BURHAN

Produit vectoriel : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-vectoriel/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Produit vectoriel	Application	8

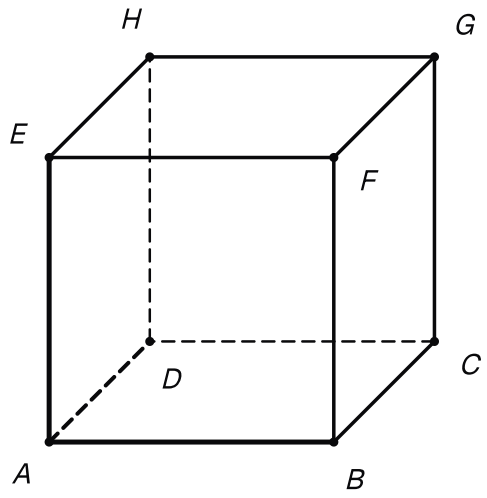
Exercice 1

Orienter des bases tirées d'un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 : la face $ABCD$ est en dessous, la face $EFGH$ au-dessus, et les arêtes verticales sont $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$.

On admet que la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est directe. Trace le cube à main levée.

Pour chaque base, dis si elle est directe ou indirecte et nomme la règle employée.



Le cube d'arête 1 et les trois vecteurs AB, AD, AE portés par les arêtes issues de A.

a)

$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB})$.

INDICE

Pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ et écris la nouvelle base avec ces lettres : l'ordre circulaire $\vec{u} \to \vec{v} \to \vec{w} \to \vec{u}$ est-il conservé ?

b)

$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.

INDICE

Compare position par position avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: combien de vecteurs ont bougé ?

c)

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EA})$.

INDICE

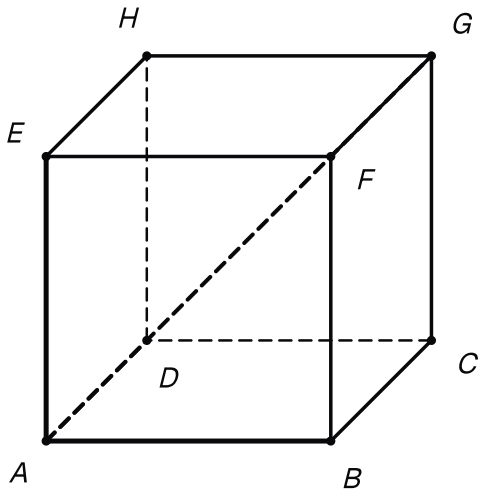
Écris $\overrightarrow{EA}$ à l'aide de $\overrightarrow{AE}$.

Exercice 2

Trois produits vectoriels dans le cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 : la face $ABCD$ est en dessous, la face $EFGH$ au-dessus, et les arêtes verticales sont $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$.

La base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est orthonormée directe, ce que l'on admet.



Le cube d'arête 1, les arêtes [AB], [AD], [AE] et la diagonale [AG], toutes issues de A.

1.

Justifie que la base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est directe.

INDICE

Compare l'ordre des vecteurs avec celui de la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

2.

Montre que $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ en vérifiant les trois conditions de la définition.

INDICE

Vérifie une condition après l'autre ; l'angle $\widehat{EAB}$ est droit.

3.

En déduire $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}$.

INDICE

On a seulement échangé les deux vecteurs.

4.

On note θ la mesure de l'angle $\widehat{BAG}$. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, calcule $\cos\theta$ par un produit scalaire.

INDICE

Le repère est orthonormé : $\overrightarrow{AB}(1,0,0)$ et $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$.

5.

En déduire $\sin\theta$, puis $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AG}\|$.

INDICE

Pense à $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, et au signe de $\sin\theta$ sur $]0, \pi[$.

Exercice 3

Développer avec les règles de calcul admises

L'espace est orienté. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires ; on pose $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Exprime chaque vecteur en fonction de $\vec{n}$ et cite la propriété admise que tu emploies.

a)

$\vec{v} \wedge \vec{u}$ et $(-\vec{u}) \wedge \vec{v}$.

INDICE

Le premier échange les facteurs ; le second multiplie un facteur par le réel -1.

b)

$(2\vec{u}) \wedge (-3\vec{v})$.

INDICE

Sors les deux réels l'un après l'autre.

c)

$(2\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{u} + 3\vec{v})$.

INDICE

Développe comme un produit de deux sommes, sans changer l'ordre des facteurs ; puis utilise $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

Exercice 4

Coordonnées d'un produit vectoriel, contrôlées

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne $\vec{u}(2, -2, -3)$ et $\vec{v}(2, -1, -2)$.

a)

Calcule les coordonnées de $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

INDICE

Écris les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ en deux colonnes. Cache une ligne à la fois ; n'oublie pas le signe moins devant le deuxième déterminant.

b)

Contrôle ton résultat par deux produits scalaires.

INDICE

Le produit vectoriel est orthogonal à chacun de ses deux facteurs.

c)

Calcule $\|\vec{w}\|$. On note θ la mesure de l'angle géométrique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: déduis-en $\sin\theta$.

INDICE

La norme du produit vectoriel vaut $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$.

Exercice 5

Aire d'un triangle par un produit vectoriel

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2, -1, 1)$, $B(-1, 1, 3)$ et $C(-1, -1, 2)$.

a)

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{AC}$, puis de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Coordonnées d'un vecteur : extrémité moins origine. Puis trois déterminants.

b)

Justifie que A, B, C forment un triangle. Calcule l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$, puis l'aire du parallélogramme $ABDC$, où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Le triangle a pour aire la **moitié** de la norme ; le parallélogramme, la norme entière.

Exercice 6

Alignés ou non ? Un produit vectoriel tranche

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(0, 1, -2)$, $B(2, 2, -1)$, $C(-4, -1, -4)$ et $D(1, 0, 1)$.

a)

Les points A, B, C sont-ils alignés ?

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et regarde s'il est nul.

b)

Les points A, B, D sont-ils alignés ?

INDICE

Même calcul avec $\overrightarrow{AD}$; une seule coordonnée non nulle suffit pour conclure.

Exercice 7

Un vecteur normal au plan (ABC) en un calcul

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne $A(0, 2, 1)$, $B(2, 4, 0)$ et $C(-2, 2, 0)$.

a)

Calcule $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Que peux-tu en conclure pour les points A, B, C et pour le plan (ABC) ?

INDICE

Un produit vectoriel non nul prouve deux choses à la fois.

b)

Donne un vecteur normal à (ABC) de coordonnées plus simples, puis contrôle-le par deux produits scalaires.

INDICE

Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est encore normal au plan.

Exercice 8

Distance d'un point à une droite de l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La droite D a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Le point $M(4, 3, 3)$ est un point de l'espace.

a)

Lis sur la représentation paramétrique un point A de D et un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.

INDICE

Le point s'obtient pour $t = 0$; les coefficients de t donnent un vecteur directeur.

b)

Calcule $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$, puis $d(M, D)$.

INDICE

Divise la norme de $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$ par la norme de $\vec{u}$.