BURHAN

Produit vectoriel : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-vectoriel/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Produit vectoriel	Entraînement	6

Exercice 1

Équation d'un plan donné par trois points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(1, -2, 0)$, $B(3, 1, 2)$, $C(2, -1, 0)$ et $D(1, 1, 6)$.

1.

Montre que A, B, C ne sont pas alignés et donne un vecteur normal au plan (ABC).

INDICE

Un seul calcul répond aux deux questions : celui de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(2, 3, 2)$ et $\overrightarrow{AC}(1, 1, 0)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X, Y, Z) les coordonnées de $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 0 - 2 \times 1 \\ &= -2, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\big(2 \times 0 - 2 \times 1\big) \\ &= 2, \\ Z &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 1 - 3 \times 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Donc $\vec{n}(-2, 2, -1)$.

Conséquences. Le vecteur $\vec{n}$ n'est pas nul :

- d'après la caractérisation de trois points alignés, A, B, C ne sont pas alignés ;
- d'après la propriété du vecteur normal au plan (ABC), $\vec{n}$ est normal à ce plan, et le vecteur $-\vec{n}(2, -2, 1)$, non nul et colinéaire à $\vec{n}$, l'est aussi.

Conclusion. Les points A, B, C ne sont pas alignés, et $-\vec{n}(2, -2, 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2.

Déduis-en une équation cartésienne du plan (ABC), puis contrôle-la avec B et C.

INDICE

Un vecteur normal (a, b, c) donne une équation $ax + by + cz + d = 0$; un point du plan fixe d.

CORRIGÉ

Forme de l'équation. Le vecteur $-\vec{n}(2, -2, 1)$ est normal au plan (ABC) : ce plan a une équation de la forme

$$2x - 2y + z + d = 0.$$

Calcul de d. Le point $A(1, -2, 0)$ appartient au plan :

$$\begin{aligned} &2 \times 1 - 2 \times (-2) \\ &\quad + 0 + d = 0 \\ &6 + d = 0 \\ &d = -6. \end{aligned}$$

Équation.

$$(ABC) : 2x - 2y + z - 6 = 0.$$

Contrôle. On remplace les coordonnées de B et de C dans le premier membre :

- pour $B(3, 1, 2)$: $2 \times 3 - 2 \times 1 + 2 - 6 = 0$;
- pour $C(2, -1, 0)$: $2 \times 2 - 2 \times (-1) + 0 - 6 = 0$.

Conclusion. Le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x - 2y + z - 6 = 0$, vérifiée par A, B et C.

3.

Le point D appartient-il au plan (ABC) ? Que peux-tu dire des quatre points A, B, C, D ?

INDICE

Remplace les coordonnées de D dans l'équation.

CORRIGÉ

On remplace les coordonnées de $D(1, 1, 6)$ dans le premier membre de l'équation de (ABC) :

$$2 \times 1 - 2 \times 1 + 6 - 6 = 0.$$

Le point D vérifie l'équation, donc $D \in (ABC)$.

Conclusion. D appartient au plan (ABC) : les quatre points A, B, C, D sont coplanaires.

4.

Calcule la distance de l'origine O au plan (ABC).

INDICE

Utilise la formule de distance à un plan du chapitre précédent.

CORRIGÉ

D'après la formule donnant la distance à un plan (chapitre précédent), avec l'équation $2x - 2y + z - 6 = 0$ et le point $O(0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} & d(O, (ABC)) \\ &= \frac{|2 \times 0 - 2 \times 0 + 0 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{6}{3} = 2. \end{aligned}$$

Conclusion. La distance de O au plan (ABC) vaut 2.

Exercice 2

De l'aire d'un triangle à sa hauteur

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points $A(2,-1,1)$, $B(3,1,3)$ et $C(5,2,1)$. On note h la longueur de la hauteur du triangle ABC issue de A.

1.

Calcule $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et déduis-en l'aire du triangle ABC.

INDICE

Aire du triangle : la moitié de la norme du produit vectoriel.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(1,2,2)$ et $\overrightarrow{AC}(3,3,0)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X,Y,Z) les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2\times 0 - 2\times 3 \\ &= -6, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\big(1\times 0 - 2\times 3\big) \\ &= 6, \\ Z &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1\times 3 - 2\times 3 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Triangle. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-6,6,-3)$ n'est pas nul. D'après la caractérisation de trois points alignés, A, B, C ne sont pas alignés : ABC est bien un triangle.

Aire. La norme du produit vectoriel vaut :

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| \\ &= \sqrt{(-6)^2+6^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{81} = 9. \end{aligned}$$

D'après la formule de l'aire d'un triangle :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\times 9 = \frac{9}{2}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-6,6,-3)$ et l'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{9}{2}$.

2.

Calcule la longueur BC, puis h.

INDICE

L'aire d'un triangle vaut aussi $\frac{1}{2} \times BC \times h$.

CORRIGÉ

Longueur BC. On a $\overrightarrow{BC}(2, 1, -2)$, donc :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Hauteur. L'aire du triangle vaut aussi $\frac{1}{2} \times BC \times h$. Avec la question 1 :

$$\frac{1}{2} \times 3 \times h = \frac{9}{2},$$

d'où $h = 3$.

Conclusion. $BC = 3$ et $h = 3$.

3.

Retrouve h comme distance du point A à la droite (BC).

INDICE

La droite (BC) passe par B et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

CORRIGÉ

La hauteur issue de A a pour longueur la distance $d(A,(BC))$. La droite (BC) passe par B et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

Coordonnées. $\overrightarrow{BA}(-1,-2,-2)$ et $\overrightarrow{BC}(2,1,-2)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X,Y,Z) les coordonnées de $\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-2)\times(-2) - (-2)\times 1 \\ &= 6, \\ Y &= -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -\big((-1)\times(-2) \\ &\quad -(-2)\times 2\big) \\ &= -6, \\ Z &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\times 1 - (-2)\times 2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\| \\ &= \sqrt{6^2+(-6)^2+3^2} \\ &= \sqrt{81} = 9. \end{aligned}$$

Distance. Par la formule donnant la distance à une droite, avec $BC=3$ (question 2) :

$$d(A,(BC)) = \frac{\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\|}{BC},$$

donc

$$d(A,(BC)) = \frac{9}{3} = 3.$$

Conclusion. On retrouve $h = d(A,(BC)) = 3$.

Exercice 3

Distance à une droite et projeté orthogonal

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note D la droite passant par $A(2, -1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 2, 2)$, et $M(5, -1, 3)$.

1.

Calcule la distance $d(M, D)$.

INDICE

Calcule d'abord $\overrightarrow{AM}$, puis $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AM}(3, 0, 3)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X, Y, Z) les coordonnées de $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 0 \times 2 - 3 \times 2 \\ &= -6, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -\big(3 \times 2 - 3 \times 1\big) \\ &= -3, \\ Z &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 2 - 0 \times 1 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Normes.

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{81} = 9, \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Distance. Par la formule donnant la distance à une droite, $d(M, D) = \dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$, donc :

$$d(M, D) = \frac{9}{3} = 3.$$

Conclusion. La distance du point M à la droite D vaut 3.

2.

Le projeté orthogonal H de M sur D s'écrit $H = A + t\vec{u}$, avec t réel. Détermine t, puis les coordonnées de H.

INDICE

H est le point de D tel que $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$.

CORRIGÉ

Coordonnées de H et de $\overrightarrow{MH}$. Le point $H = A + t\vec{u}$ a pour coordonnées $(2 + t, -1 + 2t, 2t)$. Avec $M(5, -1, 3)$, on obtient $\overrightarrow{MH}\,(-3 + t, 2t, -3 + 2t)$.

Condition d'orthogonalité. H est le point de D tel que $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$. Dans le repère orthonormé, cette condition s'écrit

$$\begin{aligned}(-3 + t) \times 1 + (2t) \times 2 \\ + (-3 + 2t) \times 2 = 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire $9t - 9 = 0$.

Résolution. On obtient $t = 1$, puis $H(2 + 1, -1 + 2, 2)$.

Conclusion. $t = 1$ et $H(3, 1, 2)$.

3.

Calcule MH et compare avec la question 1.

INDICE

Une distance entre deux points : racine de la somme des carrés.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{MH}(-2, 2, -1)$, donc :

$$\begin{aligned}MH &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{9} = 3.\end{aligned}$$

Conclusion. $MH = 3 = d(M, D)$: le calcul par le projeté orthogonal et la formule de la question 1 concordent.

Exercice 4

La droite commune à deux plans

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans $P : 2x - y + z - 1 = 0$ et $P' : x + y - z - 2 = 0$.

1.

Montre que P et P' sont sécants.

INDICE

Lis un vecteur normal sur chaque équation et compare leurs coordonnées.

CORRIGÉ

Vecteurs normaux. On lit sur les équations que $\vec{n}(2, -1, 1)$ est normal à P et que $\vec{n}'(1, 1, -1)$ est normal à P'.

Colinéarité. Les premières coordonnées sont dans le rapport $\dfrac{1}{2}$, les deuxièmes dans le rapport -1 : ces rapports diffèrent, donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires.

Plans. D'après le chapitre précédent, deux plans dont les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires ne sont pas parallèles.

Conclusion. Les plans P et P' sont sécants suivant une droite, notée Δ.

2.

Calcule $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ et donne un vecteur directeur simple de Δ.

INDICE

Par la propriété de l'intersection de deux plans, ce produit vectoriel dirige Δ.

CORRIGÉ

Dans le repère orthonormé direct, on note (X, Y, Z) les coordonnées de $\vec{n} \wedge \vec{n}'$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times (-1) - 1 \times 1 \\ &= 0, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -\big(2 \times (-1) - 1 \times 1\big) \\ &= 3, \\ Z &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 1 - (-1) \times 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Ainsi $\vec{n} \wedge \vec{n}'(0, 3, 3)$.

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires (question 1) : par la propriété de la droite d'intersection de deux plans, $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ dirige Δ.

Conclusion. Le vecteur $\vec{d}(0, 1, 1)$, non nul et colinéaire à $\vec{n} \wedge \vec{n}' = 3\vec{d}$, est un vecteur directeur simple de Δ.

3.

Trouve le point de Δ de cote $z = 0$, puis écris une représentation paramétrique de Δ.

INDICE

Avec $z = 0$, les deux équations forment un système en x et y ; additionne-les.

CORRIGÉ

Point de cote nulle. Avec $z = 0$, les équations de P et de P' donnent le système

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, $3x = 3$, donc $x = 1$, puis $y = 2 - 1 = 1$. Le point $A(1, 1, 0)$ appartient aux deux plans, donc à Δ.

Représentation paramétrique. La droite Δ passe par A et est dirigée par $\vec{d}(0, 1, 1)$:

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusion. Le point de Δ de cote nulle est $A(1, 1, 0)$, et la représentation ci-dessus est une représentation paramétrique de Δ.

4.

Contrôle ta représentation avec le point de paramètre $t = 1$.

INDICE

Ce point doit vérifier les deux équations.

CORRIGÉ

Pour $t = 1$, on obtient le point $(1, 2, 1)$. On remplace ses coordonnées dans les deux équations :

- dans P : $2 \times 1 - 2 + 1 - 1 = 0$;
- dans P' : $1 + 2 - 1 - 2 = 0$.

Conclusion. Le point $(1, 2, 1)$ est bien commun aux deux plans : la représentation est confirmée.

Exercice 5

Pour quelle valeur les trois points sont-ils alignés ?

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit m un réel, $A(1,-1,2)$, $B(2,1,1)$ et $C_m(3,m,3-m)$.

1.

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC_m}$ en fonction de m.

INDICE

Commence par les coordonnées de $\overrightarrow{AC_m}$ en fonction de m ; calcule ensuite les déterminants comme avec des nombres.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(1,2,-1)$ et $\overrightarrow{AC_m}(2,m+1,1-m)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X,Y,Z) les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC_m}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 2 & m+1 \\ -1 & 1-m \end{vmatrix} \\ &= 2(1-m)-(-1)(m+1) \\ &= 3-m, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1-m \end{vmatrix} \\ &= -\big(1\times(1-m) \\ &\quad -(-1)\times 2\big) \\ &= m-3, \\ Z &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & m+1 \end{vmatrix} \\ &= 1\times(m+1)-2\times 2 \\ &= m-3. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC_m}(3-m,m-3,m-3)$.

2.

Pour quelle valeur de m les points A, B, C_m sont-ils alignés ?

INDICE

Les trois coordonnées doivent être nulles en même temps.

CORRIGÉ

Caractérisation. D'après la caractérisation de trois points alignés, A, B, C_m sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC_m} = \vec{0}$, c'est-à-dire si et seulement si ses trois coordonnées sont nulles.

Résolution. D'après la question 1, il faut $3 - m = 0$ et $m - 3 = 0$: ces deux conditions reviennent à $m = 3$.

Contrôle. Pour $m = 3$, on a $C_3(3, 3, 0)$ et $\overrightarrow{AC_3}(2, 4, -2) = 2\overrightarrow{AB}$: les vecteurs sont bien colinéaires.

Conclusion. Les points A, B, C_m sont alignés si et seulement si $m = 3$.

3.

On prend $m = 0$. Calcule l'aire du triangle ABC_0.

INDICE

Remplace m par 0 dans le résultat de la question 1.

CORRIGÉ

Produit vectoriel. Pour $m = 0$, la question 1 donne $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC_0}(3, -3, -3)$. Ce vecteur n'est pas nul : A, B, C_0 forment un triangle.

Norme.

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC_0}\| \\ &= \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Aire. D'après la formule de l'aire d'un triangle :

$$\mathcal{A}_{ABC_0} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Conclusion. L'aire du triangle ABC_0 vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 6

Un développement par bilinéarité, vérifié en coordonnées

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne $\vec{u}(1,0,2)$ et $\vec{v}(0,1,-1)$.

1.

Calcule $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

INDICE

Trois déterminants, avec le signe moins au milieu.

CORRIGÉ

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X,Y,Z) les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 0\times(-1) - 2\times 1 \\ &= -2, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -\big(1\times(-1) - 2\times 0\big) \\ &= 1, \\ Z &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1\times 1 - 0\times 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}\wedge\vec{v}(-2,1,1)$.

Contrôle. Ce vecteur doit être orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} &(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{u} \\ &= (-2)\times 1 + 1\times 0 + 1\times 2 \\ &= -2+0+2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{v} \\ &= (-2)\times 0 + 1\times 1 \\ &\quad + 1\times(-1) \\ &= 0+1-1 = 0. \end{aligned}$$

Conclusion. $\vec{u}\wedge\vec{v}(-2,1,1)$.

2.

Sans calculer de nouveau déterminant, exprime $(\vec{u}+2\vec{v})\wedge(3\vec{u}-\vec{v})$ en fonction de $\vec{u}\wedge\vec{v}$, puis donne ses coordonnées.

INDICE

Développe en gardant l'ordre des facteurs ; deux termes sont nuls.

CORRIGÉ

Développement. Par bilinéarité, on développe en gardant l'ordre des facteurs. On simplifie ensuite par la propriété du produit vectoriel nul ($\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{v}\wedge\vec{v}=\vec{0}$) et par l'antisymétrie ($\vec{v}\wedge\vec{u}=-\vec{u}\wedge\vec{v}$), toutes admises :

$$\begin{aligned}&(\vec{u}+2\vec{v})\wedge(3\vec{u}-\vec{v})\\&=3\,\vec{u}\wedge\vec{u}-\vec{u}\wedge\vec{v}\\&\quad+6\,\vec{v}\wedge\vec{u}-2\,\vec{v}\wedge\vec{v}\\&=\vec{0}-\vec{u}\wedge\vec{v}\\&\quad-6\,\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{0}\\&=-7\,(\vec{u}\wedge\vec{v}).\end{aligned}$$

Coordonnées. Avec la question 1 :

$$\begin{aligned}&-7\times(-2,1,1)\\&=(14,-7,-7).\end{aligned}$$

Conclusion. $(\vec{u}+2\vec{v})\wedge(3\vec{u}-\vec{v})=-7\,(\vec{u}\wedge\vec{v})$, de coordonnées $(14,-7,-7)$.

3.

Contrôle ce résultat par un calcul direct, puis calcule l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}+2\vec{v}$ et $3\vec{u}-\vec{v}$.

INDICE

Commence par les coordonnées des deux vecteurs.

CORRIGÉ

Coordonnées des facteurs. Le vecteur $\vec{u}+2\vec{v}$ a pour coordonnées $(1,2,0)$, et le vecteur $3\vec{u}-\vec{v}$ a pour coordonnées $(3,-1,7)$.

Calcul direct. Dans le repère orthonormé direct, on note (X,Y,Z) les coordonnées de $(\vec{u}+2\vec{v})\wedge(3\vec{u}-\vec{v})$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 2\times 7 - 0\times(-1) \\ &= 14, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ &= -\big(1\times 7 - 0\times 3\big) \\ &= -7, \\ Z &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1\times(-1) - 2\times 3 \\ &= -7. \end{aligned}$$

On retrouve $(14,-7,-7)$.

Aire. Ce produit n'est pas nul : la propriété du produit vectoriel nul, admise, montre que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. D'après la formule de l'aire d'un parallélogramme, l'aire cherchée est la norme de ce produit vectoriel :

$$\begin{aligned} &\|(\vec{u}+2\vec{v})\wedge(3\vec{u}-\vec{v})\| \\ &= \sqrt{14^2+(-7)^2+(-7)^2} \\ &= \sqrt{294} = 7\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le calcul direct confirme les coordonnées $(14,-7,-7)$, et l'aire du parallélogramme vaut $7\sqrt{6}$.