'applique.

Faux.

La relation de Chasles n'intervient pas à cet endroit de la preuve.

C. Ils ont une abscisse curviligne commune.

Juste.

Juste : un point du cercle est repéré par chacune de ses abscisses curvilignes.

D. Ils sont tous deux à la distance 1 de O.

Faux.

Tous les points du cercle trigonométrique sont à cette distance : cela ne suffit pas.

Correction

À l'étape 2, l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega Q})$ donne :

$$\beta - \alpha \equiv \theta \ [2\pi].$$

Donc $\alpha + \theta$ est aussi une abscisse curviligne de N_1. Or c'est une abscisse curviligne de N.

Deux points du cercle qui ont une abscisse curviligne commune sont égaux : $N_1 = N$, puis $Q = P$.

Définition : Rotation de centre Ω et d'angle θ

Soit Ω un point du plan et θ un réel. La **rotation de centre Ω et d'angle θ** est l'application r du plan dans lui-même définie par :

- $r(\Omega) = \Omega$;
- pour tout point $M \neq \Omega$, $r(M)$ est l'unique point M' tel que

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \ [2\pi].$$

On la note $\mathcal{R}(\Omega, \theta)$; M' est l'**image** de M par r. Pour tout entier relatif k, $\mathcal{R}(\Omega, \theta + 2k\pi) = \mathcal{R}(\Omega, \theta)$: on dit que θ est **une mesure** de l'angle de la rotation. Les rotations $\mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\mathcal{R}\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$ sont les **quarts de tour** de centre Ω, direct et indirect.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'existence vient du cercle trigonométrique : l'angle y désigne un point, et la distance fixe la longueur.

L'unicité vient de ce qu'une mesure d'angle est définie à 2π près, comme une abscisse curviligne.

C'est ce résultat qui rend la définition possible : pour $M \neq \Omega$, le point M' existe et il est unique.

Construire une image

Exemple : un quart de tour dans un carré

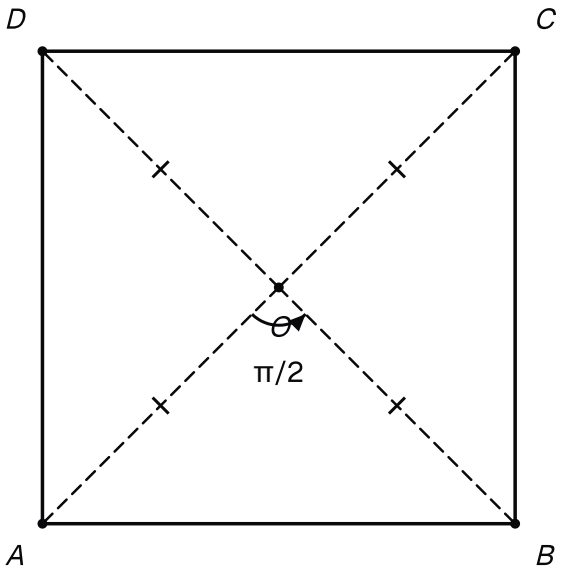
Soit $ABCD$ un carré direct de centre O : on lit A, B, C, D dans le sens direct. Trace-le sur ton cahier. Soit $r = \mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$.

Distance. Les diagonales d'un carré ont même longueur et se coupent en leur milieu : $OB = OA$.

Angle. Les diagonales sont perpendiculaires, et le carré est direct :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Conclusion. Par définition, $r(A) = B$. De même, $r(B) = C$, $r(C) = D$ et $r(D) = A$.

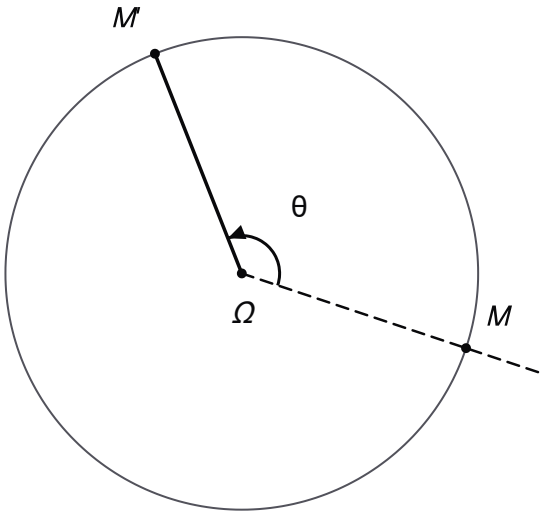


Dans le carré direct ABCD de centre O, le quart de tour direct de centre O envoie A sur B, puis B sur C, C sur D et D sur A.

Méthode : construire l'image d'un point

1. **Regarder** si le point est le centre : $r(\Omega) = \Omega$.
2. **Tracer** le cercle de centre Ω qui passe par M : l'image M' est sur ce cercle.
3. **Reporter** l'angle θ à partir de la demi-droite $[\Omega M)$, dans le sens direct si $\theta > 0$, puis **placer** M'.

Rédaction attendue. « Le point M' est sur le cercle de centre Ω qui passe par M, et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$. Donc $M' = r(M)$, par définition. »



Construire l'image M' : tracer le cercle de centre Ω qui passe par M, puis reporter l'angle θ dans le sens direct à partir de [ΩM).

Vérifie : Une image dans le carré

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, et $r = \mathcal{R}\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$. Quelle est l'image de B par r ?

A. Le point C.

Faux.

C'est l'image de B par le quart de tour direct.

B. Le point D.

Faux.

C'est l'image de B par le demi-tour de centre O.

C. Le point O.

Faux.

Seul le centre a pour image O.

D. Le point A.

Juste.

Juste : $OA = OB$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Correction

Le carré est direct : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. En échangeant les vecteurs :

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Avec $OA = OB$, la définition donne $r(B) = A$. Le quart de tour indirect parcourt le carré à l'envers.

Identité, demi-tour, point invariant

Si l'aiguille fait un tour complet, tout revient à sa place. Si elle fait un demi-tour, elle pointe dans la direction opposée. Et une vraie rotation ne laisse fixe que son centre.

Pourquoi est-ce vrai ? Dans chaque cas, on exhibe un point qui vérifie les deux conditions de la définition. L'unicité de l'image fait le reste.

Propriété : Cas particuliers et point invariant

Soit $r = \mathcal{R}(\Omega, \theta)$.

- Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, r est l'identité du plan : $r(M) = M$ pour tout point M.
- Si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, r est la symétrie centrale de centre Ω : pour tout point M, Ω est le milieu de $[MM']$, où $M' = r(M)$.
- Si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, Ω est le seul point invariant de r : $r(M) = M$ si et seulement si $M = \Omega$.

Démonstration

Étape 1. Soit $M \neq \Omega$. Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, le point M lui-même vérifie $\Omega M = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv 0\ [2\pi]$. Par l'unicité dans la définition, $r(M) = M$; et $r(\Omega) = \Omega$.

Étape 2. Si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, soit M_1 le symétrique de M par rapport à Ω : $\overrightarrow{\Omega M_1} = -\overrightarrow{\Omega M}$. Alors $\Omega M_1 = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, -\overrightarrow{\Omega M}) \equiv (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) + \pi \equiv \pi\ [2\pi]$ (règle de l'angle avec un vecteur opposé). Par unicité, $r(M) = M_1$; pour $M = \Omega$, Ω est bien le milieu de $[\Omega\Omega]$.

Étape 3. Supposons $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ et $M \neq \Omega$. Si l'on avait $r(M) = M$, on aurait $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta\ [2\pi]$, alors que cet angle a pour mesure 0 : contradiction. Donc $r(M) \neq M$; comme $r(\Omega) = \Omega$, Ω est le seul point invariant.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées portent la preuve.

Pour trouver une image, il suffit d'exhiber un point qui vérifie les deux conditions : l'unicité conclut.

Ensuite, l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M})$ a pour mesure 0. Un point $M \neq \Omega$ n'est donc fixe que si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$.

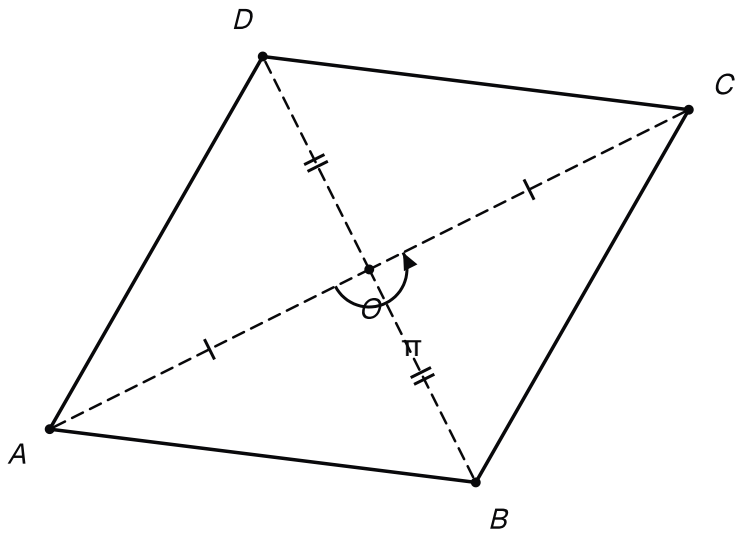
Exemple : un demi-tour

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, et $s = \mathcal{R}(O, \pi)$.

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$.

D'après le résultat sur les cas particuliers ($\theta \equiv \pi\ [2\pi]$), s est la symétrie centrale de centre O. Donc $s(A) = C$ et $s(B) = D$.

Les mesures $-\pi$ et 3π décrivent la même rotation, car $-\pi \equiv 3\pi \equiv \pi\ [2\pi]$.



Le demi-tour de centre O échange les sommets opposés du parallélogramme ABCD : A avec C, B avec D.

Le sens de l'angle

Attention : l'angle d'une rotation est orienté

✗ « $\Omega M' = \Omega M$, donc M' est l'image de M par $\mathcal{R}(\Omega, \theta)$. »

✓ La distance ne suffit pas : tous les points du cercle la vérifient. Il faut aussi, dans cet ordre :

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi].$$

Écrire $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta\ [2\pi]$ décrit la rotation d'angle $-\theta$. Elle est différente dès que $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$.

À toi : Rédige une image

Soit ABC un triangle équilatéral direct, et $r = \mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$. Rédige la preuve de $r(B) = C$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Nomme la rotation, puis vérifie les deux conditions de la définition.
Indice 2
La distance : compare AB et AC.
Indice 3
Point délicat : le signe de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ vient de l'orientation du triangle.

Réponse

Distance. Le triangle ABC est équilatéral, donc $AC = AB$.

Angle. Il est direct, donc :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Conclusion. Par définition de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, on a $r(B) = C$.

Réciproque et composée de même centre

Défaire un tour

Devine : Ramener la nacelle

La grande roue de centre Ω a fait un quart de tour direct : la nacelle est passée de A à B. Selon toi, quelle rotation ramène la nacelle de B en A ?

A. $\mathcal{R}\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$

Juste.

Juste : on tourne du même angle, dans l'autre sens.

B. $\mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$

Faux.

Un second quart de tour direct emmène la nacelle à gauche du centre.

C. $\mathcal{R}(\Omega, \pi)$

Faux.

Le demi-tour envoie B tout en bas, pas en A.

D. $\mathcal{R}\left(B, -\frac{\pi}{2}\right)$

Faux.

Une rotation de centre B laisse B fixe : la nacelle ne bouge pas.

Correction

On a $\Omega A = \Omega B$ et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. En échangeant les vecteurs :

$$(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Par définition, A est l'image de B par $\mathcal{R}\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$. Défaire un tour, c'est tourner autour du même centre, de l'angle opposé.

Une rotation se défait : on tourne autour du même centre, dans l'autre sens. Deux rotations de même centre s'enchaînent : les angles s'ajoutent, comme deux mouvements de l'aiguille.

Pourquoi est-ce vrai ? Échanger deux vecteurs change un angle orienté en son opposé. Et la relation de Chasles additionne deux angles qui partagent un vecteur.

Réciproque et composée

Théorème : Bijectivité et réciproque d'une rotation

Soit $r = \mathcal{R}(\Omega, \theta)$ et $r' = \mathcal{R}(\Omega, -\theta)$. Pour tous points M et N :

$$r(M) = N \iff r'(N) = M.$$

Par conséquent, r est une bijection du plan sur lui-même, et sa réciproque est la rotation $r^{-1} = \mathcal{R}(\Omega, -\theta)$.

Démonstration

Étape 1. Une rotation de centre Ω transforme Ω en Ω, et un point $M \neq \Omega$ en un point M' tel que $\Omega M' = \Omega M > 0$, donc $M' \neq \Omega$. Ainsi l'image d'un point est Ω si et seulement si ce point est Ω : l'équivalence vaut si $M = \Omega$ ou si $N = \Omega$.

Étape 2. Soit $M \neq \Omega$ et $N \neq \Omega$. Par définition, $r(M) = N$ équivaut à : $\Omega N = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}) \equiv \theta\ [2\pi]$. Comme $(\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv -(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N})\ [2\pi]$, cela équivaut à : $\Omega M = \Omega N$ et $(\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv -\theta\ [2\pi]$, c'est-à-dire à $r'(N) = M$.

Étape 3. Pour tout point N, l'équation $r(M) = N$ a donc une unique solution, $M = r'(N)$: r est bijective et sa réciproque est r'.

Vérifie : Une propriété des angles orientés

Dans la preuve, l'étape 2 passe de $r(M) = N$ à $r'(N) = M$. Quelle propriété des angles orientés sert à ce passage ?

A. $(\vec{u}, \vec{u}) \equiv 0\ [2\pi]$

Faux.

Cet angle nul sert aux cas particuliers, pas ici.

B. $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$

Juste.

Juste : échanger les deux vecteurs change l'angle en son opposé.

C. $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w})\ [2\pi]$

Faux.

La relation de Chasles sert à la composée, pas à la réciproque.

D. $(-\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$

Faux.

Aucun vecteur n'est remplacé par son opposé dans cette étape.

Correction

À l'étape 2, $r(M) = N$ s'écrit $\Omega N = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

En échangeant les vecteurs :

$$(\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv -\theta \ [2\pi].$$

C'est exactement la définition de $r'(N) = M$, avec $r' = \mathcal{R}(\Omega, -\theta)$.

Propriété : Composée de deux rotations de même centre

Soit Ω un point du plan, et θ, θ' deux réels. Alors

$$\mathcal{R}(\Omega, \theta') \circ \mathcal{R}(\Omega, \theta) = \mathcal{R}(\Omega, \theta + \theta') = \mathcal{R}(\Omega, \theta) \circ \mathcal{R}(\Omega, \theta').$$

Démonstration

Étape 1. Posons $r = \mathcal{R}(\Omega, \theta)$ et $r' = \mathcal{R}(\Omega, \theta')$. Le point Ω est invariant par r et par r', donc par $r' \circ r$.

Étape 2. Soit $M \neq \Omega$, $M_1 = r(M)$ et $M' = r'(M_1)$. Par définition, $\Omega M_1 = \Omega M$, donc $M_1 \neq \Omega$, puis $\Omega M' = \Omega M_1 = \Omega M$.

Étape 3. Par la relation de Chasles des angles orientés,

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1}) + (\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta + \theta' \ [2\pi].$$

Par définition, $M' = \mathcal{R}(\Omega, \theta + \theta')(M)$. Les rôles de θ et θ' sont symétriques, d'où la seconde égalité.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La réciproque se lit en échangeant les deux vecteurs de l'angle : l'angle devient son opposé, le centre ne change pas.

Pour la composée, le point intermédiaire M_1 reste à la même distance du centre. La relation de Chasles additionne alors les deux angles : $\theta + \theta'$.

Avec un centre commun, l'ordre des deux rotations ne compte pas.

Exemple : composer et défaire autour d'un même centre

Soit Ω un point. D'après la composée de deux rotations de même centre :

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right) \circ \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

La réciproque de $\mathcal{R}\left(\Omega, \frac{2\pi}{3}\right)$ est $\mathcal{R}\left(\Omega, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

C'est aussi $\mathcal{R}\left(\Omega, \frac{4\pi}{3}\right)$, car $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$.

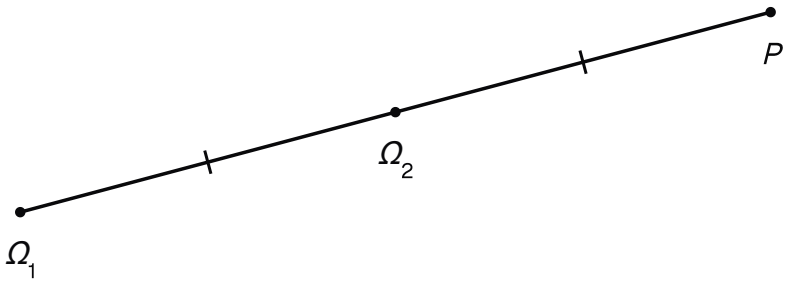
Le centre commun est nécessaire

Exemple : Contre-exemple : deux demi-tours de centres distincts

Soit Ω_1 et Ω_2 deux points distincts, $s_1 = \mathcal{R}(\Omega_1, \pi)$ et $s_2 = \mathcal{R}(\Omega_2, \pi)$.

La somme des angles vaut 2π. En oubliant l'hypothèse du centre commun, on croirait que $s_2 \circ s_1$ est l'identité.

Or $s_1(\Omega_1) = \Omega_1$, puis $s_2(\Omega_1)$ est le point P tel que Ω_2 soit le milieu de $[\Omega_1 P]$. Comme $\Omega_1 \neq \Omega_2$, on a $P \neq \Omega_1$: la composée n'est pas l'identité.



Le demi-tour s1 laisse Ω1 en place, puis le demi-tour s2 l'envoie en P, symétrique de Ω1 par rapport à Ω2 : la composée déplace Ω1.

À toi : Rédige une composée

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O, et $r = \mathcal{R}\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$. Rédige la preuve de $r(A) = B$. Détermine ensuite $r \circ r$, puis r^{-1}. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le centre O est à la même distance des trois sommets.
Indice 2
Les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$ mesurent $\frac{2\pi}{3}$, et le triangle est direct.
Indice 3
Point délicat : $r \circ r$ et r^{-1} ont-elles la même mesure d'angle, modulo 2π ?

Réponse
Image de A. Le point O est le centre du triangle équilatéral ABC, donc $OB = OA$. Le triangle est direct et $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3}$, donc :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

Par définition, $r(A) = B$.

Composée. D'après la composée de deux rotations de même centre :

$$r \circ r = \mathcal{R}\left(O, \frac{4\pi}{3}\right).$$

Réciproque. La réciproque de r est $r^{-1} = \mathcal{R}\left(O, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

Conclusion. Comme $\frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, on obtient $r \circ r = r^{-1}$.

Deux symétries axiales font une rotation

Retour sur la symétrie axiale

Devine : Deux miroirs

Deux droites Δ et Δ' se coupent en Ω. Leurs vecteurs directeurs vérifient $(\vec{u}, \vec{u'}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. On applique à un point M la symétrie S_Δ, puis $S_{\Delta'}$. Selon toi, comment passe-t-on directement de M au point obtenu ?

A. Par une symétrie axiale d'axe passant par Ω.

Faux.
Deux symétries axiales qui se suivent rendent aux figures leur sens : ce n'est pas une symétrie axiale.

B. Par une translation.

Faux.
Le point Ω reste fixe : une translation de vecteur non nul ne fixe aucun point.

C. Par la rotation $\mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$.

Juste.
Juste : l'angle de la rotation est le double de l'angle des axes.

D. Par la rotation $\mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{4}\right)$.

Faux.
L'angle des axes compte deux fois : ce n'est pas $\frac{\pi}{4}$.

Correction

Le point Ω est sur les deux axes : il reste fixe. Les deux symétries conservent les distances : ΩM ne change pas.

Tu vas démontrer que l'angle tourne de $2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Le point obtenu est donc l'image de M par $\mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$.

Petit rappel du collège. Soit Δ une droite.

- Si $M \notin \Delta$, l'image de M par la symétrie axiale S_Δ est le point M_1 tel que Δ soit la médiatrice de $[MM_1]$.
- Si $M \in \Delta$, alors $M_1 = M$.

Une symétrie axiale conserve les distances. Appliquée deux fois, elle ramène chaque point à sa place.

Propriété : Propriétés de la symétrie axiale

Soit Δ une droite et S_Δ la symétrie axiale d'axe Δ. Soit A, B, C, D quatre points, d'images A_1, B_1, C_1, D_1 par S_Δ.

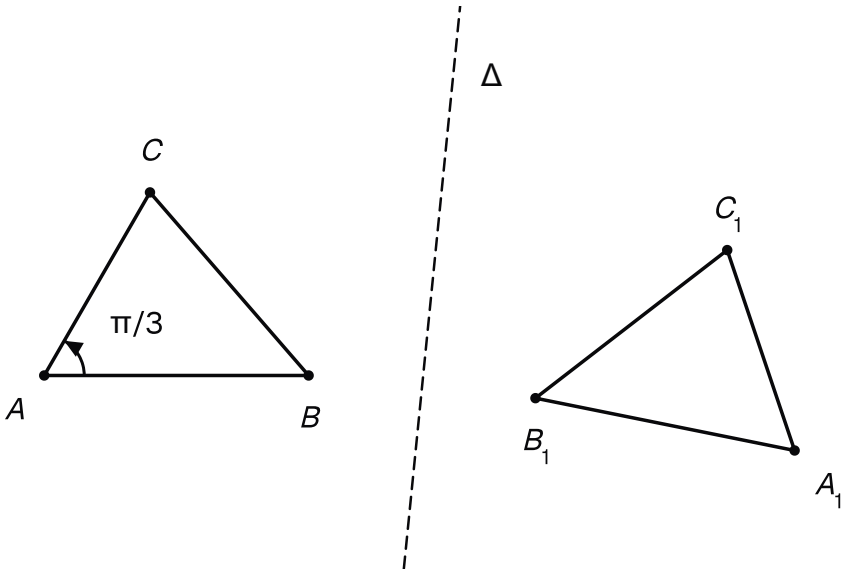
- $A_1B_1 = AB$: une symétrie axiale conserve les distances.
- Si $A \neq B$ et $C \neq D$: $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{C_1D_1}) \equiv -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$: une symétrie axiale change chaque angle orienté en son opposé.
- $S_\Delta \circ S_\Delta$ est l'identité du plan, et les points invariants de S_Δ sont les points de Δ.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Ses points viennent du collège, sauf un : le changement d'un angle orienté en son opposé.

Sa preuve demande une définition précise de l'orientation du plan, qui dépasse ce chapitre.

Tu peux le constater sur ton cahier : un triangle direct a pour image un triangle indirect.



Le triangle ABC, dont l'angle orienté en A mesure π/3, et son image A1B1C1 par une symétrie d'axe Δ : l'angle de l'image reste à trouver.

Vérifie : Un triangle dans un miroir

Soit ABC un triangle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, et A_1, B_1, C_1 ses images par une symétrie axiale. Que vaut $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1})$?

A. $\frac{\pi}{3}$, modulo 2π
Faux.
Ce serait vrai pour une rotation, pas pour une symétrie axiale.

B. $\frac{2\pi}{3}$, modulo 2π
Faux.
Tu as pris le supplémentaire : la symétrie change seulement le signe.

C. $\frac{\pi}{6}$, modulo 2π
Faux.
Une symétrie ne divise pas les angles : elle garde l'angle géométrique.

D. $-\frac{\pi}{3}$, modulo 2π
Juste.
Juste : la symétrie axiale change l'angle orienté en son opposé.

Correction
Les propriétés de la symétrie axiale donnent :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}) &\equiv -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &\equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

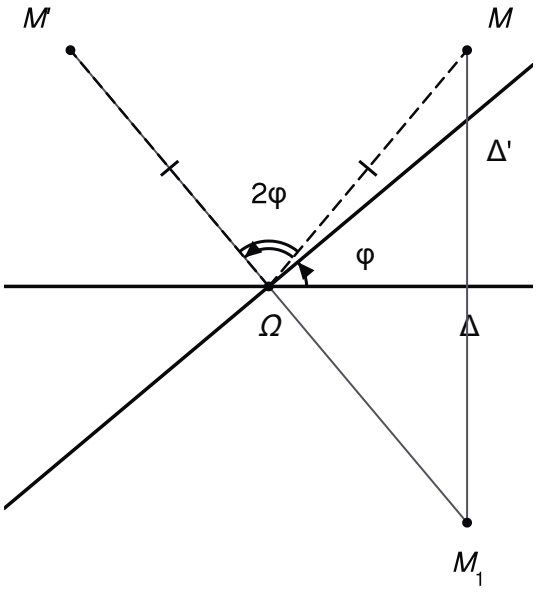
L'angle géométrique reste $\frac{\pi}{3}$, car les distances sont conservées.

Mais le sens est inversé : le triangle ABC est direct, son image $A_1B_1C_1$ est indirecte.

Deux miroirs sécants

Deux miroirs qui se coupent : chacun retourne la figure, et deux retournements la remettent à l'endroit. Ce qui reste est un tour autour du point commun.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque symétrie change les angles orientés en leurs opposés. La relation de Chasles fait alors apparaître deux fois l'angle des axes.



Deux miroirs Δ puis Δ' sécants en Ω : M passe en M1, puis en M', et l'angle de ΩM à ΩM' vaut le double de l'angle φ des axes.

Théorème : Composée de deux symétries axiales d'axes passant par un même point

Soit Δ et Δ' deux droites passant par un même point Ω, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, et φ une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{u}')$. Alors

$$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = \mathcal{R}(\Omega, 2\varphi).$$

Le résultat ne dépend pas des vecteurs directeurs choisis : remplacer $\vec{u}$ par $-\vec{u}$ ajoute π à φ, donc 2π à 2φ.

Démonstration

Étape 1. Le point Ω appartient aux deux axes : il est invariant. Soit $M \neq \Omega$, $M_1 = S_{\Delta}(M)$ et $M' = S_{\Delta'}(M_1)$. Les symétries axiales conservent les distances et fixent Ω : $\Omega M' = \Omega M_1 = \Omega M$, donc $M_1 \neq \Omega$.

Étape 2. Soit P et P' les points tels que $\overrightarrow{\Omega P} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{\Omega P'} = \vec{u}'$; ils sont invariants par S_{Δ} et $S_{\Delta'}$ respectivement. Comme P, P', M et M_1 sont distincts de Ω et qu'une symétrie axiale change un angle orienté en son opposé : $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_1}) \equiv (\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u})$ et $(\vec{u}', \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv (\overrightarrow{\Omega M_1}, \vec{u}')\ [2\pi]$.

Étape 3. Par la relation de Chasles, $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv (\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_1}) + (\overrightarrow{\Omega M_1}, \vec{u}') + (\vec{u}', \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv 2(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}) + 2(\overrightarrow{\Omega M_1}, \vec{u}')\ [2\pi]$. Or $(\overrightarrow{\Omega M_1}, \vec{u}') \equiv (\overrightarrow{\Omega M_1}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{u}') \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}) + \varphi\ [2\pi]$. D'où $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv 2\varphi\ [2\pi]$: $M' = \mathcal{R}(\Omega, 2\varphi)(M)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve suit le point M à travers les deux miroirs.

Les distances au point commun Ω ne changent pas.

Pour l'angle, on passe par les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, avec la relation de Chasles. Chaque symétrie change un angle en son opposé : l'angle φ des axes apparaît deux fois. D'où l'angle 2φ.

Vérifie : Une distance conservée

Dans la preuve, l'étape 1 affirme $\Omega M' = \Omega M$. Pourquoi ?

A. Les deux symétries conservent les distances et fixent Ω.

Juste.

Juste : Ω est sur les deux axes, donc il est invariant.

B. Par la définition d'une rotation.

Faux.

On cherche justement à montrer que la composée est une rotation : on ne peut pas s'en servir.

C. Par la relation de Chasles des angles.

Faux.

La relation de Chasles porte sur les angles, pas sur les distances.

D. Car Ω est sur la médiatrice de $[MM']$ par hypothèse.

Faux.

C'est une conséquence de $\Omega M' = \Omega M$, pas une hypothèse.

Correction

Le point Ω appartient à Δ et à Δ' : il est invariant par les deux symétries.

Une symétrie axiale conserve les distances. Donc $\Omega M_1 = \Omega M$, puis $\Omega M' = \Omega M_1$.

Ainsi $\Omega M' = \Omega M$.

Exemple : deux axes et l'ordre des symétries

Soit Δ et Δ' deux droites sécantes en Ω, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, avec $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

D'après le théorème sur deux axes passant par un même point, l'angle double :

$$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right).$$

Dans l'autre ordre, $(\vec{u}', \vec{u}) \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$, donc :

$$S_{\Delta} \circ S_{\Delta'} = \mathcal{R}\left(\Omega, -\frac{\pi}{3}\right).$$

L'ordre compte

Attention : l'ordre des symétries compte

✗ « $S_\Delta \circ S_{\Delta'} = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$. »

✓ $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ signifie : d'abord S_Δ, puis $S_{\Delta'}$.

Si les axes se coupent en Ω, échanger l'ordre donne la rotation de centre Ω et d'angle opposé. Les deux composées ne sont égales que si cet angle vaut 0 ou π modulo 2π. C'est le cas de deux axes perpendiculaires.

À toi : Rédige une composée de symétries

Soit Δ et Δ' deux droites perpendiculaires en Ω. Rédige la détermination de $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$, puis compare-la à $S_\Delta \circ S_{\Delta'}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Choisis des vecteurs directeurs, et donne une mesure de leur angle.
Indice 2
Applique le théorème : l'angle de la rotation est le double de l'angle des axes.
Indice 3
Point délicat : π et $-\pi$ sont deux mesures du même angle.

Réponse
Angle des axes. Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs directeurs de Δ et Δ'. Les droites sont perpendiculaires : on peut choisir $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Composée. Les deux axes passent par Ω, donc l'angle double :

$$S_{\Delta'} \circ S_\Delta = \mathcal{R}(\Omega, \pi).$$

C'est la symétrie centrale de centre Ω.

Autre ordre. On a $(\vec{u}', \vec{u}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc $S_\Delta \circ S_{\Delta'} = \mathcal{R}(\Omega, -\pi)$.

Conclusion. Comme $-\pi \equiv \pi\ [2\pi]$, les deux composées sont égales.

Décomposer une rotation

Lire le théorème à l'envers

Devine : Quel angle entre les axes ?

Tu veux écrire $\mathcal{R}\left(\Omega, \dfrac{\pi}{2}\right) = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$, où Δ est une droite donnée passant par Ω. Selon toi, quel angle $(\vec{u}, \vec{u}')$ faut-il entre leurs vecteurs directeurs ?

A. π

Faux.
Des axes confondus donnent l'identité.

B. $\dfrac{\pi}{4}$

Juste.

Juste : $2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

C. $\dfrac{\pi}{2}$

Faux.

Deux axes perpendiculaires donnent un demi-tour.

D. $-\dfrac{\pi}{4}$

Faux.

Ce choix donne le quart de tour indirect.

Correction

Le théorème sur deux symétries d'axes sécants donne $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = \mathcal{R}(\Omega, 2\varphi)$, où φ mesure $(\vec{u}, \vec{u}')$.

Il faut donc :

$$2\varphi \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

On prend $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. La mesure $\dfrac{\pi}{4} + \pi$ convient aussi : elle donne la même droite Δ'.

Le théorème précédent fabrique une rotation avec deux miroirs. On le lit maintenant à l'envers : une rotation étant donnée, on cherche deux miroirs.

Pourquoi est-ce vrai ? On choisit le premier axe, puis on trace le second à l'angle $\dfrac{\theta}{2}$. Un point repéré par une distance et un angle orienté donne ce second axe.

Théorème : Décomposition d'une rotation en deux symétries axiales

Soit $r = \mathcal{R}(\Omega, \theta)$ et Δ une droite quelconque passant par Ω, de vecteur directeur $\vec{u}$.

- Soit Δ' la droite passant par Ω de vecteur directeur $\vec{u}'$, où $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$. Alors $r = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.
- Soit Δ'' la droite passant par Ω de vecteur directeur $\vec{u}''$, où $(\vec{u}'', \vec{u}) \equiv \dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$. Alors $r = S_{\Delta} \circ S_{\Delta''}$.

Ainsi, toute rotation est la composée de deux symétries axiales dont les axes passent par son centre, l'un des deux axes pouvant être choisi.

Démonstration

Étape 1. D'après le point défini par une distance et un angle orienté, il existe un point P' tel que $\Omega P' = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega P'}) \equiv \dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$; le vecteur $\vec{u}' = \overrightarrow{\Omega P'}$ est non nul, et la droite Δ' existe. De même, il existe un vecteur non nul $\vec{u}''$ tel que $(\vec{u}, \vec{u}'') \equiv -\dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$, c'est-à-dire $(\vec{u}'', \vec{u}) \equiv \dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$.

Étape 2. Les droites Δ et Δ' passent par Ω et $\dfrac{\theta}{2}$ est une mesure de $(\vec{u}, \vec{u}')$. Par le théorème sur la composée de deux symétries axiales d'axes passant par un même point, $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = \mathcal{R}\left(\Omega, 2 \times \dfrac{\theta}{2}\right) = r$.

Étape 3. Le même théorème, appliqué aux droites Δ'' puis Δ, dans cet ordre, donne $S_{\Delta} \circ S_{\Delta''} = \mathcal{R}\left(\Omega, 2 \times \dfrac{\theta}{2}\right) = r$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve n'a que deux idées.

D'abord, le second axe existe : un point repéré par une distance et un angle orienté donne un vecteur directeur à l'angle $\dfrac{\theta}{2}$.

Ensuite, le théorème sur deux axes passant par un même point double cet angle : on retrouve θ.

Le premier axe est libre, pourvu qu'il passe par le centre.

Un axe imposé

Vérifie : D'où vient le second axe ?

Dans la preuve, l'étape 1 construit le vecteur $\vec{u}'$. Quel résultat garantit son existence ?

A. La réciproque d'une rotation.
Faux.
La preuve n'utilise aucune réciproque.

B. La médiatrice d'un segment.
Faux.
Aucun segment n'intervient dans la construction de l'axe.

C. Le point repéré par une distance et un angle orienté.
Juste.
Juste : il donne un point P' tel que $\Omega P' = 1$, à l'angle voulu.

D. La composée de deux symétries d'axes sécants.
Faux.
Ce théorème sert à l'étape 2, une fois l'axe construit.

Correction
À l'étape 1, on veut un vecteur non nul $\vec{u}'$ tel que $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$.

Le résultat sur le point repéré par une distance et un angle orienté fournit un point P' tel que $\Omega P' = 1$ et :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega P'}) \equiv \frac{\theta}{2}\ [2\pi].$$

On pose $\vec{u}' = \overrightarrow{\Omega P'}$.

Exemple : décomposer un quart de tour

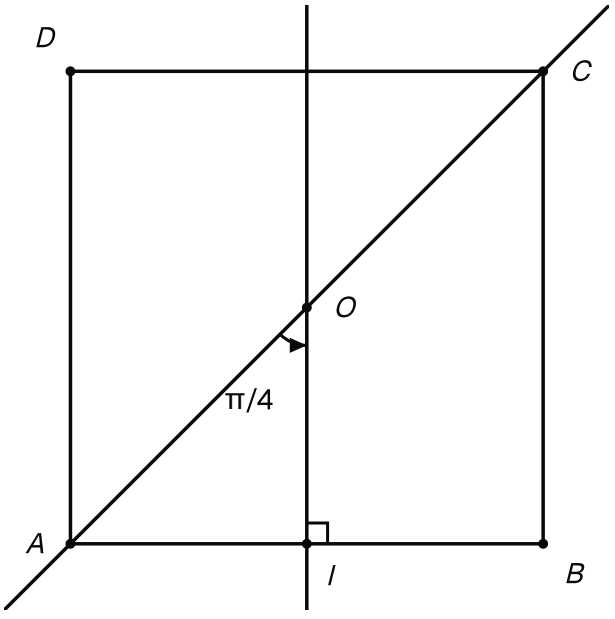
Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, I le milieu de $[AB]$ et $r = \mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$. On impose le premier axe (AC), dirigé par $\overrightarrow{OA}$.

Second axe. Le triangle OAB est isocèle en O : sa médiane (OI) est aussi bissectrice. Comme $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, on obtient :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

Décomposition. D'après le théorème de décomposition, $r = S_{(OI)} \circ S_{(AC)}$.

Contrôle. On a $S_{(AC)}(A) = A$, puis $S_{(OI)}(A) = B$, car (OI) est la médiatrice de $[AB]$. On retrouve $r(A) = B$.



Le quart de tour de centre O est la composée des symétries d'axes (AC) puis (OI) : l'angle orienté de OA vers OI vaut π/4.

Méthode : décomposer une rotation en deux symétries

1. **Choisir** un axe Δ passant par le centre, adapté à la figure : un côté, une diagonale, la droite de deux centres.
2. **Construire** l'autre axe, passant aussi par le centre, à l'angle $\frac{\theta}{2}$ de Δ.
3. **Écrire** la composée dans le bon ordre : la symétrie appliquée en premier est écrite à droite.

Rédaction attendue. « Soit Δ' la droite passant par Ω de vecteur directeur $\vec{u}'$, où $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$. D'après le théorème de décomposition, $r = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$. »

Attention : deux fois l'angle des axes

✗ « Pour décomposer $\mathcal{R}\left(\Omega, \dfrac{\pi}{2}\right)$, je prends deux axes perpendiculaires en Ω. »

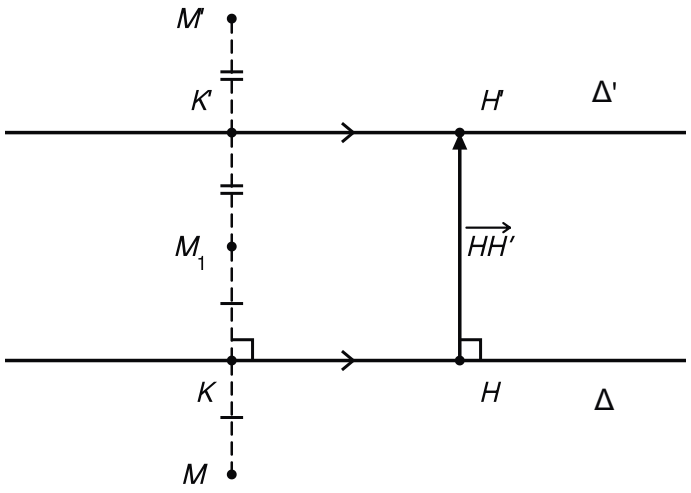
✓ L'angle de la rotation est le **double** de l'angle des axes.

Deux axes perpendiculaires donnent $\mathcal{R}(\Omega, \pi)$, un demi-tour. Pour un quart de tour, les axes font un angle de $\dfrac{\pi}{4}$.

Deux miroirs parallèles

Et si les deux miroirs sont parallèles ? S'ils sont distincts, ils n'ont aucun point commun : rien ne reste fixe, la figure glisse.

Pourquoi est-ce vrai ? Les deux symétries agissent sur une même perpendiculaire aux axes. Chacune double un écart mesuré sur cette perpendiculaire. La relation de Chasles additionne ces deux écarts.



Avec deux axes parallèles Δ et Δ', le point M glisse jusqu'à M' perpendiculairement aux axes, d'un vecteur double du vecteur HH'.

Propriété : Composée de deux symétries axiales d'axes parallèles

Soit Δ et Δ' deux droites parallèles, H un point de Δ et H' le point d'intersection de Δ' avec la perpendiculaire à Δ passant par H. Alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{HH'}$.

En particulier, si $\Delta' = \Delta$, alors $H' = H$ et $S_\Delta \circ S_\Delta$ est l'identité du plan.

Démonstration

Étape 1. Soit M un point, $M_1 = S_\Delta(M)$ et $M' = S_{\Delta'}(M_1)$. Soit K le milieu de $[MM_1]$ et K' celui de $[M_1M']$: par définition d'une symétrie axiale, K est le pied de la perpendiculaire à Δ passant par M_1, et K' celui de la perpendiculaire à Δ' passant par M_1. Comme $\Delta' \parallel \Delta$, ces deux perpendiculaires sont la même droite.

Étape 2. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{KM_1} + 2\overrightarrow{M_1K'} = 2\overrightarrow{KK'}$.

Étape 3. Si $\Delta' = \Delta$, alors $K' = K$ et $H' = H$. Sinon, $K \neq K'$ et $H \neq H'$; les droites (KK') et (HH') sont perpendiculaires à Δ, donc parallèles, avec K, H sur Δ et K', H' sur Δ'. Si $K = H$, alors $K' = H'$; si $K \neq H$, $HKK'H'$ est un parallélogramme. Dans tous les cas, $\overrightarrow{KK'} = \overrightarrow{HH'}$, donc $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{HH'}$ pour tout point M.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve suit M sur la perpendiculaire aux axes qui passe par M_1. Les milieux K et K' des deux segments sont sur cette perpendiculaire.

La relation de Chasles donne :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{KK'}.$$

Un parallélogramme montre enfin que $\overrightarrow{KK'} = \overrightarrow{HH'}$: le vecteur ne dépend pas de M.

Exemple : deux axes parallèles

Soit Δ et Δ' deux droites parallèles distantes de 3 cm. Soit $H \in \Delta$, et H' le point de Δ' tel que (HH') soit perpendiculaire à Δ : $HH' = 3$ cm.

Alors $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{HH'}$. Ce vecteur a pour longueur 6 cm ; il est perpendiculaire aux axes et dirigé de Δ vers Δ'.

Dans l'autre ordre, $S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{H'H}$.

À toi de décomposer

Vérifie : Des points fixes ?

Soit Δ et Δ' deux droites parallèles distinctes. Combien de points fixes la composée $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ a-t-elle ?

A. Un seul point fixe.

Faux.

Deux droites parallèles distinctes n'ont aucun point commun qui resterait fixe.

B. Tous les points de Δ.

Faux.

Un point de Δ est fixé par S_{Δ}, mais pas par $S_{\Delta'}$.

C. Tous les points du plan.

Faux.

Ce serait l'identité, obtenue seulement avec deux axes confondus.

D. Aucun point fixe.

Juste.

Juste : une translation de vecteur non nul ne fixe aucun point.

Correction

D'après le théorème sur deux axes parallèles, $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{HH'}$.

Les droites sont distinctes, donc $H' \neq H$ et ce vecteur n'est pas nul.

Une translation de vecteur non nul déplace chaque point : la composée n'a aucun point fixe.

À toi : Rédige une décomposition

Soit ABC un triangle équilatéral direct, et I le milieu de $[BC]$. Rédige une décomposition de $\mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$ en deux symétries axiales, la première ayant pour axe (AB). Contrôle ta réponse sur l'image de B. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique le théorème de décomposition : le second axe fait avec le premier la moitié de l'angle de la rotation.

Indice 2

Le second axe passe par A ; un vecteur directeur $\vec{u}'$ vérifie $(\overrightarrow{AB}, \vec{u}') \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Indice 3

Point délicat : l'ordre d'écriture ; la symétrie d'axe (AB) s'écrit à droite.

Réponse

Soit $r = \mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$.

Second axe. Le triangle est direct, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. La médiane (AI) est aussi bissectrice, donc :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi].$$

Décomposition. D'après le théorème de décomposition, $r = S_{(AI)} \circ S_{(AB)}$.

Contrôle. On a $S_{(AB)}(B) = B$, puis $S_{(AI)}(B) = C$, car (AI) est la médiatrice de $[BC]$. On retrouve $r(B) = C$.

Ce qu'une rotation conserve

Une figure qui tourne sans se déformer

Devine : Une longueur après un tour

Un segment $[AB]$ mesure 5 cm. On le fait tourner d'un quart de tour autour d'un point Ω situé hors de la droite (AB). Selon toi, que mesure son image $[A'B']$?

A. 5 cm, quel que soit Ω.

Juste.
Juste : une rotation ne déforme pas la figure.

B. Cela dépend de la distance ΩA.

Faux.
Le centre décide où arrive le segment, pas sa longueur.

C. $5\sqrt{2}$ cm, à cause du quart de tour.

Faux.
Le facteur $\sqrt{2}$ apparaît dans la diagonale d'un carré, pas ici.

D. 10 cm, car le segment double.

Faux.
Une rotation n'agrandit rien.

Correction
Tu vas démontrer qu'une rotation conserve les distances : $A'B' = AB = 5$ cm, quel que soit le centre.

Elle conserve aussi les angles orientés. Une figure qui tourne garde sa forme, ses longueurs et son sens.

Une figure qui tourne ne se déforme pas : ses longueurs et ses angles restent les mêmes. Seule sa position change.

Pourquoi est-ce vrai ? Une rotation est la composée de deux symétries axiales. Chacune conserve les distances et change un angle orienté en son opposé. Deux changements de signe se compensent.

Théorème : Conservation des distances et des angles orientés

Soit r une rotation, et A, B, C, D quatre points d'images A', B', C', D' par r.

- $A'B' = AB$: une rotation conserve les distances.

- Si $A \neq B$ et $C \neq D$, alors $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$: une rotation conserve les angles orientés.

Démonstration

Étape 1. Par la décomposition d'une rotation en deux symétries axiales, il existe deux droites Δ et Δ' telles que $r = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$. Notons A_1, B_1, C_1, D_1 les images de A, B, C, D par S_{Δ} ; leurs images par $S_{\Delta'}$ sont A', B', C', D'.

Étape 2. Une symétrie axiale conserve les distances : $A'B' = A_1B_1 = AB$.

Étape 3. Si $A \neq B$ et $C \neq D$, alors $A_1 \neq B_1$ et $C_1 \neq D_1$, puisque $A_1B_1 = AB$ et $C_1D_1 = CD$. Une symétrie axiale change un angle orienté en son opposé, deux fois de suite :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv -(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{C_1D_1}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi].$$

Vérifie : Deux changements de signe

Dans la preuve, l'étape 3 montre que les angles orientés sont conservés. Comment, alors que chaque symétrie axiale les change ?

A. Le centre de la rotation reste fixe.

Faux.
Le centre ne joue aucun rôle dans l'étape 3.

B. Chaque symétrie change le signe : les deux changements se compensent.

Juste.
Juste : l'opposé de l'opposé est l'angle de départ.

C. La relation de Chasles annule les deux symétries.

Faux.
La relation de Chasles n'intervient pas dans cette étape.

D. La conservation des distances suffit pour les angles orientés.

Faux.
Les distances donnent l'angle géométrique, pas son sens.

Correction
À l'étape 1, on écrit $r = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.

À l'étape 3, la première symétrie change $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ en son opposé. La seconde change à nouveau le signe. Donc :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi].$$

Le même angle pour tous les vecteurs

Fais tourner une feuille de papier autour d'une punaise. Chaque segment dessiné sur la feuille tourne du même angle que la feuille.

Pourquoi est-ce vrai ? On fait passer l'angle par le centre Ω, avec la relation de Chasles. L'angle du milieu est celui de la rotation. Les deux autres se compensent, car la rotation conserve les angles orientés.

Théorème : Propriété caractéristique d'une rotation

Soit $r = \mathcal{R}(\Omega, \theta)$, et M, N deux points d'images M' et N' par r. Alors $M'N' = MN$ et, si $M \neq N$,

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv \theta \ [2\pi].$$

Seule cette implication est établie ici : pour montrer qu'une application est une rotation, on utilise la définition, ou l'un des théorèmes sur les composées (de deux symétries axiales, de deux rotations).

Démonstration

Étape 1. Une rotation conserve les distances : $M'N' = MN$. Supposons désormais $M \neq N$.

Étape 2. Si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$ et $N \neq \Omega$: la définition d'une rotation donne $(\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega N'}) \equiv \theta \ [2\pi]$.

Étape 3. Si $M \neq \Omega$, alors $\Omega M' = \Omega M \neq 0$ et $M'N' = MN \neq 0$. Par la relation de Chasles des angles orientés,

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}) + (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) + (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{M'N'}) \ [2\pi].$$

Le terme du milieu vaut θ par définition. La rotation transforme Ω, M, N en Ω, M', N' et conserve les angles orientés : $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MN}) \equiv -(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}) \ [2\pi]$. D'où $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv \theta \ [2\pi]$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La conservation des distances et des angles vient de la décomposition en deux symétries.

La propriété caractéristique s'en déduit : on fait passer l'angle $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})$ par le centre, avec la relation de Chasles. Le terme central vaut θ. Les deux autres termes sont opposés, car la rotation conserve les angles orientés.

Le cas $M = \Omega$ se traite à part, par la définition.

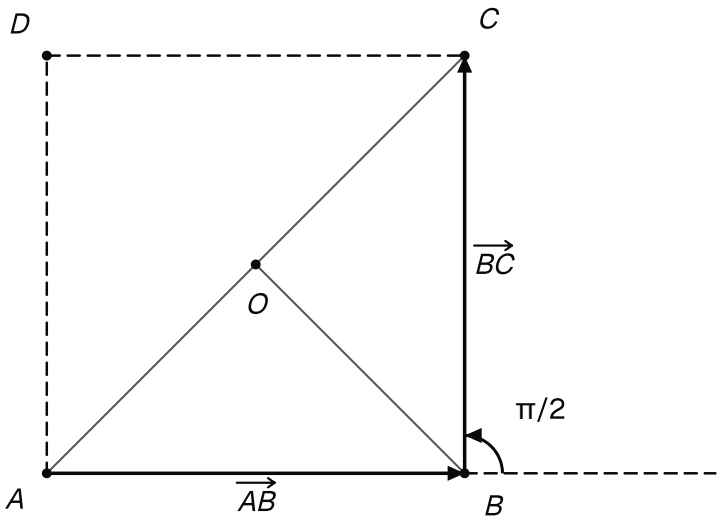
Exemple : l'angle entre un vecteur et son image

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, et $r = \mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$. On sait que $r(A) = B$ et $r(B) = C$.

La propriété caractéristique donne $BC = AB$ et :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi].$$

Chaque côté du carré se déduit du précédent par un quart de tour. Plus généralement, pour tous points $M \neq N$, le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ fait l'angle $\frac{\pi}{2}$ avec $\overrightarrow{MN}$.



Le quart de tour de centre O envoie le côté [AB] sur le côté [BC] : le vecteur BC fait un angle droit direct avec le vecteur AB.

Montrer qu'un point est une image

Méthode : démontrer qu'un point est l'image d'un autre

1. **Nommer** la rotation : son centre Ω et son angle θ.
2. **Vérifier** les deux conditions : $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$. On les lit en général sur un triangle équilatéral, un carré ou un triangle isocèle rectangle.
3. **Conclure** par la définition. Si $M = \Omega$, conclure directement : $r(\Omega) = \Omega$.

Rédaction attendue. « Soit r la rotation de centre Ω et d'angle θ. On a $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$, donc $M' = r(M)$. »

Vérifie : Un triangle isocèle rectangle

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A, tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Quelle rotation envoie B sur C ?

A. $\mathcal{R}\left(B, -\frac{\pi}{2}\right)$

Faux.

Une rotation de centre B fixe B : elle ne l'envoie pas sur C.

B. $\mathcal{R}(A, \pi)$

Faux.

Le demi-tour de centre A envoie B sur son symétrique par rapport à A.

C. $\mathcal{R}\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$

Juste.

Juste : $AC = AB$, et l'angle donné est celui de la définition.

D. $\mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$

Faux.

Le signe de l'angle est donné par l'énoncé : le triangle est indirect.

Correction

Le triangle est isocèle en A : $AC = AB$. L'énoncé donne :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Par définition, C est l'image de B par $\mathcal{R}\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$. Le signe de l'angle dit que le triangle ABC est indirect.

Exemple **: un triangle équilatéral indirect**

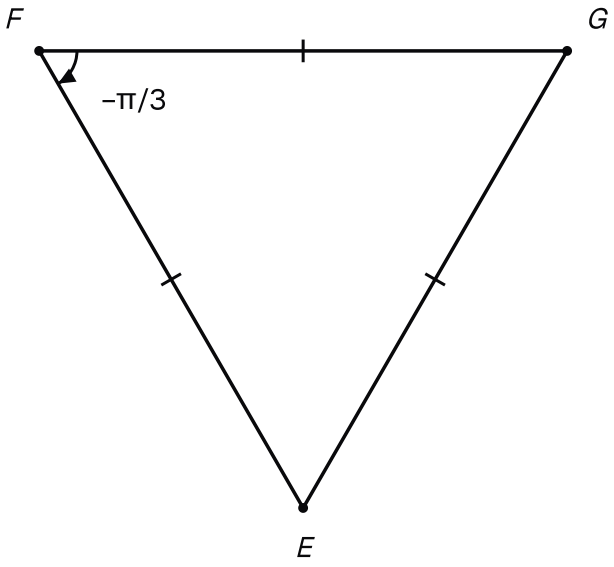
Soit EFG un triangle équilatéral indirect : on lit E, F, G dans le sens des aiguilles d'une montre. Cherchons la rotation de centre F qui envoie G sur E.

Distance. Le triangle est équilatéral : $FE = FG$.

Angle. L'angle géométrique en F mesure $\frac{\pi}{3}$. Le triangle EFG est indirect, donc :

$$(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Conclusion. Par définition, E est l'image de G par $\mathcal{R}\left(F, -\frac{\pi}{3}\right)$.



Triangle équilatéral EFG indirect : l'arc fléché de [FG) vers [FE) tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, et l'angle orienté vaut -π/3.

Le sens de la figure

Attention : sens direct ou indirect

✗ « ABC est équilatéral, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. »

✓ L'angle géométrique vaut $\frac{\pi}{3}$, mais son signe dépend du sens de la figure.

- Si ABC est direct, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
- S'il est indirect, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Vérifie l'orientation avant de choisir le signe de l'angle d'une rotation.

À toi : Rédige une égalité de longueurs

Soit OAB et OCD deux triangles équilatéraux directs qui ont le sommet O en commun, avec $A \neq C$. Rédige la preuve de $AC = BD$, puis donne une mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche une rotation de centre O qui envoie A sur B.
Indice 2
Vérifie qu'elle envoie aussi C sur D.
Indice 3
Point délicat : l'angle entre un vecteur et son image vient de la propriété caractéristique.

Réponse

Soit $r = \mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$.

Images. Le triangle OAB est équilatéral et direct : $OB = OA$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $r(A) = B$. De même, $r(C) = D$.

Longueurs. Une rotation conserve les distances : $BD = AC$.

Angle. Comme $A \neq C$, la propriété caractéristique donne :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Image d'une figure

Milieux, barycentres, alignements

Devine : L'image d'un milieu

Soit r une rotation, I le milieu d'un segment $[AB]$, et A', B', I' les images de A, B, I. Selon toi, que peux-tu dire de I' ?

A. $I' = I$, car I est au milieu.

Faux.

Seul le centre de la rotation est fixe ; I n'a aucune raison de l'être.

B. Le point I' est sur le cercle de diamètre $[A'B']$.

Faux.

Le milieu est le centre de ce cercle, pas un point du cercle.

C. On ne peut rien dire sans connaître le centre.

Faux.

Le centre fixe la position de la figure image, pas les relations entre ses points.

D. Le point I' est le milieu de $[A'B']$.

Juste.

Juste : une rotation conserve les milieux.

Correction

On a $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Tu vas démontrer qu'une rotation conserve une telle relation :

$$\overrightarrow{A'I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}.$$

Donc I' est le milieu de $[A'B']$, quel que soit le centre.

Une rotation ne déforme pas la figure : un point situé au tiers d'un segment reste au tiers du segment image.

Pourquoi est-ce vrai ? Une relation $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CE}$ dit deux choses : un rapport de longueurs, et une direction avec un sens. La rotation conserve les longueurs, et les angles orientés gardent la direction et le sens.

Propriété : Conservation des relations vectorielles et du barycentre

Soit r une rotation, et A, B, C, E quatre points d'images A', B', C', E' par r.

- Pour tout réel k : si $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CE}$, alors $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{C'E'}$.
- Si $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$, alors $r(G) = \mathrm{Bar}\{(A',\alpha),(B',\beta)\}$. En particulier, l'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$.

Démonstration

Étape 1. Si $k = 0$ ou $C = E$, alors $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, donc $A = B$, puis $A' = B'$ et $C' = E'$ si $C = E$ (distances conservées) : les deux membres sont nuls.

Étape 2. Sinon, $k \neq 0$, $C \neq E$ et $A \neq B$. Les distances étant conservées, $A'B' = AB = |k|\,CE = |k|\,C'E'$. Les angles orientés étant conservés, $(\overrightarrow{C'E'}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$, de mesure 0 si $k > 0$ et π si $k < 0$. Deux vecteurs non nuls dont l'angle a pour mesure 0 (resp. π) sont colinéaires de même sens (resp. de sens contraires) : $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'E'}$ sont donc colinéaires, de même sens si et seulement si $k > 0$, et de rapport de normes $|k|$: $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{C'E'}$.

Étape 3. Le barycentre G vérifie $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$. Par l'étape 2, $G' = r(G)$ vérifie $\overrightarrow{A'G'} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{A'B'}$: c'est le barycentre de (A',α) et (B',β).

Exemple : alignement et barycentre

Soit r une rotation, et A, B, C trois points tels que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$. Leurs images vérifient :

$$\overrightarrow{A'C'} = 3\overrightarrow{A'B'}.$$

Les points A', B', C' sont donc alignés.

Rappel : $G = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$, avec $\alpha + \beta \neq 0$, signifie :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$$

La somme $2 + 1 = 3$ est non nulle ; soit $G = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,1)\}$. Alors $r(G) = \mathrm{Bar}\{(A',2),(B',1)\}$. Le point $r(G)$ est sur $[A'B']$, au tiers de la longueur $A'B'$ à partir de A'.

Fais tourner un cercle tracé sur une feuille : il reste un cercle, de même rayon, et son centre a tourné comme tous les autres points. Une droite tournée reste une droite.

Pourquoi est-ce vrai ? L'image d'un point à la distance ρ du centre I est à la distance ρ de I', image de I, car la rotation conserve les distances. Pour une droite, on emploie la conservation des relations vectorielles.

Droites, segments, cercles

Propriété : Image d'une droite, d'un segment, d'un cercle

Soit r une rotation, A et B deux points distincts d'images A' et B', I un point d'image I' et ρ un réel strictement positif.

- L'image de la droite (AB) par r est la droite $(A'B')$; l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- L'image du cercle de centre I et de rayon ρ est le cercle de centre I' et de rayon ρ.

Démonstration

Étape 1. Comme $A'B' = AB \neq 0$, la droite $(A'B')$ existe. Soit M un point de (AB) : il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$. Par la conservation des relations vectorielles, $\overrightarrow{A'M'} = t\,\overrightarrow{A'B'}$, donc $M' \in (A'B')$; si de plus $0 \leq t \leq 1$, $M' \in [A'B']$.

Étape 2. Réciproquement, soit Q un point de $(A'B')$, avec $\overrightarrow{A'Q} = t\,\overrightarrow{A'B'}$. La réciproque r^{-1} est une rotation qui transforme A' en A et B' en B : le point $M = r^{-1}(Q)$ vérifie $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ et $r(M) = Q$. L'image de (AB) est donc exactement $(A'B')$, et de même pour le segment.

Étape 3. Les distances étant conservées par r et par r^{-1}, $IM = \rho$ si et seulement si $I'M' = \rho$: le même raisonnement montre que l'image du cercle est le cercle de centre I' et de rayon ρ.

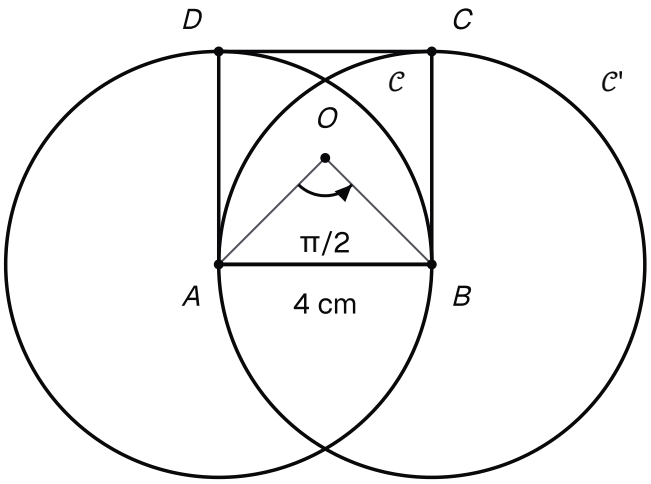
Exemple : l'image d'un cercle

Soit $ABCD$ un carré direct de côté 4 cm et de centre O, et $\mathcal{C}$ le cercle de centre A passant par B.

Soit $r = \mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$: on sait que $r(A) = B$ et $r(B) = C$.

L'image de $\mathcal{C}$ est le cercle de centre B et de même rayon $AB = 4$ cm. Il passe par C, image de B.

Le segment $[AB]$ a pour image le segment $[BC]$.



Le quart de tour de centre O transporte le cercle de centre A passant par B sur le cercle de même rayon 4 cm, de centre B et passant par C.

Méthode : déterminer l'image d'une figure

1. **Droite** : construire les images de deux de ses points ; ou l'image d'un point et la direction, qui fait l'angle θ avec celle de départ.
2. **Segment** : construire les images de ses extrémités.
3. **Cercle** : construire l'image du centre ; le rayon ne change pas.

Rédaction attendue. « La rotation r transforme A en A' et B en B'. D'après l'image d'une droite par une rotation, l'image de (AB) est $(A'B')$. »

Vérifie : L'image d'une diagonale

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, et $r = \mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$. Quelle est l'image de la droite (AC) par r ?

A. La droite (BD).

Juste.

Juste : $r(A) = B$ et $r(C) = D$.

B. La droite (AC) elle-même.

Faux.

C'est l'image par le demi-tour de centre O, pas par le quart de tour.

C. La droite (AB).

Faux.

Il faut les images de deux points de la droite : ici B et D.

D. La perpendiculaire à (AC) passant par A.

Faux.

L'image passe par $r(A) = B$, et non par A.

Correction

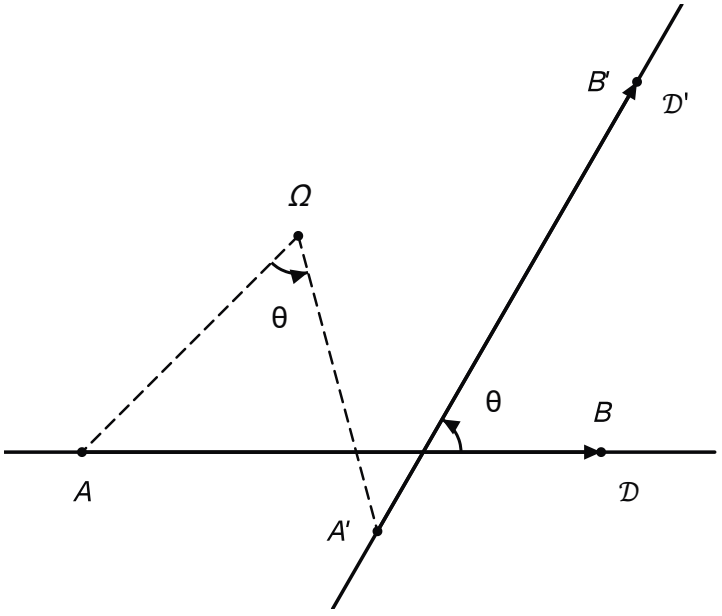
La rotation envoie A sur B et C sur D. D'après l'image d'une droite par une rotation, l'image de (AC) est (BD).

On retrouve que les diagonales d'un carré sont perpendiculaires : l'image fait l'angle $\frac{\pi}{2}$ avec la droite de départ.

Parallélisme et orthogonalité

Une droite et son image font entre elles l'angle de la rotation. Pour un quart de tour, elles sont donc perpendiculaires.

Pourquoi est-ce vrai ? Deux points d'une droite ont pour images deux points de la droite image. La propriété caractéristique donne l'angle des deux vecteurs. La conservation des angles orientés transporte le parallélisme et l'orthogonalité.



Une droite $\mathcal{D}$ et son image $\mathcal{D}$' par la rotation de centre Ω et d'angle θ : les vecteurs AB et A'B' font entre eux l'angle θ.

Propriété : Parallélisme, orthogonalité, angle d'une droite et de son image

Soit $r = \mathcal{R}(\Omega, \theta)$, et $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ deux droites d'images $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}'_1$ par r.

- Si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{D}$, d'images A' et B' par r, alors $\overrightarrow{A'B'}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$, et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

- Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ sont parallèles, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}'_1$ sont parallèles ; si elles sont perpendiculaires, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}'_1$ sont perpendiculaires.

Démonstration

Étape 1. Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$. L'image de $\mathcal{D} = (AB)$ est $(A'B')$, donc $\overrightarrow{A'B'}$ dirige $\mathcal{D}'$, et la propriété caractéristique donne $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Étape 2. Soit C et E deux points distincts de $\mathcal{D}_1$, d'images C' et E' : par l'étape 1 appliquée à $\mathcal{D}_1$, $\overrightarrow{C'E'}$ dirige $\mathcal{D}'_1$. La rotation conserve les angles orientés : $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'E'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE})\ [2\pi]$, donc aussi modulo π.

Étape 3. Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs forment un angle de mesure 0 modulo π ; perpendiculaires si et seulement si cet angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ modulo π (angle géométrique droit). Ces deux conditions se transmettent donc de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}'_1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Ces trois preuves reposent sur deux conservations.

La longueur et l'angle orienté conservés transportent toute relation $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CE}$, donc les milieux et les barycentres.

Une droite se décrit par une telle relation : son image est une droite. La réciproque, qui est une rotation, montre qu'on obtient toute la droite.

Enfin, un angle conservé modulo 2π l'est aussi modulo π.

Exemple : une orthogonalité par un quart de tour

Soit A, B, C trois points distincts, et E, F deux points tels que :

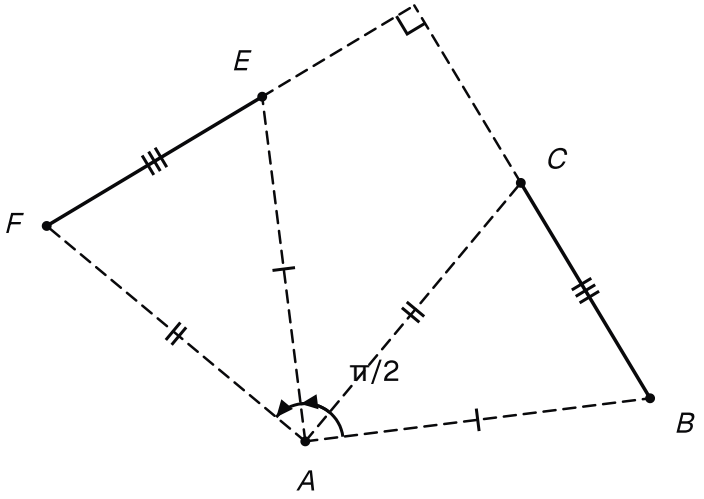
- $AE = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$;
- $AF = AC$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit $r = \mathcal{R}\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$. Par définition, $r(B) = E$ et $r(C) = F$.

Par la propriété caractéristique, $EF = BC$ et :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EF}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Donc les droites (BC) et (EF) sont perpendiculaires, et $EF = BC$.



Le quart de tour de centre A envoie B sur E et C sur F : le segment [EF] a la longueur de [BC] et lui est perpendiculaire.

Vérifie : Une droite et son image

Soit $r = \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)$, et $\mathcal{D}$ une droite d'image $\mathcal{D}'$. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ peuvent-elles être parallèles ?

A. Oui, si $\mathcal{D}$ est loin de Ω.

Faux.

La distance au centre ne change pas l'angle entre une droite et son image.

B. Non : elles font un angle de $\frac{\pi}{3}$ modulo π.

Juste.

Juste : $\frac{\pi}{3}$ n'est pas nul modulo π.

C. Oui, si $\mathcal{D}$ passe par Ω.

Faux.

Une droite passant par Ω tourne aussi de $\frac{\pi}{3}$: son image la coupe en Ω.

D. Oui, toujours : une rotation conserve le parallélisme.

Faux.

Elle transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles ; elle ne rend pas une droite parallèle à son image.

Correction

Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$, d'images A' et B'. Le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ dirige $\mathcal{D}'$, et :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Cet angle n'est pas nul modulo π : les deux droites ne sont jamais parallèles.

Une droite et son image ne sont parallèles que pour un angle de rotation égal à 0 ou π modulo 2π.

Rédiger comme en devoir

Méthode : démontrer une propriété de figure à l'aide d'une rotation

1. **Repérer** une rotation qui transforme une partie de la figure en une autre : angle $\pm\dfrac{\pi}{3}$ pour un triangle équilatéral, quart de tour pour un carré.
2. **Écrire** les images de deux ou trois points, en justifiant chacune.
3. **Conclure** par une propriété conservée : longueur, angle θ entre un vecteur et son image, orthogonalité, milieu ou alignement.

Rédaction attendue. « Soit r la rotation de centre Ω et d'angle θ. On a $r(A) = A'$ car …, et $r(B) = B'$ car … Une rotation conserve les distances, donc $A'B' = AB$. »

À toi : Rédige une orthogonalité

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$. Rédige la preuve de $OJ = OI$, puis montre que les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche une rotation de centre O qui envoie A sur B et B sur C.
Indice 2
L'image du milieu de $[AB]$ est le milieu du segment image.
Indice 3
Point délicat : l'angle entre $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ vient de la définition.

Réponse
Soit $r = \mathcal{R}\left(O, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Images des sommets. Le carré est direct de centre O : $OB = OA$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc $r(A) = B$. De même, $r(B) = C$.

Image du milieu. Une rotation conserve les milieux : $r(I)$ est le milieu de $[BC]$, c'est-à-dire J.

Conclusion. Comme $I \neq O$, la définition donne $OJ = OI$ et :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Donc les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

Remarque : Coin devoir : « montrer que deux segments sont égaux et perpendiculaires »

En devoir surveillé, l'énoncé demande par exemple : « Montrer que $BE = CD$ et que les droites (BE) et (CD) sont perpendiculaires. »

La rédaction attendue nomme la rotation, avec son centre et son angle. Elle justifie l'image de chaque point par les deux conditions de la définition.

Elle cite enfin la propriété conservée employée : distance, angle entre un vecteur et son image, ou milieu.

Composer deux rotations de centres distincts

Deux centres différents

Devine : Deux quarts de tour

Soit Ω_1 et Ω_2 deux points distincts, $r_1 = \mathcal{R}\left(\Omega_1, \frac{\pi}{2}\right)$ et $r_2 = \mathcal{R}\left(\Omega_2, \frac{\pi}{2}\right)$. Selon toi, qu'est-ce que $r_2 \circ r_1$?

A. Une translation, car les centres sont distincts.

Faux.

La somme des angles vaut π, qui n'est pas nul modulo 2π.

B. Un quart de tour autour de Ω_2.

Faux.

Les deux angles s'ajoutent, comme avec un centre commun.

C. Un demi-tour autour d'un troisième point.

Juste.

Juste : les angles s'ajoutent, mais le centre change.

D. Le demi-tour de centre Ω_1.

Faux.

Le point Ω_1 n'est pas fixe : r_2 le déplace.

Correction

Les centres sont distincts, et :

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \not\equiv 0\ [2\pi].$$

Le théorème que tu vas démontrer dit que $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle π : un demi-tour.

Son centre n'est pas Ω_1, car r_1 fixe Ω_1 et r_2 le déplace. L'exemple de cette section construit ce centre.

Avec deux centres différents et des angles non nuls, aucun point n'est fixé par les deux rotations. Il faut une idée.

Pourquoi est-ce vrai ? On décompose chaque rotation en deux symétries axiales, avec la droite des centres comme axe commun. Les deux symétries du milieu sont identiques : elles se détruisent. Il reste deux symétries, d'axes sécants ou parallèles.

Théorème : Composée de deux rotations de centres distincts

Soit $r_1 = \mathcal{R}(\Omega_1, \theta_1)$ et $r_2 = \mathcal{R}(\Omega_2, \theta_2)$ deux rotations de centres distincts.

- Si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.
- Si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0\ [2\pi]$, alors $r_2 \circ r_1$ est une translation.

Démonstration

Étape 1. Comme $\Omega_1 \neq \Omega_2$, la droite $\Delta = (\Omega_1\Omega_2)$ existe ; elle est dirigée par $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$. Par la décomposition d'une rotation, $r_1 = S_\Delta \circ S_{\Delta_1}$, où Δ_1 passe par Ω_1 et est dirigée par $\vec{u}_1$ avec $(\vec{u}_1, \vec{u}) \equiv \dfrac{\theta_1}{2}\ [2\pi]$; et $r_2 = S_{\Delta_2} \circ S_\Delta$, où Δ_2 passe par Ω_2 et est dirigée par $\vec{u}_2$ avec $(\vec{u}, \vec{u}_2) \equiv \dfrac{\theta_2}{2}\ [2\pi]$.

Étape 2. Comme $S_\Delta \circ S_\Delta$ est l'identité, $r_2 \circ r_1 = S_{\Delta_2} \circ S_\Delta \circ S_\Delta \circ S_{\Delta_1} = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$. Par la relation de Chasles, $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \equiv \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}\ [2\pi]$.

Étape 3. Si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors $\dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2} \not\equiv 0\ [\pi]$: $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires, et Δ_1, Δ_2 se coupent en un point Ω_3. La composée de deux symétries d'axes passant par Ω_3 donne $r_2 \circ r_1 = \mathcal{R}(\Omega_3, \theta_1 + \theta_2)$. Sinon, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires, $\Delta_1 \parallel \Delta_2$, et, par le théorème sur la composée de deux symétries axiales d'axes parallèles, $r_2 \circ r_1$ est une translation.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout repose sur un bon choix d'axe : la droite $(\Omega_1\Omega_2)$ sert aux deux décompositions.

On écrit $r_1 = S_\Delta \circ S_{\Delta_1}$ et $r_2 = S_{\Delta_2} \circ S_\Delta$. Au milieu, $S_\Delta \circ S_\Delta$ est l'identité.

La relation de Chasles donne l'angle de Δ_1 et Δ_2 : $\dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$. Sécants, ces axes donnent une rotation ; parallèles, une translation.

Trouver le centre

Vérifie : Les symétries du milieu

Dans la preuve, l'étape 2 simplifie $S_{\Delta_2} \circ S_\Delta \circ S_\Delta \circ S_{\Delta_1}$. Pourquoi les deux symétries du milieu disparaissent-elles ?

A. Car deux symétries axiales commutent toujours.
Faux.
C'est faux en général : l'ordre des symétries compte.

B. Car Δ passe par les deux centres.
Faux.
Ce choix d'axe rend la simplification possible, mais il ne l'explique pas.

C. Car S_Δ est une rotation d'angle π.

Faux.

Une symétrie axiale n'est pas une rotation : elle change le sens des angles.

D. Car $S_\Delta \circ S_\Delta$ est l'identité du plan.

Juste.

Juste : une symétrie axiale appliquée deux fois ramène chaque point à sa place.

Correction

Les propriétés de la symétrie axiale disent que $S_\Delta \circ S_\Delta$ est l'identité du plan. Donc :

$$r_2 \circ r_1 = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}.$$

C'est pour obtenir cette simplification qu'on prend le même axe Δ, la droite des centres, dans les deux décompositions.

Méthode : composer deux rotations

1. **Même centre** : additionner les angles ; la composée est la rotation de même centre et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.
2. **Centres distincts** : calculer $\theta_1 + \theta_2$. Si cette somme n'est pas nulle modulo 2π, la composée est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$; sinon, c'est une translation.
3. **Trouver** le centre, ou le vecteur, en décomposant chaque rotation avec la droite des centres comme axe commun.

Rédaction attendue. « Les centres sont distincts et $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0\ [2\pi]$, donc $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$. »

Exemple : deux quarts de tour directs

Soit Ω_1 et Ω_2 tels que $\Omega_1\Omega_2 = 2$, $r_1 = \mathcal{R}\left(\Omega_1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $r_2 = \mathcal{R}\left(\Omega_2, \dfrac{\pi}{2}\right)$. La somme vaut π : $r_2 \circ r_1$ est un demi-tour.

Axes. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ et $\Delta = (\Omega_1\Omega_2)$. Fais la figure.

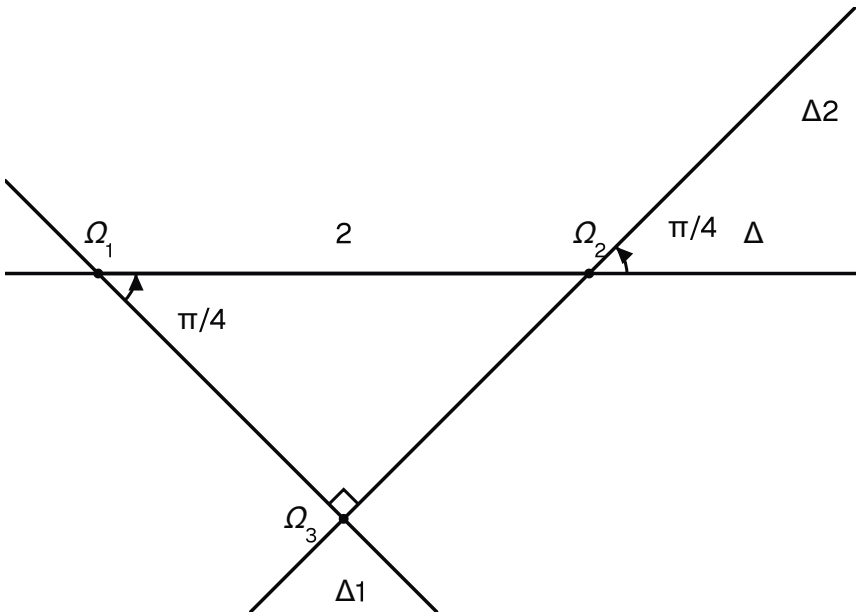
- Δ_1 est la droite passant par Ω_1 dirigée par $\vec{u}_1$, avec $(\vec{u}_1, \vec{u}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
- Δ_2 est la droite passant par Ω_2 dirigée par $\vec{u}_2$, avec $(\vec{u}, \vec{u}_2) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Le théorème de décomposition donne $r_1 = S_\Delta \circ S_{\Delta_1}$ et $r_2 = S_{\Delta_2} \circ S_\Delta$, donc :

$$r_2 \circ r_1 = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}.$$

Centre. Comme $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, les axes Δ_1 et Δ_2 se coupent en Ω_3. Le triangle $\Omega_1\Omega_3\Omega_2$ a deux angles de $\dfrac{\pi}{4}$: il est rectangle isocèle en Ω_3, et direct.

Conclusion. On obtient $r_2 \circ r_1 = \mathcal{R}(\Omega_3, \pi)$, avec $\Omega_3\Omega_1 = \sqrt{2}$.



Les axes Δ1 et Δ2, tracés à π/4 de la droite des centres, se coupent en Ω3, centre du demi-tour r2 ∘ r1.

Quand les angles se compensent

Attention : composée de rotations de centres distincts

✗ « $\mathcal{R}\left(\Omega_2, -\frac{\pi}{2}\right) \circ \mathcal{R}\left(\Omega_1, \frac{\pi}{2}\right)$ a un angle nul : c'est l'identité. »

✓ Les centres sont distincts et la somme des angles est nulle : la composée est une translation.

Elle envoie Ω_1 sur le point $P = \mathcal{R}\left(\Omega_2, -\frac{\pi}{2}\right)(\Omega_1)$. Ce point est distinct de Ω_1, car Ω_2 est le seul point fixe de cette rotation.

C'est la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega_1 P}$, non nul. Une translation de vecteur non nul ne fixe aucun point : ce n'est pas l'identité, et elle n'a pas de centre.

Vérifie : Une somme égale à 2π

Soit $\Omega_1 \neq \Omega_2, r_1 = \mathcal{R}\left(\Omega_1, \frac{2\pi}{3}\right)$ et $r_2 = \mathcal{R}\left(\Omega_2, \frac{4\pi}{3}\right)$. Quelle est la nature de $r_2 \circ r_1$?

A. Une translation de vecteur non nul.

Juste.

Juste : $\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi \equiv 0\ [2\pi]$.

B. L'identité du plan.

Faux.

L'identité viendrait d'un centre commun ; ici, $r_2 \circ r_1$ déplace Ω_1.

C. Une rotation d'angle 2π et de centre Ω_2.

Faux.

Une rotation d'angle 2π est l'identité, et Ω_2 n'est pas fixe.

D. Une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Faux.

Les angles s'ajoutent : calcule leur somme modulo 2π.

Correction

Les centres sont distincts, et :

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi \equiv 0\ [2\pi].$$

D'après le théorème, $r_2 \circ r_1$ est une translation.

Ce n'est pas l'identité : $r_1(\Omega_1) = \Omega_1$, et r_2 déplace Ω_1, car Ω_2 est son seul point fixe.

À toi : Rédige une composée de centres distincts

Soit ABC un triangle équilatéral direct. Rédige la détermination de $\mathcal{R}\left(B, -\dfrac{\pi}{3}\right) \circ \mathcal{R}\left(A, \dfrac{\pi}{3}\right)$, en cherchant l'image de A. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule la somme des angles, et regarde si les centres sont distincts.

Indice 2

La première rotation fixe A ; cherche l'image de A par la seconde.

Indice 3

Point délicat : le signe de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ dans un triangle direct.

Réponse

Nature. Les centres A et B sont distincts, et $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 0$: la composée t est une translation.

Image de A. On a $\mathcal{R}\left(A, \dfrac{\pi}{3}\right)(A) = A$. Le triangle ABC est équilatéral et direct : $BC = BA$ et :

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Donc $\mathcal{R}\left(B, -\dfrac{\pi}{3}\right)(A) = C$, et $t(A) = C$.

Conclusion. La composée t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Déterminer une rotation

Deux points et leurs images

Devine : Une rotation dans un carré

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O. Une rotation r envoie A sur B et B sur C. Selon toi, quels sont son centre et son angle ?

A. Le centre O et l'angle π.

Faux.

Le demi-tour envoie A sur C, pas sur B.

B. Le centre O et l'angle $\frac{\pi}{2}$.

Juste.

Juste : c'est le quart de tour direct de centre O.

C. Le centre B et l'angle $\frac{\pi}{2}$.

Faux.

Une rotation de centre B fixe B : elle ne l'envoie pas sur C.

D. Le centre O et l'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Faux.

Ce quart de tour envoie A sur D, car le carré est direct.

Correction

L'angle se lit sur un vecteur et son image. Le carré est direct, donc :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi].$$

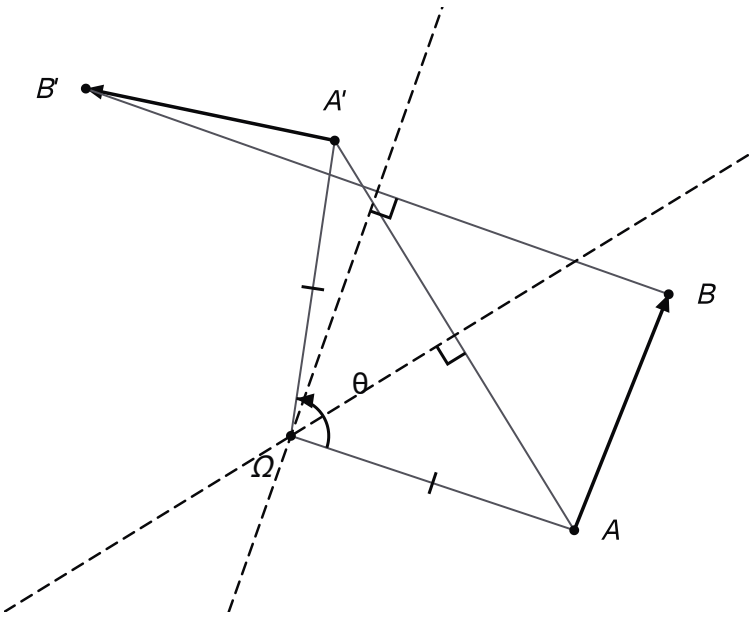
Le centre est à la même distance de A et de B, et de B et de C : c'est O.

On vérifie que $\mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ envoie bien A sur B et B sur C.

Deux points et leurs images suffisent à connaître une rotation.

L'angle se lit sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et son image, par la propriété caractéristique. Le centre est à égale distance d'un point et de son image : il est sur la médiatrice de $[AA']$.

Le théorème suivant assure qu'une telle rotation existe, et qu'elle est unique.



Deux points A et B, leurs images A' et B' : le centre Ω est sur les médiatrices de [AA'] et de [BB'], et l'angle θ se lit autour de Ω.

Théorème : Rotation transformant deux points donnés en deux points donnés

Soit A, B, A', B' quatre points tels que $A \neq B$, $A'B' = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi]$, avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$. Il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$; son angle est θ, et son centre Ω vérifie $\Omega A = \Omega A'$ et $\Omega B = \Omega B'$.

Démonstration

Idée de la preuve. **Existence** : on construit deux symétries axiales. La première, d'axe la médiatrice de $[AA']$ (ou une droite passant par A si $A = A'$), envoie A sur A' et B sur un point B_1 tel que $A'B_1 = A'B'$. La seconde, d'axe passant par A' (la médiatrice de $[B_1B']$ si $B_1 \neq B'$), fixe A' et envoie B_1 sur B'. Leur composée envoie A sur A' et B sur B' ; c'est une rotation ou une translation, et une translation donnerait $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, donc un angle nul : c'est une rotation, d'angle θ par la propriété caractéristique. **Unicité** : si deux rotations conviennent, elles ont toutes deux l'angle θ ; la composée de l'une avec la réciproque de l'autre fixe A et B, et c'est l'identité ou une translation, donc l'identité. Étapes omises : la vérification détaillée de chaque cas particulier ($A = A'$, $B_1 = B'$), l'identification de la composée par les deux théorèmes sur les symétries axiales et, pour l'unicité, son identification par les théorèmes sur la composée de deux rotations, de même centre ou de centres distincts.

Remarque : Une preuve esquissée

Cette preuve est une esquisse : elle donne les idées, pas tous les détails.

Elle omet la vérification de chaque cas particulier, quand $A = A'$ ou quand le point intermédiaire construit dans la preuve est égal à B'. Elle omet aussi l'identification détaillée des composées : par les deux théorèmes sur les symétries axiales pour l'existence, par les théorèmes sur la composée de deux rotations pour l'unicité.

Retiens l'idée : deux symétries pour l'existence, une composée pour l'unicité.

La méthode

Méthode : déterminer une rotation par deux points et leurs images

1. **Vérifier** que $A'B' = AB$; sinon, aucune rotation ne convient.
2. **Calculer** l'angle : $\theta \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})\ [2\pi]$, par la propriété caractéristique.
3. **Trouver** le centre Ω : $\Omega A = \Omega A'$ et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) \equiv \theta\ [2\pi]$; il est sur la médiatrice de $[AA']$ si $A \neq A'$. Contrôler sur le second point.

Rédaction attendue. « On a $A'B' = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi]$, avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$. Il existe donc une unique rotation qui envoie A sur A' et B sur B' ; son angle est θ. »

Exemple : un sommet et un milieu dans un carré

Soit $ABCD$ un carré direct de côté 2 et de centre O, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$. Cherchons la rotation r telle que $r(A) = B$ et $r(I) = J$.

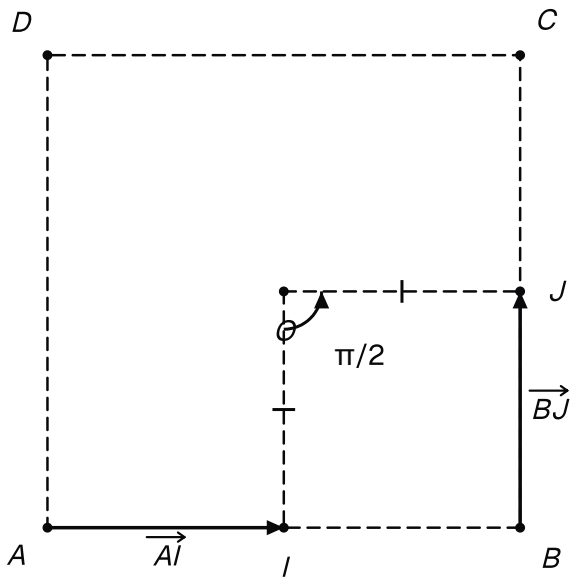
Longueurs. Les milieux donnent $AI = BJ = 1$.

Angle. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ ont la direction et le sens de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, donc :

$$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BJ}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Centre. La rotation $\mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ envoie A sur B et B sur C, donc I sur J, car les milieux sont conservés. Par unicité, $r = \mathcal{R}\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$.

On aurait aussi pu chercher le centre sur la médiatrice de $[AB]$, comme dans la méthode.



Dans le carré ABCD de côté 2, le quart de tour de centre O envoie A sur B et le milieu I de [AB] sur le milieu J de [BC].

Vérifie : Une longueur qui change

Soit A, B, A', B' quatre points tels que $AB = 3$ et $A'B' = 4$. Combien de rotations envoient A sur A' et B sur B' ?

A. Deux, d'angles opposés.

Faux.

Aucune rotation ne peut changer une longueur.

B. Une infinité.

Faux.

Aucune rotation ne transforme un segment de longueur 3 en un segment de longueur 4.

C. Aucune.

Juste.

Juste : une rotation conserve les distances.

D. Une seule.

Faux.

L'unicité n'a de sens qu'avec $A'B' = AB$.

Correction

Une rotation conserve les distances : si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$, alors $A'B' = AB$.

Ici $4 \neq 3$: aucune rotation ne convient. C'est pourquoi la méthode commence par comparer les longueurs.

Deux erreurs à éviter

Attention : ni coordonnées ni nombres complexes

✗ « Je place la figure dans un repère et je calcule les coordonnées de $r(A)$ par une formule. »

✓ Dans ce chapitre, une image se justifie par la définition, la propriété caractéristique ou une propriété conservée. Aucune formule de coordonnées n'est employée.

L'écriture complexe d'une rotation sera étudiée en 2BAC SM.

Trouve l'erreur : Le mauvais angle

Pour trouver l'angle de la rotation qui envoie A sur A' et B sur B', un élève écrit : « $\theta \equiv (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'})\ [2\pi]$ ». Où est l'erreur ?

A. Il fallait écrire $(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{AA'})$.

Faux.

Échanger les vecteurs ne corrige rien : ce ne sont pas les bons vecteurs.

B. Il fallait écrire le modulo π.

Faux.

Un angle de rotation se donne modulo 2π ; l'erreur est ailleurs.

C. Il n'y a pas d'erreur.

Faux.

Dans un carré direct $PQRS$ de centre O, le quart de tour direct de centre O envoie P sur Q et R sur S. Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ relient un point à son image, mais $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}) \equiv \pi\ [2\pi]$, et non $\frac{\pi}{2}$.

D. L'angle se lit entre $\overrightarrow{AB}$ et son image $\overrightarrow{A'B'}$.

Juste.

Juste : c'est la propriété caractéristique.

Correction

La propriété caractéristique compare un vecteur et son image :

$$\theta \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})\ [2\pi].$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ relient un point à son image : leur angle n'a pas de raison d'être θ.

Dans un carré direct $PQRS$ de centre O, le quart de tour direct de centre O envoie P sur Q et R sur S. Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ relient un point à son image, mais $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}) \equiv \pi\ [2\pi]$, et non $\frac{\pi}{2}$.

Rédiger comme en devoir

À toi : Rédige une détermination

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O. Rédige la détermination de la rotation r telle que $r(A) = B$ et $r(B) = C$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Compare AB et BC.
Indice 2
Lis l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ dans le triangle direct.
Indice 3
Point délicat : le centre est à égale distance de A et de B, et de B et de C.

Réponse
Longueurs. Le triangle est équilatéral : $BC = AB$.

Angle. Il est direct, donc :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

Cet angle n'est pas nul : il existe une unique rotation r telle que $r(A) = B$ et $r(B) = C$, et son angle est $\frac{2\pi}{3}$.

Centre. Le centre O du triangle vérifie $OB = OA$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $\mathcal{R}\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$ envoie A sur B. De même, elle envoie B sur C.

Conclusion. Par unicité, $r = \mathcal{R}\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$.

Remarque **: Coin devoir : « déterminer une rotation par deux points et leurs images »**

En devoir surveillé, la question s'écrit par exemple : « Déterminer la rotation r telle que $r(A) = B$ et $r(B) = C$. »

La rédaction attendue compare d'abord les longueurs. Elle donne l'angle par la propriété caractéristique, avec son modulo.

Elle désigne le centre et vérifie, pour un point, les deux conditions de la définition. Elle cite enfin l'unicité de la rotation.

Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir

- Une rotation se nomme par son centre **et** son angle. Pour $M \neq \Omega$, $M' = r(M)$ si et seulement si $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.
- La réciproque de $\mathcal{R}(\Omega, \theta)$ est $\mathcal{R}(\Omega, -\theta)$; avec un même centre, les angles s'ajoutent.

- Deux symétries d'axes sécants donnent une rotation d'angle double de l'angle des axes ; d'axes parallèles, une translation.
- Une rotation conserve distances, angles orientés, milieux, barycentres, alignements, parallélisme et orthogonalité.
- Propriété caractéristique : $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.
- Centres distincts : rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$, ou translation si cette somme est nulle modulo 2π.

Le mot du prof. Tu sais maintenant construire une image, reconnaître une rotation dans une figure et composer des rotations. Surtout, tu sais **démontrer** chaque propriété que tu emploies, sans aucun calcul de coordonnées. Tu retrouveras la rotation à l'examen de 2BAC SM, avec l'écriture complexe d'une rotation.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « La rotation dans le plan » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)