BURHAN

Produit vectoriel : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-vectoriel/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Produit vectoriel	Niveau examen	5

Exercice 1 10 pts

Problème : Un triangle, son plan et deux distances

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1,0,1)$, $B(3,-1,3)$, $C(1,-1,-1)$ et $D(-3,-3,-1)$. Trace une figure à main levée pour suivre les questions.

1. 1,5 pts

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{AC}$ et de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Trois déterminants 2×2 ; pense au signe moins devant le deuxième.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(2,-1,2)$ et $\overrightarrow{AC}(0,-1,-2)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X,Y,Z) les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\times(-2) - 2\times(-1) \\ &= 4, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -\big(2\times(-2) - 2\times 0\big) \\ &= 4, \\ Z &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2\times(-1) - (-1)\times 0 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(4,4,-2)$.

Contrôle. Ce vecteur doit être orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$. Ses produits scalaires avec ces deux vecteurs valent :

$$\begin{aligned} &4\times 2 + 4\times(-1) + (-2)\times 2 \\ &= 8 - 4 - 4 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4\times 0 + 4\times(-1) \\ &\quad + (-2)\times(-2) \\ &= 0 - 4 + 4 = 0. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB}(2,-1,2)$, $\overrightarrow{AC}(0,-1,-2)$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(4,4,-2)$.

2. 1 pts

Montre que A, B, C ne sont pas alignés, puis calcule l'aire du triangle ABC.

INDICE

Quelle propriété du cours relie l'alignement au produit vectoriel ?

CORRIGÉ

Alignement. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ n'est pas nul : d'après la caractérisation de trois points alignés, A, B, C ne sont pas alignés.

Aire. La norme du produit vectoriel vaut :

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \\ &= \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{36} = 6. \end{aligned}$$

D'après la formule de l'aire d'un triangle :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times 6 = 3.$$

Conclusion. A, B, C ne sont pas alignés et le triangle ABC a pour aire 3.

3. 1,5 pts

Montre que $\vec{n}(2, 2, -1)$ est normal au plan (ABC), puis détermine une équation cartésienne de ce plan.

INDICE

$\vec{n}$ est colinéaire au produit vectoriel de la question 1.

CORRIGÉ

Vecteur normal. D'après la question 1, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$. D'après la propriété du vecteur normal au plan (ABC), ce produit vectoriel est normal à (ABC) ; le vecteur $\vec{n}$, non nul et colinéaire, l'est donc aussi.

Équation. Une équation de (ABC) s'écrit $2x + 2y - z + d = 0$. Le point $A(1, 0, 1)$ appartient au plan :

$$\begin{aligned} 2 \times 1 + 2 \times 0 - 1 + d &= 0 \\ d &= -1. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(ABC) : 2x + 2y - z - 1 = 0.$$

Contrôle.

- pour $B(3, -1, 3)$: $2 \times 3 + 2 \times (-1) - 3 - 1 = 0$;
- pour $C(1, -1, -1)$: $2 \times 1 + 2 \times (-1) - (-1) - 1 = 0$.

Conclusion. $\vec{n}(2, 2, -1)$ est normal au plan (ABC), d'équation $2x + 2y - z - 1 = 0$.

4. 1,5 pts

Vérifie que D n'appartient pas au plan (ABC), puis calcule la distance $d(D,(ABC))$.

INDICE

Quel résultat du chapitre précédent donne la distance d'un point à un plan ?

CORRIGÉ

Appartenance. On remplace les coordonnées de $D(-3,-3,-1)$ dans le premier membre de l'équation de (ABC) :

$$\begin{aligned} &2\times(-3)+2\times(-3)\\ &\quad-(-1)-1\\ &=-12\neq 0. \end{aligned}$$

Le point D n'appartient donc pas au plan (ABC).

Distance. D'après la formule donnant la distance à un plan (chapitre précédent) :

$$\begin{aligned} &d(D,(ABC))\\ &=\frac{|-12|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}\\ &=\frac{12}{3}=4. \end{aligned}$$

Conclusion. $D\notin(ABC)$ et $d(D,(ABC))=4$.

5. 1,5 pts

Calcule la distance du point D à la droite (AB).

INDICE

Quelle formule du cours donne la distance d'un point à une droite ? Il te faut un point et un vecteur directeur de (AB).

CORRIGÉ

La droite (AB) passe par A et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

Coordonnées. $\overrightarrow{AD}(-4, -3, -2)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X, Y, Z) les coordonnées de $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-3) \times 2 - (-2) \times (-1) \\ &= -8, \\ Y &= -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -\big((-4) \times 2 - (-2) \times 2\big) \\ &= 4, \\ Z &= \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-4) \times (-1) - (-3) \times 2 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Normes.

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}\| \\ &= \sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 10^2} \\ &= \sqrt{180} = 6\sqrt{5}, \\ AB &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Distance. Par la formule donnant la distance à une droite :

$$\begin{aligned} d(D, (AB)) &= \frac{\|\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{AB} \\ &= \frac{6\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. La distance du point D à la droite (AB) vaut $2\sqrt{5}$.

6. 1,5 pts

On note H le projeté orthogonal de D sur (AB), et l'on écrit $\overrightarrow{AH} = t\,\overrightarrow{AB}$. Détermine t et les coordonnées de H, puis retrouve le résultat de la question 5.

INDICE

Écris que $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, avec $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + t\,\overrightarrow{AB}$.

CORRIGÉ

Coordonnées de $\overrightarrow{DH}$. On a $\overrightarrow{DA}(4, 3, 2)$. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + t\,\overrightarrow{AB}$, de coordonnées $(4 + 2t, 3 - t, 2 + 2t)$.

Condition d'orthogonalité. H est le projeté orthogonal de D sur (AB), donc $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Dans le repère orthonormé, cette condition s'écrit

$$\begin{aligned}(4 + 2t) \times 2 + (3 - t) \times (-1) \\ + (2 + 2t) \times 2 = 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire $9t + 9 = 0$.

Résolution. On obtient $t = -1$, donc $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB}$, de coordonnées $(-2, 1, -2)$, et $H(-1, 1, -1)$.

Distance. On a $\overrightarrow{DH}(2, 4, 0)$, donc :

$$\begin{aligned}DH &= \sqrt{2^2 + 4^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Conclusion. $t = -1$, $H(-1, 1, -1)$, et $DH = 2\sqrt{5}$: on retrouve $d(D, (AB))$, obtenue à la question 5.

7. 1,5 pts

En déduire l'aire du triangle ABD de deux façons.

INDICE

Quelle hauteur du triangle as-tu obtenue à la question 6 ? Pour l'autre façon, relis la question 5.

CORRIGÉ

Première façon : base et hauteur. Le point H est sur (AB) et (DH) est perpendiculaire à (AB) : avec la base $[AB]$, de longueur 3, la hauteur issue de D est $DH = 2\sqrt{5}$ (question 6). Ainsi :

$$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

Seconde façon : produit vectoriel. D'après l'antisymétrie du produit vectoriel, admise, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = -\left(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$: ce vecteur n'est pas nul et a la même norme $6\sqrt{5}$ (question 5). D'après la caractérisation de trois points alignés, A, B, D ne sont pas alignés. La formule de l'aire d'un triangle donne :

$$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

Conclusion. Les deux méthodes donnent $\mathcal{A}_{ABD} = 3\sqrt{5}$.

Exercice 2 — 10 pts

Problème : Deux plans, leur droite commune et une sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans $P : x - 2y + 2z - 3 = 0$ et $P' : 2x + 2y + z - 6 = 0$, ainsi que le point $\Omega(5, 2, 1)$.

1. — 1 pts

Montre que les plans P et P' sont sécants.

INDICE

Compare les vecteurs normaux lus sur les deux équations.

CORRIGÉ

Vecteurs normaux. On lit sur les équations que $\vec{n}(1, -2, 2)$ est normal à P et que $\vec{n}'(2, 2, 1)$ est normal à P'.

Colinéarité. Les premières coordonnées sont dans le rapport 2, les deuxièmes dans le rapport -1 : ces rapports diffèrent, donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires.

Plans. D'après le chapitre précédent, deux plans dont les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires ne sont pas parallèles.

Conclusion. Les plans P et P' sont sécants suivant une droite, notée Δ.

2. — 1 pts

Montre que les plans P et P' sont perpendiculaires.

INDICE

Deux plans sont perpendiculaires lorsque leurs vecteurs normaux sont orthogonaux (chapitre précédent).

CORRIGÉ

Dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{n}' &= 1 \times 2 + (-2) \times 2 \\ &\quad + 2 \times 1 \\ &= 2 - 4 + 2 = 0.\end{aligned}$$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux ; d'après le chapitre précédent, cela suffit pour que les deux plans soient perpendiculaires.

Conclusion. Les plans P et P' sont perpendiculaires.

3. 1,5 pts

Calcule $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ et déduis-en un vecteur directeur $\vec{d}$ de Δ, de coordonnées simples.

INDICE

Par la propriété de l'intersection de deux plans, $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ dirige Δ.

CORRIGÉ

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X, Y, Z) les coordonnées de $\vec{n} \wedge \vec{n}'$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \times 1 - 2 \times 2 \\ &= -6, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\big(1 \times 1 - 2 \times 2\big) \\ &= 3, \\ Z &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 2 - (-2) \times 2 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Ainsi $\vec{n} \wedge \vec{n}'(-6, 3, 6)$.

Vecteur directeur. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires (question 1) : par la propriété de la droite d'intersection de deux plans, $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ dirige Δ.

Conclusion. Le vecteur $\vec{d}(-2, 1, 2)$, tel que $\vec{n} \wedge \vec{n}' = 3\vec{d}$, est non nul et colinéaire à $\vec{n} \wedge \vec{n}'$: il dirige Δ.

4. 1,5 pts

Vérifie que le point $A(3, 0, 0)$ appartient à Δ, puis écris une représentation paramétrique de Δ.

INDICE

Un point de Δ est un point commun aux deux plans.

CORRIGÉ

Appartenance. On remplace les coordonnées de $A(3, 0, 0)$ dans les deux équations :

- dans P : $3 - 2 \times 0 + 2 \times 0 - 3 = 0$;
- dans P' : $2 \times 3 + 2 \times 0 + 0 - 6 = 0$.

Le point A appartient aux deux plans, donc à leur droite commune Δ.

Représentation paramétrique. La droite Δ passe par A et est dirigée par $\vec{d}(-2, 1, 2)$:

$$\Delta : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusion. $A \in \Delta$, et la représentation ci-dessus est une représentation paramétrique de Δ.

5. 1,5 pts

Calcule la distance du point Ω à la droite Δ.

INDICE

Quelle formule du cours donne la distance d'un point à une droite ?

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{A\Omega}(2, 2, 1)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X, Y, Z) les coordonnées de $\overrightarrow{A\Omega} \wedge \vec{d}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 2 - 1 \times 1 \\ &= 3, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -\big(2 \times 2 - 1 \times (-2)\big) \\ &= -6, \\ Z &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 1 - 2 \times (-2) \\ &= 6. \end{aligned}$$

Normes.

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{A\Omega} \wedge \vec{d}\| \\ &= \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{81} = 9, \\ \|\vec{d}\| &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Distance. Par la formule donnant la distance à une droite, $d(\Omega, \Delta) = \dfrac{\|\overrightarrow{A\Omega} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$, donc :

$$d(\Omega, \Delta) = \frac{9}{3} = 3.$$

Conclusion. La distance du point Ω à la droite Δ vaut 3.

6. 2 pts

Soit S la sphère de centre Ω et de rayon $3\sqrt{2}$. Justifie que Δ coupe S en deux points, puis détermine leurs coordonnées. On note E le point de paramètre positif et F l'autre.

INDICE

Compare $d(\Omega, \Delta)$ au rayon. Pour les points, écris $\Omega M^2 = 18$ avec M de paramètre t.

CORRIGÉ

Position de Δ. On a $d(\Omega, \Delta) = 3$ et $3^2 = 9 < 18 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$. Ces deux nombres étant positifs, $d(\Omega, \Delta) < 3\sqrt{2}$: la distance du centre à la droite est strictement inférieure au rayon, donc Δ coupe la sphère S en deux points.

Équation en t. Le point M de Δ de paramètre t a pour coordonnées $(3 - 2t, t, 2t)$. Il est sur S si et seulement si $\Omega M^2 = 18$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}(-2 - 2t)^2 + (-2 + t)^2 \\ + (-1 + 2t)^2 = 18.\end{aligned}$$

Développement.

$$\begin{aligned}(4 + 8t + 4t^2) + (4 - 4t + t^2) \\ + (1 - 4t + 4t^2) \\ = 9t^2 + 9.\end{aligned}$$

On obtient $9t^2 + 9 = 18$, soit $t^2 = 1$: $t = 1$ ou $t = -1$.

Points. Pour $t = 1$, $E(1, 1, 2)$; pour $t = -1$, $F(5, -1, -2)$.

Contrôle.

- $\Omega E^2 = (-4)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 18$;
- $\Omega F^2 = 0^2 + (-3)^2 + (-3)^2 = 18$.

Conclusion. La droite Δ coupe S en $E(1, 1, 2)$ et en $F(5, -1, -2)$.

7. 1,5 pts

Calcule l'aire du triangle ΩEF de deux façons : avec la base $[EF]$, puis avec un produit vectoriel.

INDICE

La hauteur issue de Ω est $d(\Omega, \Delta)$, car E et F sont sur Δ.

CORRIGÉ

Avec la base $[EF]$. On a $\overrightarrow{EF}(4, -2, -4)$, donc :

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{36} = 6. \end{aligned}$$

Les points E et F sont deux points distincts de Δ, donc $(EF) = \Delta$: la hauteur issue de Ω est $d(\Omega, \Delta) = 3$. Ainsi :

$$\mathcal{A}_{\Omega EF} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9.$$

Avec un produit vectoriel. On a $\overrightarrow{\Omega E}(-4, -1, 1)$ et $\overrightarrow{\Omega F}(0, -3, -3)$. Dans le repère orthonormé direct, on note (X, Y, Z) les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega E} \wedge \overrightarrow{\Omega F}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times (-3) - 1 \times (-3) \\ &= 6, \\ Y &= -\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= -\big((-4) \times (-3) - 1 \times 0\big) \\ &= -12, \\ Z &= \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (-4) \times (-3) - (-1) \times 0 \\ &= 12. \end{aligned}$$

Ce vecteur n'est pas nul : d'après la caractérisation de trois points alignés, Ω, E, F ne sont pas alignés. Sa norme vaut :

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{\Omega E} \wedge \overrightarrow{\Omega F}\| \\ &= \sqrt{6^2 + (-12)^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{324} = 18. \end{aligned}$$

La formule de l'aire d'un triangle donne $\mathcal{A}_{\Omega EF} = \dfrac{18}{2} = 9$.

Conclusion. Les deux méthodes donnent $\mathcal{A}_{\Omega EF} = 9$.

Exercice 3 10 pts

Problème : Une base orthonormée, son orientation et des produits par les propriétés

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les vecteurs $\vec{u}(2, 3, 6)$, $\vec{v}(6, 2, -3)$ et $\vec{w}(3, -6, 2)$, puis on pose

$$\vec{a} = \frac{1}{7}\vec{u},$$
$$\vec{b} = \frac{1}{7}\vec{v},$$
$$\vec{c} = \frac{1}{7}\vec{w}.$$

On admet que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de l'espace. Enfin, on considère le point $A(1, 1, 2)$.

1. 1 pts

Montre que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont deux à deux orthogonaux et ont la même norme 7. En déduire que la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est orthonormée.

INDICE

Trois produits scalaires et trois normes en coordonnées, dans le repère orthonormé (chapitre précédent).

CORRIGÉ

Orthogonalité. Dans le repère orthonormé (chapitre précédent) :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 2\times 6 + 3\times 2 \\ &\quad + 6\times(-3) \\ &= 12 + 6 - 18 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{w} &= 2\times 3 + 3\times(-6) \\ &\quad + 6\times 2 \\ &= 6 - 18 + 12 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{w} &= 6\times 3 + 2\times(-6) \\ &\quad + (-3)\times 2 \\ &= 18 - 12 - 6 = 0.\end{aligned}$$

Les trois vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Normes.

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{49} = 7, \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{49} = 7, \\ \|\vec{w}\| &= \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{49} = 7.\end{aligned}$$

La base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. On a $\|\vec{a}\| = \dfrac{1}{7}\times 7 = 1$, et de même $\|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 1$. Les produits scalaires de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ deux à deux valent $\dfrac{1}{49}$ fois les précédents, donc 0.

Conclusion. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme 7 ; la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est orthonormée.

2. 1,5 pts

Calcule les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, puis exprime ce vecteur en fonction de $\vec{w}$.

INDICE

Trois déterminants 2×2, puis compare chaque coordonnée obtenue à celle de $\vec{w}$.

CORRIGÉ

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X, Y, Z) les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times (-3) - 6 \times 2 \\ &= -21, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \\ &= -\big(2 \times (-3) - 6 \times 6\big) \\ &= 42, \\ Z &= \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 2 - 3 \times 6 \\ &= -14. \end{aligned}$$

Donc $\vec{u} \wedge \vec{v}(-21, 42, -14)$.

Contrôle. Les produits scalaires de ce vecteur avec $\vec{u}$ et avec $\vec{v}$ valent :

$$\begin{aligned} &(-21) \times 2 + 42 \times 3 \\ &\quad + (-14) \times 6 \\ &= -42 + 126 - 84 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-21) \times 6 + 42 \times 2 \\ &\quad + (-14) \times (-3) \\ &= -126 + 84 + 42 = 0. \end{aligned}$$

Comparaison avec $\vec{w}$. Chaque coordonnée vaut -7 fois celle de $\vec{w}(3, -6, 2)$: $-21 = -7 \times 3$, $42 = -7 \times (-6)$ et $-14 = -7 \times 2$.

Conclusion. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -7\vec{w}$.

3. 1,5 pts

En déduire que $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{c}$, puis que la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est indirecte.

INDICE

La bilinéarité sort les coefficients $\frac{1}{7}$. Que dit la définition du produit vectoriel sur l'orientation de la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$?

CORRIGÉ

Calcul de $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Par bilinéarité du produit vectoriel, admise, puis avec la question 2 :

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \wedge \vec{b} \\
&= \left(\frac{1}{7}\vec{u}\right) \wedge \left(\frac{1}{7}\vec{v}\right) \\
&= \frac{1}{49}\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \\
&= -\frac{7}{49}\vec{w} = -\frac{1}{7}\vec{w} = -\vec{c}.
\end{aligned}$$

Une base directe. Comme $\vec{c} \neq \vec{0}$, le produit $\vec{a} \wedge \vec{b}$ n'est pas nul : d'après la propriété du produit vectoriel nul, admise, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires. Par la définition du produit vectoriel, la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$, c'est-à-dire $(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c})$, est directe.

Orientation de $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. On passe de $(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c})$ à $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ en remplaçant le troisième vecteur par son opposé. D'après la règle du changement de sens, admise, changer le sens d'un seul vecteur change l'orientation.

Conclusion. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{c}$, et la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est **indirecte**.

4. 1,5 pts

Justifie que $(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c})$ est une base orthonormée directe. Déduis-en $\vec{b} \wedge \vec{c}$ et $\vec{c} \wedge \vec{a}$ en fonction de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$, sans déterminant, puis contrôle le premier résultat en calculant $\vec{v} \wedge \vec{w}$ en coordonnées.

INDICE

Applique les produits des vecteurs d'une base orthonormée directe à la base $(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c})$, dans l'ordre circulaire, puis sors le signe moins par bilinéarité.

CORRIGÉ

La base $(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c})$. Le vecteur $-\vec{c}$ a pour norme 1 et reste orthogonal à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$: cette base est orthonormée (question 1), et elle est directe d'après la question 3.

Produits sans déterminant. D'après les produits vectoriels des vecteurs d'une base orthonormée directe, admis, appliqués à $(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c})$ dans l'ordre circulaire :

$$\begin{aligned} \vec{b} \wedge (-\vec{c}) &= \vec{a}, \\ (-\vec{c}) \wedge \vec{a} &= \vec{b}. \end{aligned}$$

Par bilinéarité, admise, on sort le signe moins : $\vec{b} \wedge \vec{c} = -\vec{a}$ et $\vec{c} \wedge \vec{a} = -\vec{b}$.

Contrôle. Par bilinéarité, $\vec{v} \wedge \vec{w} = 49\,(\vec{b} \wedge \vec{c}) = -49\vec{a} = -7\vec{u}$, de coordonnées $(-14, -21, -42)$. Dans le repère orthonormé direct, on note (X, Y, Z) les coordonnées de $\vec{v} \wedge \vec{w}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 2 - (-3) \times (-6) \\ &= -14, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -\big(6 \times 2 - (-3) \times 3\big) \\ &= -21, \\ Z &= \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \\ &= 6 \times (-6) - 2 \times 3 \\ &= -42. \end{aligned}$$

On retrouve bien $(-14, -21, -42)$.

Conclusion. $(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c})$ est orthonormée directe, $\vec{b} \wedge \vec{c} = -\vec{a}$ et $\vec{c} \wedge \vec{a} = -\vec{b}$.

5. 1,5 pts

Soit P le plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$, passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Justifie que $\vec{w}$ est normal à P, puis détermine une équation cartésienne de P.

INDICE

Introduis les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, puis relie $\vec{w}$ à la question 2.

CORRIGÉ

Le plan P comme plan (ABC). On note B et C les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$: ce sont $B(3, 4, 8)$ et $C(7, 3, -1)$, et P est le plan (ABC).

Vecteur normal. D'après la question 2, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{u} \wedge \vec{v} = -7\vec{w}$, qui n'est pas nul : A, B, C ne sont pas alignés. D'après la propriété du vecteur normal au plan (ABC), ce vecteur est normal à P ; le vecteur $\vec{w}$, non nul et colinéaire, l'est donc aussi.

Équation. Une équation de P s'écrit $3x - 6y + 2z + d = 0$. Le point $A(1, 1, 2)$ appartient à P :

$$\begin{aligned} &3 \times 1 - 6 \times 1 + 2 \times 2 \\ &\quad + d = 0 \\ &d = -1. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$P : 3x - 6y + 2z - 1 = 0.$$

Contrôle.

- pour B : $3 \times 3 - 6 \times 4 + 2 \times 8 - 1 = 0$;
- pour C : $3 \times 7 - 6 \times 3 + 2 \times (-1) - 1 = 0$.

Conclusion. $\vec{w}$ est normal à P, et P a pour équation $3x - 6y + 2z - 1 = 0$.

6. 1,5 pts

On note G le point tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Calcule les coordonnées de G, puis la distance $d(G, P)$, et compare-la avec $\|\vec{w}\|$.

INDICE

Quel résultat du chapitre précédent donne la distance d'un point à un plan ? Pour la comparaison, pense au point K tel que $\overrightarrow{AK} = \vec{u} + \vec{v}$.

CORRIGÉ

Coordonnées de G. On a $\overrightarrow{AG}(11, -1, 5)$, donc $G(12, 0, 7)$.

Distance. En G, le premier membre de l'équation de P vaut

$$\begin{aligned} &3 \times 12 - 6 \times 0 + 2 \times 7 - 1 \\ &= 49. \end{aligned}$$

Par la formule donnant la distance à un plan (chapitre précédent) :

$$\begin{aligned} &d(G, P) \\ &= \frac{|49|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{49}{7} = 7. \end{aligned}$$

Comparaison. On trouve $\|\vec{w}\| = 7$. En effet, soit K le point tel que $\overrightarrow{AK} = \vec{u} + \vec{v}$: c'est $K(9, 6, 5)$.

- $K \in P$, car $3 \times 9 - 6 \times 6 + 2 \times 5 - 1 = 0$;
- $\overrightarrow{KG} = \vec{w}$ est normal à P (question 5).

Le point K est donc le projeté orthogonal de G sur P, et $d(G, P) = KG = \|\vec{w}\|$.

Conclusion. $G(12, 0, 7)$ et $d(G, P) = 7 = \|\vec{w}\|$.

7. 1,5 pts

Sans calculer de déterminant, exprime $\overrightarrow{AG} \wedge \vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$. En déduire la distance du point G à la droite (AB).

INDICE

Développe par bilinéarité ; les questions 2 et 4 donnent $\vec{v} \wedge \vec{u}$ et $\vec{w} \wedge \vec{u}$.

CORRIGÉ

Développement. On a $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Par bilinéarité, admise :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \wedge \vec{u} &= \vec{u} \wedge \vec{u} + \vec{v} \wedge \vec{u} \\ &\quad + \vec{w} \wedge \vec{u}.\end{aligned}$$

Les trois termes.

- D'après la propriété du produit vectoriel nul, admise, $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- Par antisymétrie, admise, et la question 2 : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 7\vec{w}$.
- Par bilinéarité et la question 4 : $\vec{w} \wedge \vec{u} = 49\,(\vec{c} \wedge \vec{a}) = -49\vec{b} = -7\vec{v}$.

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \wedge \vec{u} &= 7\vec{w} - 7\vec{v} \\ &= 7\,(\vec{w} - \vec{v})\,.\end{aligned}$$

Norme. Le vecteur $\vec{w} - \vec{v}$ a pour coordonnées $(-3, -8, 5)$, donc $\overrightarrow{AG} \wedge \vec{u}(-21, -56, 35)$, et :

$$\begin{aligned}&\|\overrightarrow{AG} \wedge \vec{u}\| \\ &= \sqrt{(-21)^2 + (-56)^2 + 35^2} \\ &= \sqrt{4802} = 49\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Distance. La droite (AB) passe par A et est dirigée par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, de norme 7. Par la formule donnant la distance à une droite :

$$\begin{aligned}d(G, (AB)) &= \frac{\|\overrightarrow{AG} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \\ &= \frac{49\sqrt{2}}{7} = 7\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Contrôle. $\overrightarrow{BG} = \vec{v} + \vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ (question 1) : B est le projeté orthogonal de G sur (AB). De plus :

$$\begin{aligned}BG^2 &= \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{v} \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2 \\ &= 49 + 0 + 49 = 98,\end{aligned}$$

soit $BG = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

Conclusion. $\overrightarrow{AG} \wedge \vec{u} = 7\,(\vec{w} - \vec{v})$ et $d(G, (AB)) = 7\sqrt{2}$.

Exercice 4 10 pts

Problème : Un triangle dont un sommet parcourt une droite

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1,1,0)$ et $B(2,3,2)$, et la droite Δ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = -2 \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pour tout réel t, on note M_t le point de Δ de paramètre t, et $\mathcal{A}(t)$ l'aire du triangle ABM_t lorsque ce triangle existe.

1. 1 pts

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis celles de $\overrightarrow{AM_t}$ en fonction de t.

INDICE

Le point M_t a pour coordonnées celles que donne la représentation paramétrique pour la valeur t du paramètre.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB}(1,2,2)$.

Vecteur $\overrightarrow{AM_t}$. Pour la valeur t du paramètre, le point M_t a pour coordonnées $(-3+t, -2, -1+t)$. On retranche les coordonnées de $A(1,1,0)$: $\overrightarrow{AM_t}(-4+t, -3, -1+t)$.

Conclusion. $\overrightarrow{AB}(1,2,2)$ et, pour tout réel t, $\overrightarrow{AM_t}(-4+t, -3, -1+t)$.

2. 1,5 pts

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM_t}$ en fonction de t, puis contrôle ton résultat par un produit scalaire.

INDICE

Les trois déterminants se calculent comme d'habitude, avec des coordonnées qui dépendent de t : développe et réduis chacun.

CORRIGÉ

Produit vectoriel. Soit t un réel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X, Y, Z) les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM_t}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1+t \end{vmatrix} \\ &= 2(-1+t) - 2 \times (-3) \\ &= -2 + 2t + 6 = 2t + 4, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 1 & -4+t \\ 2 & -1+t \end{vmatrix} \\ &= -\big(1 \times (-1+t) \\ &\quad - 2(-4+t)\big) \\ &= -(7 - t) = t - 7, \\ Z &= \begin{vmatrix} 1 & -4+t \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-3) - 2(-4+t) \\ &= -3 + 8 - 2t = 5 - 2t. \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM_t}(2t + 4, t - 7, 5 - 2t)$.

Contrôle. Le produit scalaire de ce vecteur avec $\overrightarrow{AB}$ doit être nul :

$$\begin{aligned} &1 \times (2t+4) + 2(t-7) \\ &\quad + 2(5 - 2t) \\ &= 2t + 4 + 2t - 14 + 10 - 4t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel t, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM_t}(2t + 4, t - 7, 5 - 2t)$.

3. 1,5 pts

Montre que, pour tout réel t, les points A, B, M_t ne sont pas alignés.

INDICE

Le produit vectoriel de la question 2 peut-il être nul ?

CORRIGÉ

D'après la caractérisation de trois points alignés, A, B, M_t sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM_t} = \vec{0}$.

Le produit vectoriel n'est jamais nul. La première coordonnée $2t + 4$ n'est nulle que pour $t = -2$, et pour cette valeur la deuxième vaut $-2 - 7 = -9 \neq 0$. Aucune valeur de t n'annule donc les trois coordonnées à la fois.

Conclusion. Pour tout réel t, les points A, B, M_t ne sont pas alignés : le triangle ABM_t existe.

4. 1,5 pts

Montre que, pour tout réel t, $\mathcal{A}(t) = \dfrac{3}{2}\sqrt{t^2 - 2t + 10}$.

INDICE

Calcule le carré de la norme du produit vectoriel de la question 2, puis mets 9 en facteur.

CORRIGÉ

Formule de l'aire. Soit t un réel. D'après la formule de l'aire d'un triangle, $\mathcal{A}(t) = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM_t}\|$.

Carré de la norme. Avec la question 2 :

$$\begin{aligned}
&\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM_t}\|^2 \\
&= (2t + 4)^2 + (t - 7)^2 \\
&\quad + (5 - 2t)^2 \\
&= 4t^2 + 16t + 16 \\
&\quad + t^2 - 14t + 49 \\
&\quad + 4t^2 - 20t + 25 \\
&= 9t^2 - 18t + 90 \\
&= 9\left(t^2 - 2t + 10\right).
\end{aligned}$$

Norme. Le discriminant de $t^2 - 2t + 10$ vaut $(-2)^2 - 4 \times 10 = -36 < 0$: pour tout réel t, $t^2 - 2t + 10 > 0$, et la norme vaut $\sqrt{9\left(t^2 - 2t + 10\right)} = 3\sqrt{t^2 - 2t + 10}$.

Conclusion. Pour tout réel t, $\mathcal{A}(t) = \dfrac{1}{2} \times 3\sqrt{t^2 - 2t + 10} = \dfrac{3}{2}\sqrt{t^2 - 2t + 10}$.

5. 1,5 pts

Écris $t^2 - 2t + 10$ sous forme canonique. En déduire la valeur de t pour laquelle l'aire $\mathcal{A}(t)$ est la plus petite, le point M_t correspondant et cette aire minimale.

INDICE

$t^2 - 2t$ est le début du développement de $(t-1)^2$. La fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$.

CORRIGÉ

Forme canonique.

$$t^2 - 2t + 10 = (t-1)^2 + 9.$$

Minoration. Soit t un réel. Comme $(t-1)^2 \geq 0$, on a $t^2 - 2t + 10 \geq 9$, avec égalité si et seulement si $t = 1$. La fonction racine carrée étant croissante sur $[0, +\infty[$:

$$\mathcal{A}(t) \geq \frac{3}{2}\sqrt{9} = \frac{9}{2},$$

avec égalité seulement pour $t = 1$.

Point et contrôle. Pour $t = 1$, on obtient le point $M_1(-2, -2, 0)$. Contrôle : $\overrightarrow{AM_1}(-3, -3, 0)$ et la question 2 donne $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM_1}(6, -6, 3)$, de norme

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM_1}\| \\ &= \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{81} = 9, \end{aligned}$$

d'où une aire $\dfrac{9}{2}$.

Conclusion. $t^2 - 2t + 10 = (t-1)^2 + 9$; l'aire est la plus petite pour $t = 1$, au point $M_1(-2, -2, 0)$, et l'aire minimale vaut $\dfrac{9}{2}$.

6. 1,5 pts

Détermine les valeurs de t pour lesquelles $\mathcal{A}(t) = \dfrac{15}{2}$, puis les coordonnées des points M_t correspondants.

INDICE

Les deux membres sont positifs : élève-les au carré, puis résous une équation du second degré.

CORRIGÉ

Équation. Les deux membres de l'égalité $\mathcal{A}(t) = \dfrac{15}{2}$ sont positifs : elle équivaut à l'égalité de leurs carrés,

$$\frac{9}{4}\left(t^2 - 2t + 10\right) = \frac{225}{4},$$

c'est-à-dire $t^2 - 2t + 10 = 25$, soit $t^2 - 2t - 15 = 0$.

Résolution. Le discriminant vaut

$$\begin{aligned}&(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15)\\ &= 64 = 8^2,\end{aligned}$$

d'où $t = \dfrac{2+8}{2} = 5$ ou $t = \dfrac{2-8}{2} = -3$.

Points. $M_5(2, -2, 4)$ et $M_{-3}(-6, -2, -4)$.

Contrôle avec $t = 5$. La question 2 donne $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM_5}(14, -2, -5)$, de norme

$$\begin{aligned}&\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM_5}\|\\ &= \sqrt{14^2 + (-2)^2 + (-5)^2}\\ &= \sqrt{225} = 15,\end{aligned}$$

et l'aire vaut bien $\dfrac{15}{2}$.

Conclusion. $\mathcal{A}(t) = \dfrac{15}{2}$ pour $t = 5$ et pour $t = -3$, aux points $M_5(2, -2, 4)$ et $M_{-3}(-6, -2, -4)$.

7. 1,5 pts

Exprime la distance $d(M_t,(AB))$ en fonction de t. En déduire le point de Δ le plus proche de la droite (AB), et la plus courte distance d'un point de Δ à la droite (AB).

INDICE

Pour la distance à (AB), il te faut la norme d'un produit vectoriel déjà calculé ; pense à l'antisymétrie.

CORRIGÉ

Norme de $\overrightarrow{AB}$. La droite (AB) passe par A et est dirigée par $\overrightarrow{AB}$, de norme :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{1^2+2^2+2^2} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Le produit vectoriel. D'après l'antisymétrie du produit vectoriel, admise, $\overrightarrow{AM_t}\wedge\overrightarrow{AB} = -\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM_t}\right)$: ces deux vecteurs ont la même norme $3\sqrt{t^2-2t+10}$ (question 4).

Distance. Soit t un réel. Par la formule donnant la distance à une droite :

$$\begin{aligned} &d(M_t,(AB)) \\ &= \frac{\|\overrightarrow{AM_t}\wedge\overrightarrow{AB}\|}{AB} \\ &= \frac{3\sqrt{t^2-2t+10}}{3} \\ &= \sqrt{(t-1)^2+9}. \end{aligned}$$

Minimum. Comme à la question 5, cette distance est supérieure ou égale à $\sqrt{9}=3$, et elle vaut 3 seulement pour $t=1$.

Contrôle. Avec la base $[AB]$ et la hauteur $d(M_1,(AB))$:

$$\frac{1}{2}\times 3\times 3 = \frac{9}{2},$$

c'est bien l'aire minimale de la question 5.

Conclusion. Pour tout réel t, $d(M_t,(AB)) = \sqrt{(t-1)^2+9}$. Le point de Δ le plus proche de (AB) est $M_1(-2,-2,0)$, et la plus courte distance vaut 3.

Exercice 5 — 10 pts

Problème : Un tétraèdre à trois angles droits et les aires de ses faces

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$ et $C(0,0,4)$. Les arêtes $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ du tétraèdre $OABC$ sont portées par les trois axes du repère : elles sont deux à deux perpendiculaires. Fais un croquis du tétraèdre avant de commencer.

1. — 1,5 pts

Détermine $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$; contrôle-le par deux produits scalaires.

INDICE

Trois déterminants 2×2 ; le résultat doit être orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(-2,4,0)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,0,4)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X,Y,Z) les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 4\times 4 - 0\times 0 \\ &= 16, \\ Y &= -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -\big((-2)\times 4 - 0\times(-2)\big) \\ &= 8, \\ Z &= \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-2)\times 0 - 4\times(-2) \\ &= 8. \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(16,8,8)$.

Contrôle. Ses produits scalaires avec $\overrightarrow{AB}$ et avec $\overrightarrow{AC}$ valent :

$$\begin{aligned} &16\times(-2)+8\times 4+8\times 0 \\ &= -32+32+0=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &16\times(-2)+8\times 0+8\times 4 \\ &= -32+0+32=0. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(16,8,8)$, orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

2. 1 pts

Déduis-en que les points A, B, C ne sont pas alignés, puis calcule l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ de la face ABC.

INDICE

Que dit un produit vectoriel non nul des trois points ? Une norme se calcule avec une racine carrée.

CORRIGÉ

Alignement. Le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ n'est pas nul : d'après la caractérisation de trois points alignés, A, B, C ne sont pas alignés.

Aire.

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \\ &= \sqrt{16^2 + 8^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{384} = 8\sqrt{6}. \end{aligned}$$

D'après la formule de l'aire d'un triangle :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{6} = 4\sqrt{6}.$$

Conclusion. A, B, C ne sont pas alignés et $\mathcal{A}_{ABC} = 4\sqrt{6}$.

3. 1,5 pts

Calcule les aires des trois autres faces OAB, OBC et OCA, puis vérifie que $\mathcal{A}_{ABC}^2 = \mathcal{A}_{OAB}^2 + \mathcal{A}_{OBC}^2 + \mathcal{A}_{OCA}^2$.

INDICE

Ces trois faces sont des triangles rectangles en O : la géométrie plane suffit.

CORRIGÉ

Aires des faces rectangles. Le triangle OAB est rectangle en O, avec $OA = 2$ et $OB = 4$. De même pour les deux autres faces :

- $\mathcal{A}_{OAB} = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$;
- $\mathcal{A}_{OBC} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$;
- $\mathcal{A}_{OCA} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$.

Somme des carrés.

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_{OAB}^2 + \mathcal{A}_{OBC}^2 \\ &\quad + \mathcal{A}_{OCA}^2 \\ &= 4^2 + 8^2 + 4^2 \\ &= 16 + 64 + 16 = 96. \end{aligned}$$

Carré de l'aire de ABC. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC}^2 &= \left(4\sqrt{6}\right)^2 \\ &= 16 \times 6 = 96. \end{aligned}$$

Conclusion. $\mathcal{A}_{OAB} = 4$, $\mathcal{A}_{OBC} = 8$, $\mathcal{A}_{OCA} = 4$, et l'égalité $\mathcal{A}_{ABC}^2 = \mathcal{A}_{OAB}^2 + \mathcal{A}_{OBC}^2 + \mathcal{A}_{OCA}^2$ est vérifiée.

4. 1,5 pts

À l'aide de la question 1, détermine une équation cartésienne du plan (ABC), puis calcule la distance $d(O,(ABC))$.

INDICE

Simplifie le produit vectoriel de la question 1 pour obtenir un vecteur normal de coordonnées simples.

CORRIGÉ

Vecteur normal. D'après la question 1, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=8\vec{n}$, avec $\vec{n}(2,1,1)$. D'après la propriété du vecteur normal au plan (ABC), ce produit vectoriel est normal à (ABC) ; le vecteur $\vec{n}$, non nul et colinéaire, l'est donc aussi.

Équation. Une équation de (ABC) s'écrit $2x+y+z+d=0$. Le point $A(2,0,0)$ appartient au plan :

$$\begin{aligned}2\times 2+0+0+d&=0\\ d&=-4.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$(ABC)\,:\,2x+y+z-4=0.$$

Contrôle.

- pour $B(0,4,0)$: $2\times 0+4+0-4=0$;
- pour $C(0,0,4)$: $2\times 0+0+4-4=0$.

Distance. En O, le premier membre vaut -4. D'après la formule donnant la distance à un plan (chapitre précédent) :

$$\begin{aligned}&d(O,(ABC))\\ &=\frac{|-4|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}\\ &=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}.\end{aligned}$$

Conclusion. $(ABC)\,:\,2x+y+z-4=0$ et $d(O,(ABC))=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

5. 1,5 pts

Calcule la distance du point O à la droite (BC), puis retrouve-la à l'aide du milieu I du segment $[BC]$.

INDICE

Pour la formule, prends le point B et le vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$. Le triangle OBC est isocèle en O : que dire de la médiane issue de O ?

CORRIGÉ

Par la formule. La droite (BC) passe par B et est dirigée par $\overrightarrow{BC}$. On a $\overrightarrow{BO}(0,-4,0)$ et $\overrightarrow{BC}(0,-4,4)$. Dans le repère orthonormé direct, on note (X,Y,Z) les coordonnées de $\overrightarrow{BO}\wedge\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-4)\times 4 - 0\times(-4) \\ &= -16, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -\big(0\times 4 - 0\times 0\big) \\ &= 0, \\ Z &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 0\times(-4) - (-4)\times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{BO}\wedge\overrightarrow{BC}\| &= \sqrt{(-16)^2+0^2+0^2} \\ &= \sqrt{256} = 16, \\ BC &= \sqrt{0^2+(-4)^2+4^2} \\ &= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Par la formule donnant la distance à une droite :

$$\begin{aligned} d(O,(BC)) &= \frac{\|\overrightarrow{BO}\wedge\overrightarrow{BC}\|}{BC} \\ &= \frac{16}{4\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Par le milieu I. Le triangle OBC est isocèle en O, car $OB = OC = 4$: sa médiane (OI) est aussi sa hauteur, et I est le projeté orthogonal de O sur (BC). On a $I(0,2,2)$, et le calcul suivant le confirme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC} &= 0\times 0 + 2\times(-4) \\ &\quad + 2\times 4 \\ &= 0 - 8 + 8 = 0. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} OI &= \sqrt{0^2+2^2+2^2} \\ &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. $d(O,(BC)) = 2\sqrt{2} = OI$: les deux méthodes concordent.

6. 1,5 pts

Vérifie que $\dfrac{1}{d(O,(ABC))^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

INDICE

Utilise la question 4.

CORRIGÉ

Membre de droite. Les points A, B, C sont sur les axes du repère orthonormé : $OA = 2$, $OB = 4$ et $OC = 4$. Donc :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}\\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\\ &= \frac{4}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\\ &= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Membre de gauche. D'après la question 4, $d(O,(ABC)) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$, donc :

$$\begin{aligned}&d(O,(ABC))^2\\ &= \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{4\times 6}{9}\\ &= \frac{24}{9} = \frac{8}{3},\end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{d(O,(ABC))^2} = \frac{3}{8}.$$

Conclusion. Les deux membres valent $\dfrac{3}{8}$: la relation est vérifiée.

7. 1,5 pts

On remplace les points par $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$, où a, b, c sont trois réels strictement positifs. Montre que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (bc,ac,ab), puis que la relation de la question 3 reste vraie.

INDICE

Refais les trois déterminants avec les lettres ; l'aire d'un triangle rectangle est la moitié du produit des côtés de l'angle droit.

CORRIGÉ

Produit vectoriel. On a $\overrightarrow{AB}(-a,b,0)$ et $\overrightarrow{AC}(-a,0,c)$. Dans le repère orthonormé direct, on note (X,Y,Z) les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} \\ &= bc - 0\times 0 = bc, \\ Y &= -\begin{vmatrix} -a & -a \\ 0 & c \end{vmatrix} \\ &= -\big((-a)c - 0\times(-a)\big) \\ &= ac, \\ Z &= \begin{vmatrix} -a & -a \\ b & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-a)\times 0 - b(-a) = ab. \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (bc,ac,ab).

Aire de ABC. Ce vecteur n'est pas nul, car $ab>0$: les points A, B, C ne sont pas alignés. D'après la formule de l'aire d'un triangle :

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_{ABC}^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2\right) \\ &= \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{ac}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Aires des autres faces. Les faces OAB, OBC et OCA sont rectangles en O, d'aires $\frac{ab}{2}$, $\frac{bc}{2}$ et $\frac{ac}{2}$.

Conclusion. Pour tous réels a, b, c strictement positifs, $\mathcal{A}_{ABC}^2 = \mathcal{A}_{OAB}^2 + \mathcal{A}_{OBC}^2 + \mathcal{A}_{OCA}^2$. Avec $a=2$, $b=4$ et $c=4$, on retrouve le vecteur $(16,8,8)$ de la question 1.