BURHAN

Produit vectoriel : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-vectoriel/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Produit vectoriel	Application	8

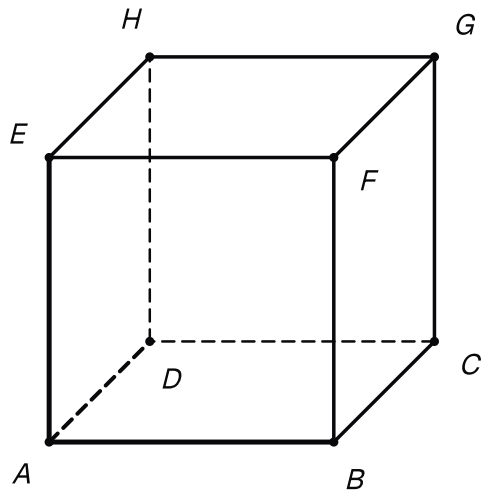
Exercice 1

Orienter des bases tirées d'un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 : la face $ABCD$ est en dessous, la face $EFGH$ au-dessus, et les arêtes verticales sont $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$.

On admet que la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est directe. Trace le cube à main levée.

Pour chaque base, dis si elle est directe ou indirecte et nomme la règle employée.



Le cube d'arête 1 et les trois vecteurs AB, AD, AE portés par les arêtes issues de A.

a)

$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB})$.

INDICE

Pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ et écris la nouvelle base avec ces lettres : l'ordre circulaire $\vec{u} \to \vec{v} \to \vec{w} \to \vec{u}$ est-il conservé ?

CORRIGÉ

Comparaison. On passe de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ à $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB})$ en envoyant le premier vecteur à la fin : c'est une permutation circulaire.

Règle. D'après la règle du changement d'ordre, admise, une permutation circulaire des vecteurs d'une base directe donne une base directe.

Contrôle avec le bonhomme d'Ampère. On le place le long du troisième vecteur $\overrightarrow{AB}$: debout le long de (AB), les pieds en A et la tête vers B, il regarde D et voit E à sa gauche.

Conclusion. La base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB})$ est **directe**.

b)

$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.

INDICE

Compare position par position avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: combien de vecteurs ont bougé ?

CORRIGÉ

Par rapport à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, le troisième vecteur reste $\overrightarrow{AE}$; les deux premiers sont échangés.

D'après la règle du changement d'ordre, admise, échanger deux vecteurs d'une base directe donne une base indirecte.

Conclusion. La base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ est **indirecte**.

c)

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EA})$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{EA}$ à l'aide de $\overrightarrow{AE}$.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE}$: par rapport à la base de référence, seul le sens du troisième vecteur change.

D'après la règle du changement de sens, admise, la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, -\overrightarrow{AE})$ est alors indirecte.

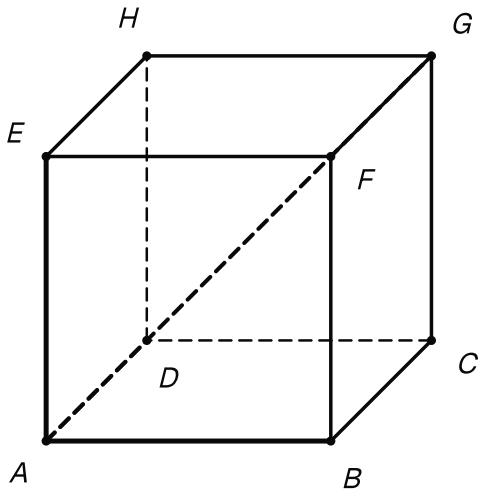
Conclusion. La base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EA})$ est **indirecte**.

Exercice 2

Trois produits vectoriels dans le cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 : la face $ABCD$ est en dessous, la face $EFGH$ au-dessus, et les arêtes verticales sont $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$.

La base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est orthonormée directe, ce que l'on admet.



Le cube d'arête 1, les arêtes [AB], [AD], [AE] et la diagonale [AG], toutes issues de A.

1.

Justifie que la base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est directe.

INDICE

Compare l'ordre des vecteurs avec celui de la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

CORRIGÉ

On passe de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ à $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ en envoyant le dernier vecteur en tête : c'est une permutation circulaire.

Conclusion. D'après la règle du changement d'ordre, admise, la base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est directe.

2.

Montre que $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ en vérifiant les trois conditions de la définition.

INDICE

Vérifie une condition après l'autre ; l'angle $\widehat{EAB}$ est droit.

CORRIGÉ

Les deux facteurs. Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ portent deux arêtes issues de A : ils sont orthogonaux, donc non colinéaires, et l'angle $\widehat{EAB}$ mesure $\frac{\pi}{2}$.

Les trois conditions de la définition, pour le vecteur $\overrightarrow{AD}$:

1. $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AE}$ et à $\overrightarrow{AB}$, car l'arête $[AD]$ est perpendiculaire aux deux autres ;
2. la base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est directe (question 1) ;
3. les normes sont égales :

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{AE}\| \, \|\overrightarrow{AB}\| \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 1 \times 1 \times 1 = 1 = \|\overrightarrow{AD}\|. \end{aligned}$$

Conclusion. Le produit vectoriel est l'unique vecteur qui vérifie ces trois conditions, donc $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.

3.

En déduire $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}$.

INDICE

On a seulement échangé les deux vecteurs.

CORRIGÉ

D'après l'antisymétrie du produit vectoriel, admise, et la question 2 :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE} \\ &= -\left(\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \\ &= -\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DA}$.

4.

On note θ la mesure de l'angle $\widehat{BAG}$. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, calcule $\cos\theta$ par un produit scalaire.

INDICE

Le repère est orthonormé : $\overrightarrow{AB}(1,0,0)$ et $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$.

CORRIGÉ

Angle. Le point G n'est pas sur la droite (AB) : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires, donc $\theta \in]0,\pi[$.

Produit scalaire et longueur. Dans ce repère orthonormé, $\overrightarrow{AB}(1,0,0)$ et $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG} &= 1\times 1 + 0\times 1\\ &\quad + 0\times 1\\ &= 1+0+0 = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AG &= \sqrt{1^2+1^2+1^2}\\ &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Cosinus. Comme $AB = 1$:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}}{AB\times AG} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Conclusion. $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

5.

En déduire $\sin\theta$, puis $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AG}\|$.

INDICE

Pense à $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, et au signe de $\sin\theta$ sur $]0,\pi[$.

CORRIGÉ

Sinus. D'après la question 4, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, donc :

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Comme $\theta \in]0,\pi[$, on a $\sin\theta > 0$, d'où $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Norme. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires ; d'après la définition du produit vectoriel :

$$\begin{aligned}&\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AG}\|\\ &= AB\times AG\times\sin\theta\\ &= 1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\\ &= \frac{\sqrt{18}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ et $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{2}$.

Exercice 3

Développer avec les règles de calcul admises

L'espace est orienté. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires ; on pose $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Exprime chaque vecteur en fonction de $\vec{n}$ et cite la propriété admise que tu emploies.

a)

$\vec{v} \wedge \vec{u}$ et $(-\vec{u}) \wedge \vec{v}$.

INDICE

Le premier échange les facteurs ; le second multiplie un facteur par le réel -1.

CORRIGÉ

Premier vecteur. D'après l'antisymétrie, admise : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\vec{n}$.

Second vecteur. D'après la bilinéarité, admise, avec le réel -1 : $(-\vec{u}) \wedge \vec{v} = -(\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\vec{n}$.

Conclusion. $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{n}$ et $(-\vec{u}) \wedge \vec{v} = -\vec{n}$.

b)

$(2\vec{u}) \wedge (-3\vec{v})$.

INDICE

Sors les deux réels l'un après l'autre.

CORRIGÉ

D'après la bilinéarité, admise, on sort les réels 2 et -3 l'un après l'autre :

$$\begin{aligned}&(2\vec{u}) \wedge (-3\vec{v})\\ &= 2 \times (-3)\,(\vec{u} \wedge \vec{v}) = -6\vec{n}.\end{aligned}$$

Conclusion. $(2\vec{u}) \wedge (-3\vec{v}) = -6\vec{n}$.

c)

$(2\vec{u}-\vec{v})\wedge(\vec{u}+3\vec{v})$.

INDICE

Développe comme un produit de deux sommes, sans changer l'ordre des facteurs ; puis utilise $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$.

CORRIGÉ

Développement. Par bilinéarité, admise, on développe en gardant l'ordre de chaque produit :

$$\begin{aligned}&(2\vec{u}-\vec{v})\wedge(\vec{u}+3\vec{v})\\&=2\,\vec{u}\wedge\vec{u}+6\,\vec{u}\wedge\vec{v}\\&\quad-\vec{v}\wedge\vec{u}-3\,\vec{v}\wedge\vec{v}.\end{aligned}$$

Réduction. D'après la propriété du produit vectoriel nul, admise, $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{v}\wedge\vec{v}=\vec{0}$. D'après l'antisymétrie, admise, $-\vec{v}\wedge\vec{u}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{n}$. Donc :

$$\begin{aligned}&(2\vec{u}-\vec{v})\wedge(\vec{u}+3\vec{v})\\&=\vec{0}+6\vec{n}+\vec{n}-\vec{0}=7\vec{n}.\end{aligned}$$

Conclusion. $(2\vec{u}-\vec{v})\wedge(\vec{u}+3\vec{v})=7\vec{n}$.

Exercice 4

Coordonnées d'un produit vectoriel, contrôlées

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne $\vec{u}(2, -2, -3)$ et $\vec{v}(2, -1, -2)$.

a)

Calcule les coordonnées de $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

INDICE

Écris les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ en deux colonnes. Cache une ligne à la fois ; n'oublie pas le signe moins devant le deuxième déterminant.

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé direct : la formule des coordonnées du produit vectoriel, admise, s'applique. On note (X, Y, Z) les coordonnées de $\vec{w}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \times (-2) \\ &\quad - (-3) \times (-1) \\ &= 1, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -\big(2 \times (-2) - (-3) \times 2\big) \\ &= -2, \\ Z &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-1) - (-2) \times 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Conclusion. Donc $\vec{w}(1, -2, 2)$.

b)

Contrôle ton résultat par deux produits scalaires.

INDICE

Le produit vectoriel est orthogonal à chacun de ses deux facteurs.

CORRIGÉ

Le produit vectoriel doit être orthogonal à chacun de ses facteurs. On calcule les deux produits scalaires dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned}\vec{w}\cdot\vec{u} &= 1\times 2+(-2)\times(-2)\\ &\quad +2\times(-3)\\ &= 2+4-6=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{w}\cdot\vec{v} &= 1\times 2+(-2)\times(-1)\\ &\quad +2\times(-2)\\ &= 2+2-4=0\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux produits scalaires sont nuls : $\vec{w}$ est bien orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, ce qui confirme le calcul de la question 1.

c)

Calcule $\|\vec{w}\|$. On note θ la mesure de l'angle géométrique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: déduis-en $\sin\theta$.

INDICE

La norme du produit vectoriel vaut $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$.

CORRIGÉ

Normes.

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\| &= \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\\ &= \sqrt{9}=3,\\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{2^2+(-2)^2+(-3)^2}\\ &= \sqrt{17},\\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\\ &= \sqrt{9}=3.\end{aligned}$$

Angle. Comme $\vec{w}\neq\vec{0}$, la propriété du produit vectoriel nul, admise, montre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi $\theta\in\,]0,\pi[$.

Sinus. Par la définition, $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$, donc :

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{3}{\sqrt{17}\times 3}\\ &= \frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\|\vec{w}\|=3$ et $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

Exercice 5

Aire d'un triangle par un produit vectoriel

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(2,-1,1)$, $B(-1,1,3)$ et $C(-1,-1,2)$.

a)

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{AC}$, puis de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Coordonnées d'un vecteur : extrémité moins origine. Puis trois déterminants.

CORRIGÉ

Coordonnées des vecteurs. On soustrait les coordonnées de l'origine à celles de l'extrémité : $\overrightarrow{AB}(-3,2,2)$ et $\overrightarrow{AC}(-3,0,1)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X,Y,Z) les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\times 1 - 2\times 0 \\ &= 2, \\ Y &= -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\big((-3)\times 1 - 2\times(-3)\big) \\ &= -3, \\ Z &= \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-3)\times 0 - 2\times(-3) \\ &= 6. \end{aligned}$$

Contrôle. Ce vecteur doit être orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} &\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB} \\ &= 2\times(-3) + (-3)\times 2 \\ &\quad + 6\times 2 \\ &= -6-6+12 = 0, \\ &\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC} \\ &= 2\times(-3) + (-3)\times 0 \\ &\quad + 6\times 1 \\ &= -6+0+6 = 0. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB}(-3,2,2)$, $\overrightarrow{AC}(-3,0,1)$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,-3,6)$.

b)

Justifie que A, B, C forment un triangle. Calcule l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$, puis l'aire du parallélogramme $ABDC$, où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Le triangle a pour aire la **moitié** de la norme ; le parallélogramme, la norme entière.

CORRIGÉ

Triangle. Le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ n'est pas nul : d'après la caractérisation de trois points alignés, A, B, C ne sont pas alignés. Ils forment donc un triangle.

Norme.

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \\ &= \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{49} = 7. \end{aligned}$$

Aires. D'après la formule de l'aire d'un triangle et d'un parallélogramme :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \\ &= \frac{7}{2}, \\ \mathcal{A}_{ABDC} &= \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 7. \end{aligned}$$

Conclusion. A, B, C forment un triangle d'aire $\dfrac{7}{2}$, et le parallélogramme $ABDC$ a pour aire 7.

Exercice 6

Alignés ou non ? Un produit vectoriel tranche

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(0, 1, -2)$, $B(2, 2, -1)$, $C(-4, -1, -4)$ et $D(1, 0, 1)$.

a)

Les points A, B, C sont-ils alignés ?

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et regarde s'il est nul.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(2, 1, 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-4, -2, -2)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X, Y, Z) les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-2) - 1 \times (-2) \\ &= 0, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -\big(2 \times (-2) - 1 \times (-4)\big) \\ &= 0, \\ Z &= \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-2) - 1 \times (-4) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Ainsi $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$: d'après la caractérisation de trois points alignés, les points A, B, C sont **alignés**.

b)

Les points A, B, D sont-ils alignés ?

INDICE

Même calcul avec $\overrightarrow{AD}$; une seule coordonnée non nulle suffit pour conclure.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AD}(1, -1, 3)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X, Y, Z) les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 3 - 1 \times (-1) \\ &= 4, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -\big(2 \times 3 - 1 \times 1\big) \\ &= -5, \\ Z &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-1) - 1 \times 1 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Conclusion. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}(4, -5, -3)$ n'est pas nul : d'après la caractérisation de trois points alignés, les points A, B, D ne sont **pas alignés**.

Exercice 7

Un vecteur normal au plan (ABC) en un calcul

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne $A(0,2,1)$, $B(2,4,0)$ et $C(-2,2,0)$.

a)

Calcule $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. Que peux-tu en conclure pour les points A, B, C et pour le plan (ABC) ?

INDICE

Un produit vectoriel non nul prouve deux choses à la fois.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(2,2,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,0,-1)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X,Y,Z) les coordonnées de $\vec{n}$:

$$\begin{aligned}
X &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 2\times(-1)-(-1)\times 0 \\
&= -2, \\
Y &= -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -\big(2\times(-1) \\
&\quad -(-1)\times(-2)\big) \\
&= 4, \\
Z &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2\times 0-2\times(-2) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Donc $\vec{n}(-2,4,4)$.

Conséquences. Le vecteur $\vec{n}$ n'est pas nul :

- d'après la caractérisation de trois points alignés, A, B, C ne sont pas alignés, donc ils définissent un plan (ABC) ;
- d'après la propriété du vecteur normal au plan (ABC), $\vec{n}$ est normal à ce plan.

Conclusion. Les points A, B, C ne sont pas alignés et $\vec{n}(-2,4,4)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b)

Donne un vecteur normal à (ABC) de coordonnées plus simples, puis contrôle-le par deux produits scalaires.

INDICE

Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est encore normal au plan.

CORRIGÉ

Un vecteur plus simple. Le vecteur $\vec{m} = -\frac{1}{2}\vec{n}$, de coordonnées $(1, -2, -2)$, est non nul et colinéaire à $\vec{n}$: il est donc normal au plan (ABC).

Contrôle. Il doit être orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}\vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} &= 1 \times 2 + (-2) \times 2 \\ &\quad + (-2) \times (-1) \\ &= 2 - 4 + 2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 1 \times (-2) + (-2) \times 0 \\ &\quad + (-2) \times (-1) \\ &= -2 + 0 + 2 = 0.\end{aligned}$$

Conclusion. Le vecteur $\vec{m}(1, -2, -2)$ est normal au plan (ABC).

Exercice 8

Distance d'un point à une droite de l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La droite D a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Le point $M(4, 3, 3)$ est un point de l'espace.

a)

Lis sur la représentation paramétrique un point A de D et un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.

INDICE

Le point s'obtient pour $t = 0$; les coefficients de t donnent un vecteur directeur.

CORRIGÉ

Un point. Pour $t = 0$, on obtient le point $A(1, 0, 3)$ de D.

Un vecteur directeur. Les coefficients de t donnent le vecteur directeur $\vec{u}(2, 1, -2)$.

Conclusion. D passe par $A(1, 0, 3)$ et est dirigée par $\vec{u}(2, 1, -2)$.

b)

Calcule $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$, puis $d(M, D)$.

INDICE

Divise la norme de $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$ par la norme de $\vec{u}$.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AM}(3, 3, 0)$.

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, on note (X, Y, Z) les coordonnées de $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times (-2) - 0 \times 1 \\ &= -6, \\ Y &= -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -\big(3 \times (-2) - 0 \times 2\big) \\ &= 6, \\ Z &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 1 - 3 \times 2 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Normes.

$$\begin{aligned} &\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| \\ &= \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{81} = 9, \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Distance. Par la formule donnant la distance à une droite :

$$\begin{aligned} d(M, D) &= \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \\ &= \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}(-6, 6, -3)$ et $d(M, D) = 3$.