BURHAN

Résumé : Produit vectoriel

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-vectoriel/resume

Chapitre	Semestre
Produit vectoriel	Semestre 2

L'essentiel du chapitre

Ce Résumé rassemble le produit vectoriel et ses usages : orienter l'espace, fabriquer un vecteur orthogonal à deux vecteurs, calculer une aire, tester un alignement, écrire l'équation d'un plan.

Le **cube** de référence s'appelle $ABCDEFGH$ et a pour arête 1. Sa face $ABCD$ est en bas, sa face $EFGH$ en haut ; ses arêtes verticales sont $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$. Le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est orthonormé direct.

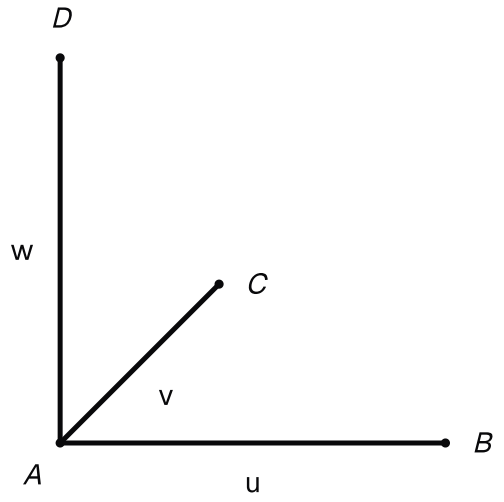
Trace aussi ta propre figure à main levée, et ne tire jamais une propriété d'un dessin en perspective.

> **À retenir : L'idée en trois lignes**
>
> Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un **vecteur** :
>
> - orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;
> - nul exactement quand $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;
> - de norme égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Les propriétés du produit vectoriel sont **admises** dans ce chapitre : chacune est signalée ci-dessous. Les cinq applications (aire, alignement, plan, distance à une droite, intersection de deux plans) sont démontrées dans le cours ; ici, on ne garde que leurs énoncés et leurs méthodes.

Orienter l'espace

> **Définition : Orientation de l'espace ; base et repère directs**
>
> On oriente l'espace par la convention du **bonhomme d'Ampère**.
>
> - Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de l'espace, A un point, et B, C, D les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$. Un observateur se tient debout le long de la droite (AD), les pieds en A et la tête du côté de D ; il regarde vers B.
> - La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **directe** si l'observateur voit C à sa gauche ; elle est **indirecte** s'il voit C à sa droite.
> - Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormé direct** si sa base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée et directe.



Base directe (u, v, w) : debout le long de (AD), la tête vers D, l'observateur regarde B et voit C à sa gauche.

Propriété : Changer l'ordre ou le sens des vecteurs d'une base

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base **directe**. Alors :

1. les bases $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ et $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ sont directes ;
2. les bases $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$, $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ et $(\vec{u}, \vec{v}, -\vec{w})$ sont indirectes.

Remarque

Ce résultat est admis. Une permutation circulaire garde l'orientation ; un échange de deux vecteurs, ou un changement de sens, l'inverse.

Méthode : Reconnaître une base directe

1. **Installe** le bonhomme d'Ampère sur le troisième vecteur : pieds à l'origine commune, tête à l'extrémité.
2. **Tourne-le** vers l'extrémité du premier vecteur.
3. **Repère** le deuxième vecteur : à sa gauche, la base est directe ; à sa droite, elle est indirecte.
4. **Gagne du temps** : compare la base à une base directe connue, par permutation circulaire, échange ou changement de sens.

Exemple : Deux bases du cube

Dans le cube, la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est directe.

- $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ en est une permutation circulaire : elle est **directe**.
- $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ échange le premier et le troisième vecteur : elle est **indirecte**.

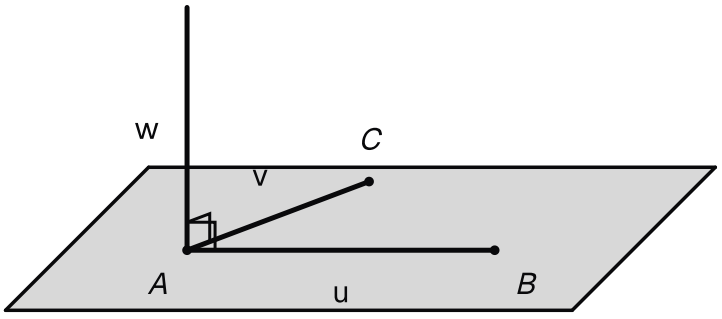
Mime-le avec la main droite : pouce sur le premier vecteur, index sur le deuxième ; le majeur indique le sens du troisième pour une base directe.

Le produit vectoriel

Définition : Produit vectoriel de deux vecteurs

L'espace est orienté. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, défini ainsi.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Sinon, soit A, B, C les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, et $\theta \in]0, \pi[$ la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$. Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur $\vec{w}$ tel que :
  1. $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;
  2. la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe ;
  3. $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\theta$.



Le vecteur w, issu de A, est orthogonal à u et à v, et la base (u, v, w) est directe.

À retenir : En clair

Trois informations fixent $\vec{u} \wedge \vec{v}$ quand $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires :

- sa **direction** : orthogonale au plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- son **sens** : celui qui rend la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ directe ;

- sa **longueur** : $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$, avec $\theta \in]0,\pi[$, donc $\sin\theta > 0$.

Exemple : Le cube, par la définition

Dans le cube, cherchons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$. Les deux arêtes sont orthogonales et de longueur 1, donc $\theta = \frac{\pi}{2}$. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ convient :

- il est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AD}$;
- la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est directe ;
- $\|\overrightarrow{AE}\| = 1 = 1 \times 1 \times \sin\frac{\pi}{2}$.

Par unicité, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$.

Attention : Réel ou vecteur ?

Ne confonds pas les deux produits. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un **réel**, lié au cosinus ; $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un **vecteur**, dont la norme est liée au sinus.

Un produit scalaire nul signale l'orthogonalité ; un produit vectoriel nul signale la colinéarité.

Les règles de calcul (admises)

Propriété : Produit vectoriel nul

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. En particulier, $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$.

Remarque

Ce résultat est admis. Il sert à prouver un alignement : un produit vectoriel nul signale deux vecteurs colinéaires.

Propriété : Antisymétrie et bilinéarité

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace et tout réel α :

1. $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$;
2. $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha\,(\vec{u} \wedge \vec{v})$;
3. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Remarque

Ce résultat est admis. Grâce à lui, on développe un produit vectoriel comme un produit de sommes, sans jamais échanger les facteurs.

Exemple : Un développement

Développons $(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})$ par bilinéarité :

$$\begin{aligned}&(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})\\&=\vec{u}\wedge\vec{u}-\vec{u}\wedge\vec{v}\\&\quad+\vec{v}\wedge\vec{u}-\vec{v}\wedge\vec{v}\\&=\vec{0}-\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{0}\\&=-2\,(\vec{u}\wedge\vec{v}).\end{aligned}$$

Le produit nul efface $\vec{u}\wedge\vec{u}$ et $\vec{v}\wedge\vec{v}$; d'après l'antisymétrie, admise, $\vec{v}\wedge\vec{u}=-(\vec{u}\wedge\vec{v})$.

Attention : L'ordre compte

Le produit vectoriel n'est **pas commutatif** : $\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$, alors que $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$.

Il n'est pas non plus associatif : $(\vec{i}\wedge\vec{i})\wedge\vec{j}=\vec{0}$, mais $\vec{i}\wedge(\vec{i}\wedge\vec{j})=\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$. Garde l'ordre des facteurs à chaque ligne.

Calculer en coordonnées

Propriété : Produits vectoriels des vecteurs d'une base orthonormée directe

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée **directe**. Alors

$$\begin{aligned}\vec{i}\wedge\vec{j}&=\vec{k},\\\vec{j}\wedge\vec{k}&=\vec{i},\\\vec{k}\wedge\vec{i}&=\vec{j},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{j}\wedge\vec{i}&=-\vec{k},\\\vec{k}\wedge\vec{j}&=-\vec{i},\\\vec{i}\wedge\vec{k}&=-\vec{j}.\end{aligned}$$

Remarque

Ce résultat est admis. Pour le retrouver, fais tourner $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ en cercle : dans le sens du cercle on obtient le troisième, dans l'autre sens son opposé.

Théorème : Coordonnées du produit vectoriel

Dans une base orthonormée **directe** $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$. Alors

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k},$$

c'est-à-dire que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées

$$(yz'-zy',\ zx'-xz',\ xy'-yx').$$

Remarque

Ce résultat est admis. Attention : cette formule exige une base orthonormée **directe**.

Méthode : Coordonnées d'un produit vectoriel

1. **Annonce** le repère : « dans le repère orthonormé direct… ».
2. **Aligne** les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ en deux colonnes.
3. **Calcule** trois déterminants 2×2 en masquant la première, la deuxième, puis la troisième ligne ; place un signe moins devant le deuxième.
4. **Contrôle** : le résultat a un produit scalaire nul avec $\vec{u}$ et avec $\vec{v}$.

Exemple : Un calcul complet

Dans un repère orthonormé direct, soit $\vec{u}(3,2,-2)$ et $\vec{v}(2,1,-2)$. Notons (X,Y,Z) les coordonnées de $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$:

$$\begin{aligned}X&=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & -2\end{vmatrix}\\ &=2\times(-2)-(-2)\times 1=-2,\\ Y&=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix}\\ &=-\left(3\times(-2)-(-2)\times 2\right)=2,\\ Z&=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ &=3\times 1-2\times 2=-1.\end{aligned}$$

Donc $\vec{w}(-2,2,-1)$. Contrôle par deux produits scalaires :

$$\begin{aligned}\vec{w}\cdot\vec{u} &= (-2)\times 3 + 2\times 2\\ &\quad + (-1)\times(-2)\\ &= -6+4+2 = 0,\\ \vec{w}\cdot\vec{v} &= (-2)\times 2 + 2\times 1\\ &\quad + (-1)\times(-2)\\ &= -4+2+2 = 0.\end{aligned}$$

Norme : $\|\vec{w}\| = \sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Attention : Un repère direct, toujours

La formule n'est valable que dans une base orthonormée **directe**. Dans la base indirecte $(\vec{j},\vec{i},\vec{k})$, elle donnerait $\vec{j}\wedge\vec{i} = \vec{k}$, alors que $\vec{j}\wedge\vec{i} = -\vec{k}$.

Écris toujours que le repère est orthonormé direct avant de calculer.

Attention : Le signe du milieu

La deuxième coordonnée est $zx' - xz'$: c'est l'opposé du déterminant obtenu en masquant la deuxième ligne.

Un oubli de ce signe se repère dans la plupart des cas : l'un des deux produits scalaires de contrôle cesse d'être nul. Mais si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont tous deux une deuxième coordonnée nulle, le contrôle ne le voit pas : relis alors le signe du milieu.

Aire d'un triangle, points alignés

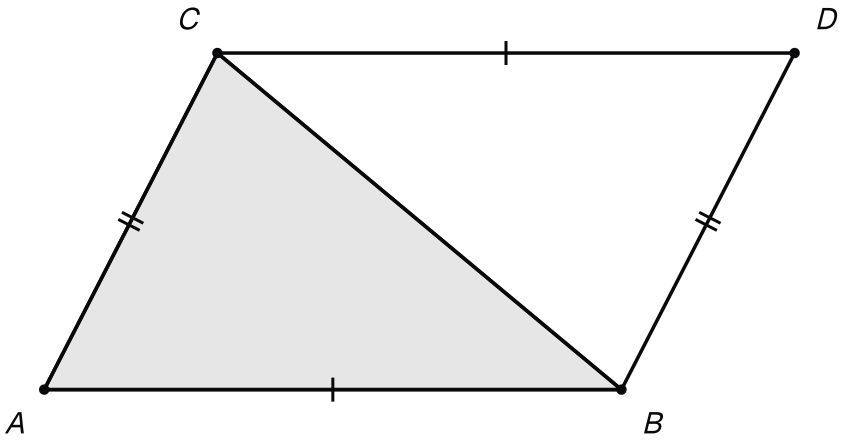
Propriété : Aire d'un triangle et d'un parallélogramme

Soit A, B, C trois points **non alignés**, et D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. L'aire du triangle ABC et celle du parallélogramme $ABDC$ valent

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$$

et

$$\mathcal{A}_{ABDC} = \|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|.$$



Le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABDC construit sur [AB] et [AC].

Propriété : Trois points alignés

Trois points A, B, C de l'espace sont alignés si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Méthode : Aire d'un triangle, alignement

1. **Calcule** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans un repère orthonormé direct.
2. **Calcule** $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. S'il est nul, les points sont alignés : il n'y a pas de triangle.
3. **Prends** sa norme, racine de la somme des carrés des coordonnées.
4. **Divise** par 2 pour le triangle ; garde la norme entière pour le parallélogramme.

Exemple : Une aire

Dans un repère orthonormé direct, soit $A(1,-1,0)$, $B(3,1,1)$ et $C(0,-3,0)$. On a $\overrightarrow{AB}(2,2,1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,-2,0)$. Notons (X,Y,Z) les coordonnées de $\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 0 - 1 \times (-2) = 2, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\left(2 \times 0 - 1 \times (-1)\right) = -1, \\ Z &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-2) - 2 \times (-1) = -2. \end{aligned}$$

Contrôle :

$$\begin{aligned}\vec{w}\cdot\overrightarrow{AB} &= 2\times 2+(-1)\times 2\\ &\quad +(-2)\times 1\\ &= 4-2-2=0,\\ \vec{w}\cdot\overrightarrow{AC} &= 2\times(-1)+(-1)\times(-2)\\ &\quad +(-2)\times 0\\ &= -2+2+0=0.\end{aligned}$$

La norme vaut $\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$: A, B, C ne sont pas alignés et $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{3}{2}$.

Exemple : Un alignement

Dans un repère orthonormé direct, soit $A(1,2,-1)$, $B(3,1,0)$ et $C(7,-1,2)$. Ici $\overrightarrow{AB}(2,-1,1)$ et $\overrightarrow{AC}(6,-3,3)$:

$$\begin{aligned}X &= \begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}\\ &= (-1)\times 3-1\times(-3)=0,\\ Y &= -\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 3\end{vmatrix}\\ &= -\left(2\times 3-1\times 6\right)=0,\\ Z &= \begin{vmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{vmatrix}\\ &= 2\times(-3)-(-1)\times 6=0.\end{aligned}$$

Le produit vectoriel est nul : les trois points sont alignés. En effet, $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$.

Attention : La moitié

La norme $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$ mesure le **parallélogramme** construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$; le triangle ABC en vaut la **moitié**.

Et pas de norme sans racine carrée.

Plan (ABC) et distance à une droite

Propriété : Vecteur normal au plan (ABC)

Soit A, B, C trois points **non alignés**. Le vecteur $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Méthode : Équation du plan (ABC)

1. **Calcule** $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ dans un repère orthonormé direct ; un résultat non nul prouve que A, B, C ne sont pas alignés.

2. **Simplifie** : un vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ reste normal au plan.
3. **Écris** $ax+by+cz+d=0$ avec ses coordonnées, puis trouve d grâce au point A.
4. **Vérifie** l'équation avec B et avec C.

Exemple : Un plan par trois points

Dans un repère orthonormé direct, soit $A(0,1,2)$, $B(-1,3,0)$ et $C(3,-2,2)$. On a $\overrightarrow{AB}(-1,2,-2)$ et $\overrightarrow{AC}(3,-3,0)$; coordonnées (X,Y,Z) de leur produit vectoriel :

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2\times 0-(-2)\times(-3) \\ &= -6, \\ Y &= -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\left((-1)\times 0-(-2)\times 3\right) \\ &= -6, \\ Z &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\times(-3)-2\times 3 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Le vecteur $(-6,-6,-3)=-3\times(2,2,1)$ n'est pas nul ; on garde $\vec{n}(2,2,1)$.

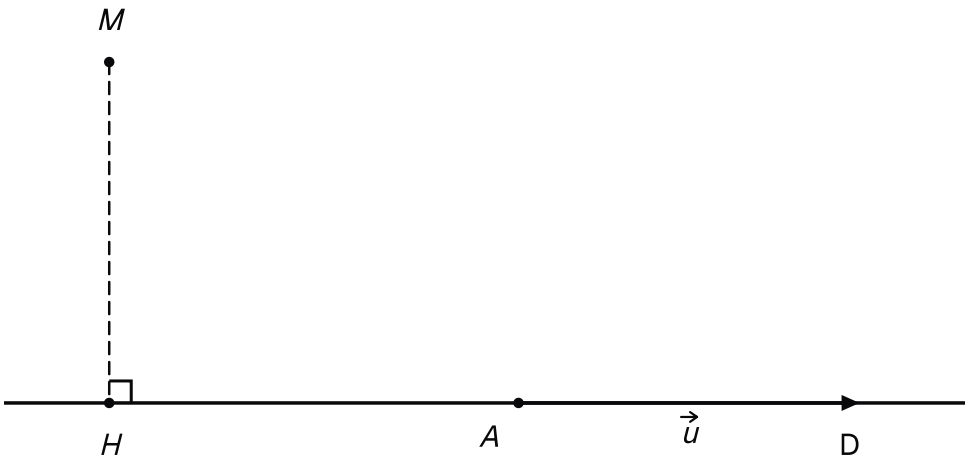
Avec A : $2\times 0+2\times 1+2+d=0$, donc $d=-4$ et (ABC) : $2x+2y+z-4=0$.

Contrôle : $2\times(-1)+2\times 3+0-4=0$ et $2\times 3+2\times(-2)+2-4=0$.

Théorème : Distance d'un point à une droite

Soit $D=D(A,\vec{u})$ une droite, avec $\vec{u}\neq\vec{0}$, et M un point de l'espace. Soit H le projeté orthogonal de M sur D : la **distance** de M à D, notée $d(M,D)$, est la longueur MH. Alors

$$d(M,D)=\frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$



Distance de M à la droite D : la longueur MH, où H est le projeté orthogonal de M sur D.

Méthode : Distance d'un point à une droite

1. **Lis** un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite, par exemple sur une représentation paramétrique.
2. **Calcule** $\overrightarrow{AM}$, puis $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$ dans un repère orthonormé direct.
3. **Divise** la norme obtenue par $\|\vec{u}\|$.
4. **Simplifie** la racine ; si besoin, contrôle avec le projeté H, où $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$.

Exemple : Une distance à une droite

Dans un repère orthonormé direct, la droite D passe par $A(1,0,2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1,2,2)$; soit $M(1,-2,1)$. Alors $\overrightarrow{AM}(0,-2,-1)$ et, avec $\vec{w} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \times 2 - (-1) \times 2 = -2, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -\left(0 \times 2 - (-1) \times 1\right) = -1, \\ Z &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 0 \times 2 - (-2) \times 1 = 2. \end{aligned}$$

Contrôle :

$$\begin{aligned}\vec{w}\cdot\overrightarrow{AM} &= (-2)\times 0 + (-1)\times(-2)\\ &\quad + 2\times(-1)\\ &= 0+2-2=0,\\ \vec{w}\cdot\vec{u} &= (-2)\times 1 + (-1)\times 2\\ &\quad + 2\times 2\\ &= -2-2+4=0.\end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\| &= \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}\\ &= \sqrt{9}=3,\\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3.\end{aligned}$$

D'où $d(M,D)=\dfrac{3}{3}=1$.

Attention : Droite ou plan ?

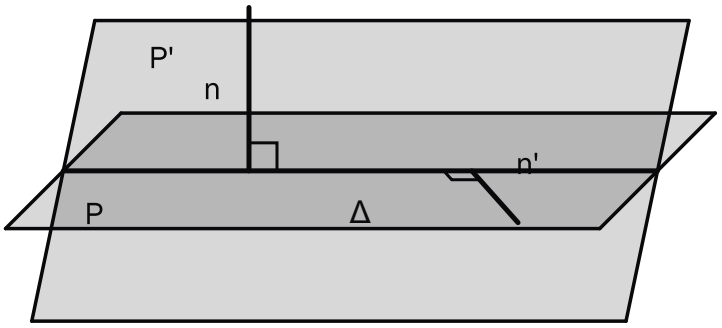
Pour un **plan** $ax+by+cz+d=0$, la distance vaut $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (chapitre précédent).

Pour une **droite**, rien de tel ; on emploie $\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$. Regarde d'abord si l'objet est un plan ou une droite.

Droite d'intersection de deux plans

Propriété : Droite d'intersection de deux plans

Soit P et P' deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, **non colinéaires**. Alors P et P' sont sécants suivant une droite Δ, et $\vec{n}\wedge\vec{n}'$ est un vecteur directeur de Δ.



Deux plans de normales n et n' non colinéaires se coupent selon une droite Δ, orthogonale à n et à n'.

Méthode : Intersection de deux plans

1. **Lis** les vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sur les équations ; vérifie qu'ils ne sont pas colinéaires.
2. **Calcule** $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ dans un repère orthonormé direct : il dirige la droite commune.
3. **Cherche** un point commun, par exemple de cote $z = 0$ (possible si la troisième coordonnée de $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ n'est pas nulle), en résolvant un système de deux équations.
4. **Écris** une représentation paramétrique, puis vérifie un deuxième point dans les deux équations.

Exemple : Une droite commune

Dans un repère orthonormé direct, soit $P : x + y + z - 3 = 0$ et $P' : x - y + 2z - 1 = 0$. Les vecteurs normaux $\vec{n}(1, 1, 1)$ et $\vec{n}'(1, -1, 2)$ ne sont pas colinéaires. Coordonnées (X, Y, Z) de $\vec{w} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 2 - 1 \times (-1) = 3, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -\left(1 \times 2 - 1 \times 1\right) = -1, \\ Z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2. \end{aligned}$$

Contrôle :

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{n} &= 3 \times 1 + (-1) \times 1 \\ &\quad + (-2) \times 1 \\ &= 3 - 1 - 2 = 0, \\ \vec{w} \cdot \vec{n}' &= 3 \times 1 + (-1) \times (-1) \\ &\quad + (-2) \times 2 \\ &= 3 + 1 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Avec $z = 0$: $x + y = 3$ et $x - y = 1$, donc $x = 2$ et $y = 1$. D'où

$$\Delta : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = -2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Contrôle avec $t = 1$, point $(5, 0, -2)$: $5 + 0 + (-2) - 3 = 0$ et $5 - 0 + 2 \times (-2) - 1 = 0$.

Pour réviser

Repère orthonormé direct : coordonnées de u ∧ v

$$(yz' - zy',\ zx' - xz',\ xy' - yx')$$

Norme par le sinus

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin\theta$$

Aire du triangle ABC

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

Points alignés

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

Vecteur normal au plan (ABC), points non alignés

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

Distance d'un point à une droite

$$d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Direction de la droite commune à deux plans sécants

$$\vec{n} \wedge \vec{n}'$$

> **À retenir : Coin devoir : rédiger avec un produit vectoriel**
>
> Pour un « montrer que » avec un produit vectoriel :
>
> - annonce le repère orthonormé direct avant tout calcul en coordonnées ;
> - écris les trois déterminants, puis contrôle par deux produits scalaires nuls ;
> - nomme la propriété utilisée (par exemple : « d'après l'antisymétrie du produit vectoriel ») ;
> - conclus par une phrase qui reprend la question.

Le mot du prof : avec ce chapitre, la géométrie de l'espace de l'année se referme. Un seul calcul de déterminants te donne désormais un vecteur normal, une aire, un alignement ou une distance.

Prends le réflexe du contrôle : deux produits scalaires nuls confirment la direction de ton résultat ; l'ordre des facteurs et les déterminants se relisent à part.