BURHAN

Produit vectoriel : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-vectoriel/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Produit vectoriel	Entraînement	6

Exercice 1

Équation d'un plan donné par trois points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(1, -2, 0)$, $B(3, 1, 2)$, $C(2, -1, 0)$ et $D(1, 1, 6)$.

1.

Montre que A, B, C ne sont pas alignés et donne un vecteur normal au plan (ABC).

INDICE

Un seul calcul répond aux deux questions : celui de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2.

Déduis-en une équation cartésienne du plan (ABC), puis contrôle-la avec B et C.

INDICE

Un vecteur normal (a, b, c) donne une équation $ax + by + cz + d = 0$; un point du plan fixe d.

3.

Le point D appartient-il au plan (ABC) ? Que peux-tu dire des quatre points A, B, C, D ?

INDICE

Remplace les coordonnées de D dans l'équation.

4.

Calcule la distance de l'origine O au plan (ABC).

INDICE

Utilise la formule de distance à un plan du chapitre précédent.

Exercice 2

De l'aire d'un triangle à sa hauteur

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(2, -1, 1)$, $B(3, 1, 3)$ et $C(5, 2, 1)$. On note h la longueur de la hauteur du triangle ABC issue de A.

1.

Calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et déduis-en l'aire du triangle ABC.

INDICE

Aire du triangle : la moitié de la norme du produit vectoriel.

2.

Calcule la longueur BC, puis h.

INDICE

L'aire d'un triangle vaut aussi $\frac{1}{2} \times BC \times h$.

3.

Retrouve h comme distance du point A à la droite (BC).

INDICE

La droite (BC) passe par B et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 3

Distance à une droite et projeté orthogonal

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note D la droite passant par $A(2, -1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 2, 2)$, et $M(5, -1, 3)$.

1.

Calcule la distance $d(M, D)$.

INDICE

Calcule d'abord $\overrightarrow{AM}$, puis $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$.

2.

Le projeté orthogonal H de M sur D s'écrit $H = A + t\vec{u}$, avec t réel. Détermine t, puis les coordonnées de H.

INDICE

H est le point de D tel que $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$.

3.

Calcule MH et compare avec la question 1.

INDICE

Une distance entre deux points : racine de la somme des carrés.

Exercice 4

La droite commune à deux plans

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans $P : 2x - y + z - 1 = 0$ et $P' : x + y - z - 2 = 0$.

1.

Montre que P et P' sont sécants.

INDICE

Lis un vecteur normal sur chaque équation et compare leurs coordonnées.

2.

Calcule $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ et donne un vecteur directeur simple de Δ.

INDICE

Par la propriété de l'intersection de deux plans, ce produit vectoriel dirige Δ.

3.

Trouve le point de Δ de cote $z = 0$, puis écris une représentation paramétrique de Δ.

INDICE

Avec $z = 0$, les deux équations forment un système en x et y ; additionne-les.

4.

Contrôle ta représentation avec le point de paramètre $t = 1$.

INDICE

Ce point doit vérifier les deux équations.

Exercice 5

Pour quelle valeur les trois points sont-ils alignés ?

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit m un réel, $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 1)$ et $C_m(3, m, 3 - m)$.

1.

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC_m}$ en fonction de m.

INDICE

Commence par les coordonnées de $\overrightarrow{AC_m}$ en fonction de m ; calcule ensuite les déterminants comme avec des nombres.

2.

Pour quelle valeur de m les points A, B, C_m sont-ils alignés ?

INDICE

Les trois coordonnées doivent être nulles en même temps.

3.

On prend $m = 0$. Calcule l'aire du triangle ABC_0.

INDICE

Remplace m par 0 dans le résultat de la question 1.

Exercice 6

Un développement par bilinéarité, vérifié en coordonnées

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne $\vec{u}(1, 0, 2)$ et $\vec{v}(0, 1, -1)$.

1.

Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

INDICE

Trois déterminants, avec le signe moins au milieu.

2.

Sans calculer de nouveau déterminant, exprime $(\vec{u} + 2\vec{v}) \wedge (3\vec{u} - \vec{v})$ en fonction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, puis donne ses coordonnées.

INDICE

Développe en gardant l'ordre des facteurs ; deux termes sont nuls.

3.

Contrôle ce résultat par un calcul direct, puis calcule l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u} + 2\vec{v}$ et $3\vec{u} - \vec{v}$.

INDICE

Commence par les coordonnées des deux vecteurs.