BURHAN

Produit vectoriel : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-vectoriel/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Produit vectoriel	Niveau examen	5

Exercice 1 — 10 pts

Problème : Un triangle, son plan et deux distances

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1, 0, 1)$, $B(3, -1, 3)$, $C(1, -1, -1)$ et $D(-3, -3, -1)$. Trace une figure à main levée pour suivre les questions.

1. — 1,5 pts

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{AC}$ et de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Trois déterminants 2×2 ; pense au signe moins devant le deuxième.

2. — 1 pts

Montre que A, B, C ne sont pas alignés, puis calcule l'aire du triangle ABC.

INDICE

Quelle propriété du cours relie l'alignement au produit vectoriel ?

3. — 1,5 pts

Montre que $\vec{n}(2, 2, -1)$ est normal au plan (ABC), puis détermine une équation cartésienne de ce plan.

INDICE

$\vec{n}$ est colinéaire au produit vectoriel de la question 1.

4. — 1,5 pts

Vérifie que D n'appartient pas au plan (ABC), puis calcule la distance $d(D, (ABC))$.

INDICE

Quel résultat du chapitre précédent donne la distance d'un point à un plan ?

5. — 1,5 pts

Calcule la distance du point D à la droite (AB).

INDICE

Quelle formule du cours donne la distance d'un point à une droite ? Il te faut un point et un vecteur directeur de (AB).

6. — 1,5 pts

On note H le projeté orthogonal de D sur (AB), et l'on écrit $\overrightarrow{AH} = t\,\overrightarrow{AB}$. Détermine t et les coordonnées de H, puis retrouve le résultat de la question 5.

INDICE

Écris que $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, avec $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + t\,\overrightarrow{AB}$.

7. 1,5 pts

En déduire l'aire du triangle ABD de deux façons.

INDICE

Quelle hauteur du triangle as-tu obtenue à la question 6 ? Pour l'autre façon, relis la question 5.

Exercice 2 — 10 pts

Problème : Deux plans, leur droite commune et une sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans $P : x - 2y + 2z - 3 = 0$ et $P' : 2x + 2y + z - 6 = 0$, ainsi que le point $\Omega(5, 2, 1)$.

1. — 1 pts

Montre que les plans P et P' sont sécants.

INDICE

Compare les vecteurs normaux lus sur les deux équations.

2. — 1 pts

Montre que les plans P et P' sont perpendiculaires.

INDICE

Deux plans sont perpendiculaires lorsque leurs vecteurs normaux sont orthogonaux (chapitre précédent).

3. — 1,5 pts

Calcule $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ et déduis-en un vecteur directeur $\vec{d}$ de Δ, de coordonnées simples.

INDICE

Par la propriété de l'intersection de deux plans, $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ dirige Δ.

4. — 1,5 pts

Vérifie que le point $A(3, 0, 0)$ appartient à Δ, puis écris une représentation paramétrique de Δ.

INDICE

Un point de Δ est un point commun aux deux plans.

5. — 1,5 pts

Calcule la distance du point Ω à la droite Δ.

INDICE

Quelle formule du cours donne la distance d'un point à une droite ?

6. — 2 pts

Soit S la sphère de centre Ω et de rayon $3\sqrt{2}$. Justifie que Δ coupe S en deux points, puis détermine leurs coordonnées. On note E le point de paramètre positif et F l'autre.

INDICE

Compare $d(\Omega, \Delta)$ au rayon. Pour les points, écris $\Omega M^2 = 18$ avec M de paramètre t.

7. 1,5 pts

Calcule l'aire du triangle ΩEF de deux façons : avec la base $[EF]$, puis avec un produit vectoriel.

INDICE

La hauteur issue de Ω est $d(\Omega, \Delta)$, car E et F sont sur Δ.

Exercice 3 — 10 pts

Problème : Une base orthonormée, son orientation et des produits par les propriétés

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les vecteurs $\vec{u}(2,3,6)$, $\vec{v}(6,2,-3)$ et $\vec{w}(3,-6,2)$, puis on pose

$$\vec{a}=\frac{1}{7}\vec{u},$$
$$\vec{b}=\frac{1}{7}\vec{v},$$
$$\vec{c}=\frac{1}{7}\vec{w}.$$

On admet que $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ est une base de l'espace. Enfin, on considère le point $A(1,1,2)$.

1. — 1 pts

Montre que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont deux à deux orthogonaux et ont la même norme 7. En déduire que la base $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ est orthonormée.

INDICE

Trois produits scalaires et trois normes en coordonnées, dans le repère orthonormé (chapitre précédent).

2. — 1,5 pts

Calcule les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$, puis exprime ce vecteur en fonction de $\vec{w}$.

INDICE

Trois déterminants 2×2, puis compare chaque coordonnée obtenue à celle de $\vec{w}$.

3. — 1,5 pts

En déduire que $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{c}$, puis que la base $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ est indirecte.

INDICE

La bilinéarité sort les coefficients $\frac{1}{7}$. Que dit la définition du produit vectoriel sur l'orientation de la base $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{b})$?

4. — 1,5 pts

Justifie que $(\vec{a},\vec{b},-\vec{c})$ est une base orthonormée directe. Déduis-en $\vec{b}\wedge\vec{c}$ et $\vec{c}\wedge\vec{a}$ en fonction de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$, sans déterminant, puis contrôle le premier résultat en calculant $\vec{v}\wedge\vec{w}$ en coordonnées.

INDICE

Applique les produits des vecteurs d'une base orthonormée directe à la base $(\vec{a},\vec{b},-\vec{c})$, dans l'ordre circulaire, puis sors le signe moins par bilinéarité.

5. 1,5 pts

Soit P le plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$, passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Justifie que $\vec{w}$ est normal à P, puis détermine une équation cartésienne de P.

INDICE

Introduis les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, puis relie $\vec{w}$ à la question 2.

6. 1,5 pts

On note G le point tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Calcule les coordonnées de G, puis la distance $d(G, P)$, et compare-la avec $\|\vec{w}\|$.

INDICE

Quel résultat du chapitre précédent donne la distance d'un point à un plan ? Pour la comparaison, pense au point K tel que $\overrightarrow{AK} = \vec{u} + \vec{v}$.

7. 1,5 pts

Sans calculer de déterminant, exprime $\overrightarrow{AG} \wedge \vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$. En déduire la distance du point G à la droite (AB).

INDICE

Développe par bilinéarité ; les questions 2 et 4 donnent $\vec{v} \wedge \vec{u}$ et $\vec{w} \wedge \vec{u}$.

Exercice 4 10 pts

Problème : Un triangle dont un sommet parcourt une droite

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1, 1, 0)$ et $B(2, 3, 2)$, et la droite Δ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = -2 \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pour tout réel t, on note M_t le point de Δ de paramètre t, et $\mathcal{A}(t)$ l'aire du triangle ABM_t lorsque ce triangle existe.

1. 1 pts

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis celles de $\overrightarrow{AM_t}$ en fonction de t.

INDICE

Le point M_t a pour coordonnées celles que donne la représentation paramétrique pour la valeur t du paramètre.

2. 1,5 pts

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM_t}$ en fonction de t, puis contrôle ton résultat par un produit scalaire.

INDICE

Les trois déterminants se calculent comme d'habitude, avec des coordonnées qui dépendent de t : développe et réduis chacun.

3. 1,5 pts

Montre que, pour tout réel t, les points A, B, M_t ne sont pas alignés.

INDICE

Le produit vectoriel de la question 2 peut-il être nul ?

4. 1,5 pts

Montre que, pour tout réel t, $\mathcal{A}(t) = \dfrac{3}{2}\sqrt{t^2 - 2t + 10}$.

INDICE

Calcule le carré de la norme du produit vectoriel de la question 2, puis mets 9 en facteur.

5. 1,5 pts

Écris $t^2 - 2t + 10$ sous forme canonique. En déduire la valeur de t pour laquelle l'aire $\mathcal{A}(t)$ est la plus petite, le point M_t correspondant et cette aire minimale.

INDICE

$t^2 - 2t$ est le début du développement de $(t - 1)^2$. La fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$.

6. 1,5 pts

Détermine les valeurs de t pour lesquelles $\mathcal{A}(t) = \dfrac{15}{2}$, puis les coordonnées des points M_t correspondants.

INDICE

Les deux membres sont positifs : élève-les au carré, puis résous une équation du second degré.

7. 1,5 pts

Exprime la distance $d(M_t, (AB))$ en fonction de t. En déduire le point de Δ le plus proche de la droite (AB), et la plus courte distance d'un point de Δ à la droite (AB).

INDICE

Pour la distance à (AB), il te faut la norme d'un produit vectoriel déjà calculé ; pense à l'antisymétrie.

Exercice 5 10 pts

Problème : Un tétraèdre à trois angles droits et les aires de ses faces

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ et $C(0, 0, 4)$. Les arêtes $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ du tétraèdre $OABC$ sont portées par les trois axes du repère : elles sont deux à deux perpendiculaires. Fais un croquis du tétraèdre avant de commencer.

1. 1,5 pts

Détermine $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; contrôle-le par deux produits scalaires.

INDICE

Trois déterminants 2×2 ; le résultat doit être orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

2. 1 pts

Déduis-en que les points A, B, C ne sont pas alignés, puis calcule l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ de la face ABC.

INDICE

Que dit un produit vectoriel non nul des trois points ? Une norme se calcule avec une racine carrée.

3. 1,5 pts

Calcule les aires des trois autres faces OAB, OBC et OCA, puis vérifie que $\mathcal{A}_{ABC}^2 = \mathcal{A}_{OAB}^2 + \mathcal{A}_{OBC}^2 + \mathcal{A}_{OCA}^2$.

INDICE

Ces trois faces sont des triangles rectangles en O : la géométrie plane suffit.

4. 1,5 pts

À l'aide de la question 1, détermine une équation cartésienne du plan (ABC), puis calcule la distance $d(O, (ABC))$.

INDICE

Simplifie le produit vectoriel de la question 1 pour obtenir un vecteur normal de coordonnées simples.

5. 1,5 pts

Calcule la distance du point O à la droite (BC), puis retrouve-la à l'aide du milieu I du segment $[BC]$.

INDICE

Pour la formule, prends le point B et le vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$. Le triangle OBC est isocèle en O : que dire de la médiane issue de O ?

6. 1,5 pts

Vérifie que $\dfrac{1}{d(O, (ABC))^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

INDICE

Utilise la question 4.

7. 1,5 pts

On remplace les points par $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$, où a, b, c sont trois réels strictement positifs. Montre que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (bc, ac, ab), puis que la relation de la question 3 reste vraie.

INDICE

Refais les trois déterminants avec les lettres ; l'aire d'un triangle rectangle est la moitié du produit des côtés de l'angle droit.