BURHAN

Produit vectoriel

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-vectoriel/cours

Chapitre	Semestre
Produit vectoriel	Semestre 2

Un vecteur orthogonal à deux vecteurs, sans système

Une voile de bateau est tendue entre trois points : le haut du mât, le pied du mât et l'avant du pont. Le skipper veut connaître son aire, et la direction perpendiculaire à la toile.

Au chapitre précédent, un vecteur normal au plan (ABC) demandait deux produits scalaires nuls, donc un système. Ici, un seul calcul donnera ce vecteur, et sa norme donnera l'aire.

Fais un croquis à main levée : il guide ton calcul, il ne remplace aucune preuve.

Devine : Un vecteur perpendiculaire à la voile

Au chapitre précédent, comment obtenais-tu un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (ABC) ?

A. On calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et on garde ce nombre.

Faux.

Faux. Un produit scalaire est un réel, pas un vecteur : il ne peut pas être normal à un plan.

B. On écrit $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, puis on résout.

Juste.

C'est juste. Deux équations pour trois inconnues : on fixe une coordonnée, puis on résout. Ce chapitre remplace ce système par un seul calcul.

C. On prend $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, la somme des deux vecteurs.

Faux.

Faux. Ce vecteur est dans le plan (ABC) : il dirige le plan au lieu de lui être orthogonal.

D. On prend $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$, car il relie deux points du plan.

Faux.

Faux. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur de direction du plan, pas un vecteur normal.

Indice 1

Relis la définition d'un vecteur normal à un plan : non nul, et orthogonal à quoi ?

Correction

Un vecteur normal $\vec{n}$ est non nul et orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, qui ne sont pas colinéaires.

On écrivait donc deux produits scalaires nuls, puis on résolvait le système obtenu. Le **produit vectoriel** donnera ce vecteur directement.

Voici le chemin. D'abord, tu orientes l'espace avec ta main droite. Ensuite, tu définis le **produit vectoriel** de deux vecteurs et tu apprends ses règles de calcul, qui sont admises. Enfin, tu démontres cinq usages : l'aire d'un triangle, l'alignement de trois points, l'équation d'un plan, la distance d'un point à une droite et l'intersection de deux plans.

Orienter l'espace

Une main droite pour orienter

Visse un bouchon sur une bouteille : tu tournes dans un sens, et le bouchon descend. Dans l'autre sens, il remonte. L'espace a ainsi deux sens de rotation, et il faut en choisir un.

Les physiciens ont fixé une convention : le **bonhomme d'Ampère**. Pour une base de trois vecteurs, il se tient debout le long du troisième, pieds à l'origine, tête à l'extrémité. Il regarde vers le premier. Si le deuxième est à sa gauche, la base est directe.

Devine : Le personnage dans le cube

Prends le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 : face $ABCD$ en dessous, face $EFGH$ au-dessus, arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$. Vu de dessus, l'angle de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AD}$ est un quart de tour dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Un personnage se tient debout sur $[AE]$, les pieds en A, et regarde vers D. Où voit-il B ?

A. Derrière lui.

Faux.

Faux. L'angle $\widehat{BAD}$ est droit : B est sur le côté, pas derrière.

B. Devant lui, sur sa ligne de regard.

Faux.

Faux. Devant lui se trouve D ; B est à un quart de tour de D.

C. À sa droite.

Juste.

C'est juste. Vu de dessus, revenir de D vers B, c'est tourner dans le sens des aiguilles d'une montre, donc vers la droite.

D. À sa gauche.

Faux.

Faux. Ce serait le cas si l'angle de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AD}$ tournait dans le sens des aiguilles d'une montre, vu de dessus.

Indice 1

Regarde le carré $ABCD$ de dessus : dans quel sens tourne-t-on pour aller de D vers B ?

Correction

Debout le long de $[AE]$, la tête en E, le personnage regarde vers D. Vu de dessus, B s'obtient à partir de D par un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre. Il voit donc B à sa droite.

> S'il se tourne vers B, il voit D à sa gauche. Mime la scène avec un crayon debout sur ta table.

Définition : Orientation de l'espace ; base et repère directs

On oriente l'espace par la convention du **bonhomme d'Ampère**.

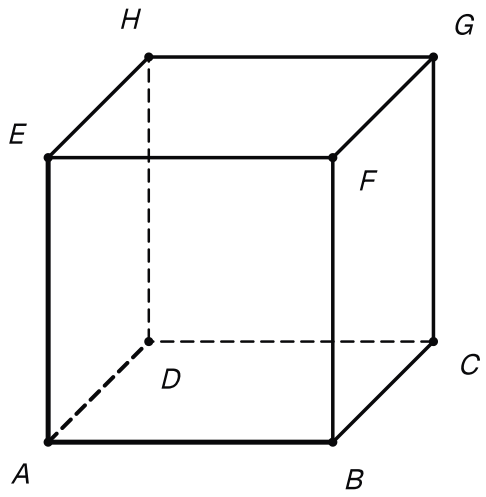
- Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de l'espace, A un point, et B, C, D les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$. Un observateur se tient debout le long de la droite (AD), les pieds en A et la tête du côté de D ; il regarde vers B.
- La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **directe** si l'observateur voit C à sa gauche ; elle est **indirecte** s'il voit C à sa droite.
- Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormé direct** si sa base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée et directe.

Exemple : Le cube : une base directe

Dans le cube, la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est **directe** : le personnage debout sur $[AE]$, qui regarde vers B, voit D à sa gauche. Elle est aussi orthonormée : arêtes perpendiculaires, de longueur 1. Le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est donc **orthonormé direct**.

On y lit $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$ et $H(0,1,1)$.

Avec ta main droite : pouce sur $\overrightarrow{AB}$, index sur $\overrightarrow{AD}$, ton majeur pointe vers E. Ce geste n'est qu'une aide. Et si l'on change l'ordre des trois vecteurs ?



La base (AB, AD, AE) du cube : debout sur [AE] et tourné vers B, on voit D sur sa gauche.

Changer l'ordre des vecteurs

Propriété : Changer l'ordre ou le sens des vecteurs d'une base

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base **directe**. Alors :

1. les bases $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ et $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ sont directes ;
2. les bases $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$, $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ et $(\vec{u}, \vec{v}, -\vec{w})$ sont indirectes.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. On ne le démontre pas, faute d'une définition plus précise de l'orientation. Tu peux le vérifier sur des cas, avec le personnage ou avec ta main droite.

Exemple : Trois bases tirées du cube

Pars de la base directe $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ du cube.

- $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB})$ s'obtient par une permutation circulaire : elle est **directe**.
- $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ échange les deux premiers vecteurs : elle est **indirecte**.
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EA})$ change le sens du troisième, car $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE}$: elle est **indirecte**.

Chaque conclusion cite la propriété admise sur l'ordre et le sens des vecteurs d'une base.

Reconnaître une base directe

À retenir

Une base est soit directe, soit indirecte. Pour le savoir, place le personnage le long du troisième vecteur et fais-le regarder vers le premier.

Une permutation circulaire garde l'orientation. Échanger deux vecteurs, ou changer le sens d'un seul, la change.

Dans tout le chapitre, le cube est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Méthode : Reconnaître une base directe

1. **Placer** le personnage le long du troisième vecteur : pieds à l'origine commune, tête vers son extrémité.
2. **Regarder** vers l'extrémité du premier vecteur.

3. **Conclure** : base directe si l'extrémité du deuxième vecteur est à gauche, indirecte si elle est à droite.
4. **Raccourcir** : depuis une base connue, une permutation circulaire garde l'orientation ; un échange ou un changement de sens la change.

À toi : Deux bases à classer

Rédige : la base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est-elle directe ? Et la base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$? Justifie chaque réponse par la propriété admise. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris chaque base à partir de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, qui est directe.
Indice 2
La première base est $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$; la seconde est $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$.
Indice 3
Une permutation circulaire garde l'orientation ; l'échange de deux vecteurs la change.

Réponse
Posons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$: la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ du cube est directe.

Première base. La base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ s'écrit $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$: c'est une permutation circulaire de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. D'après la propriété admise sur l'ordre des vecteurs, elle est **directe**.

Deuxième base. La base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ s'écrit $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$: elle échange $\vec{u}$ et $\vec{w}$, donc elle est **indirecte**.

Conclusion. La base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est directe, et la base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ est indirecte.

Le produit vectoriel

Rappels utiles

Petit rappel. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, l'angle géométrique qu'ils forment mesure $\theta \in]0, \pi[$. Sur cet intervalle, $\sin\theta > 0$ (trigonométrie). De plus, $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$.

Enfin, deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul (chapitre précédent).

Devine : Orthogonal à deux arêtes

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, lequel de ces vecteurs est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AD}$?

A. $\overrightarrow{AC}$
Faux.

Faux. $\overrightarrow{AC}$ est dans la face $ABCD$: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$.

B. $\overrightarrow{AG}$

Faux.

Faux. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$, qui n'est pas nul.

C. $\overrightarrow{BD}$

Faux.

Faux. $\overrightarrow{BD}$ est dans la face $ABCD$: $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = -1$.

D. $\overrightarrow{AE}$

Juste.

C'est juste. L'arête $[AE]$ est perpendiculaire à la face $ABCD$: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Indice 1

Cherche une arête perpendiculaire à la face $ABCD$.

Correction

Dans le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a $\overrightarrow{AE}(0, 0, 1)$, $\overrightarrow{AB}(1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{AD}(0, 1, 0)$. Les deux produits scalaires valent 0.

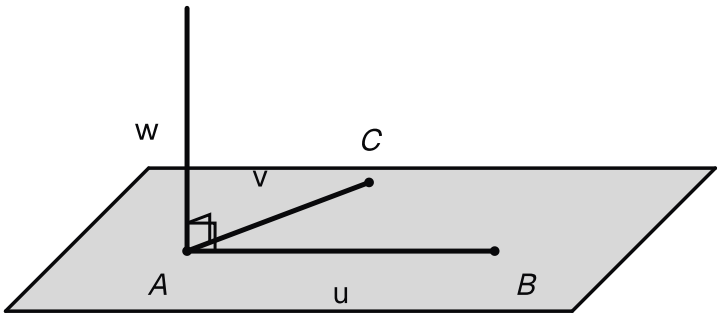
Le vecteur $\overrightarrow{EA}$ convient aussi : il y a deux sens possibles. Le produit vectoriel va choisir l'un des deux.

La définition

Un vecteur se décrit par trois données : une direction, un sens, une longueur.

Pour fabriquer un vecteur à partir de deux autres, on prend une direction orthogonale aux deux. Le sens est fixé par l'orientation : on veut une base directe. La longueur mesure l'écart entre les deux vecteurs : elle utilise le sinus de leur angle.

Lis l'énoncé avec ces trois données en tête.



Une direction orthogonale à u et à v : le vecteur w part de A perpendiculairement au plan des deux.

Définition : Produit vectoriel de deux vecteurs

L'espace est orienté. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, défini ainsi.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Sinon, soit A, B, C les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, et $\theta \in]0, \pi[$ la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$. Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur $\vec{w}$ tel que :
  1. $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;
  2. la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe ;
  3. $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\theta$.

Remarque : Existence et unicité

On admet qu'un vecteur $\vec{w}$ vérifiant les trois conditions existe, et qu'il est unique. Pour prouver qu'un vecteur donné est égal à $\vec{u} \wedge \vec{v}$, il suffit donc de vérifier les trois conditions.

Le symbole $\wedge$ se lit « vectoriel » : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$ ».

Exemple : Un premier produit vectoriel dans le cube

Montrons que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, et $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{2}$. On vérifie les trois conditions pour $\overrightarrow{AE}$.

1. $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AD}$: l'arête $[AE]$ est perpendiculaire à la face $ABCD$.

2. La base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est directe : c'est la convention du cube.

3. $\|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AD}\| \sin \frac{\pi}{2} = 1 \times 1 \times 1 = 1 = AE$.

Par unicité, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$.

Vérifie : Un autre produit dans le cube

Le vecteur $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AE}$ et à $\overrightarrow{AB}$, et de norme 1. Sachant que la base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est directe, que vaut-il ?

A. $\overrightarrow{AD}$

Juste.
C'est juste. $\overrightarrow{AD}$ vérifie les trois conditions : orthogonal aux deux, de norme 1, et la base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est directe.

B. $\overrightarrow{DA}$

Faux.
Faux. $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$: la base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA})$ change le sens du troisième vecteur, elle est indirecte.

C. $\overrightarrow{AC}$

Faux.
Faux. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$: $\overrightarrow{AC}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

D. $\vec{0}$

Faux.
Faux. Sa norme vaut $1 \times 1 \times \sin \frac{\pi}{2} = 1$: il n'est pas nul.

Indice 1
Vérifie les trois conditions de la définition pour chaque proposition.

Correction
Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires et forment un angle droit. Vérifions les trois conditions pour $\overrightarrow{AD}$:

- il est orthogonal à $\overrightarrow{AE}$ et à $\overrightarrow{AB}$;
- la base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est directe, par permutation circulaire de la base du cube ;
- sa norme vaut $1 = 1 \times 1 \times \sin \frac{\pi}{2}$.

Par unicité, $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.

La norme et le sinus

Exemple : La norme par le sinus

Dans le cube, calculons la norme de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. On a $AB = 1$ et $AC = \sqrt{2}$, diagonale d'un carré de côté 1. Le triangle ABC est rectangle isocèle en B, donc $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| &= 1 \times \sqrt{2} \times \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1. \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, de norme 1. Le personnage debout sur $[AE]$, qui regarde vers B, voit C à sa gauche.

Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$, comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$.

Attention : Produit vectoriel ou produit scalaire

✗ « $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un nombre, lié au cosinus. »

✓ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un **vecteur**, dont la norme utilise le **sinus**. C'est $\vec{u} \cdot \vec{v}$ qui est un **réel**, lié au cosinus.

Dans le cube, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ alors que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$. Deux vecteurs orthogonaux ont un produit scalaire nul ; deux vecteurs colinéaires ont un produit vectoriel nul.

À toi de calculer

À retenir

Pour deux vecteurs non colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à chacun, rend la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ directe, et a pour norme $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$.

Pour deux vecteurs colinéaires, il est nul. Dans le cube, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$.

À toi : Une norme par le sinus

Rédige : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 3$, et leur angle géométrique mesure $\dfrac{5\pi}{6}$. Calcule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$. Que vaut $\vec{u} \wedge (-2\vec{u})$? Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

L'angle mesure $\dfrac{5\pi}{6}$, qui n'est ni 0 ni π : les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Indice 2

Écris $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$ pour trouver le sinus.

Indice 3

Les vecteurs $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ sont colinéaires : relis le premier cas de la définition.

Réponse

Les vecteurs ne sont pas colinéaires. Leur angle mesure $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$, qui appartient à $]0, \pi[$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Norme du produit. Par la définition du produit vectoriel,

$$\begin{aligned}&\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \\ &= 4 \times 3 \times \sin\frac{5\pi}{6}.\end{aligned}$$

D'après la trigonométrie,

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{6} &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Donc $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 12 \times \dfrac{1}{2} = 6$.

Produit par un multiple. Les vecteurs $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ sont colinéaires, donc $\vec{u} \wedge (-2\vec{u}) = \vec{0}$ par la définition.

Conclusion. La norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ vaut 6, et $\vec{u} \wedge (-2\vec{u})$ est le vecteur nul.

Propriétés admises

Quand le produit est nul

Devine : Échanger les deux vecteurs

Tu sais que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$ dans le cube. À ton avis, que vaut $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{AE}$, car l'ordre ne compte pas.

Faux.

Faux. L'ordre compte : la base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ est indirecte.

B. $\overrightarrow{EA}$, l'opposé de $\overrightarrow{AE}$.

Juste.

C'est juste. L'orthogonalité et la norme ne changent pas ; seul le sens s'inverse. L'antisymétrie, énoncée plus bas, le confirme.

C. $\vec{0}$, car les deux produits se compensent.

Faux.

Faux. $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires : leur produit a pour norme 1.

D. $\overrightarrow{AC}$, la diagonale de la face.

Faux.

Faux. $\overrightarrow{AC}$ est dans la face $ABCD$: il n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

Indice 1

Le produit cherché est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AD}$, de norme 1 : il reste deux candidats.

Correction
Le vecteur $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AD}$, vecteurs de direction non colinéaires du plan (ABD). Il est donc colinéaire à $\overrightarrow{AE}$, vecteur normal à ce plan (chapitre précédent), et de norme 1 : c'est $\overrightarrow{AE}$ ou $\overrightarrow{EA}$.

La base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ échange les deux premiers vecteurs de la base du cube : elle est indirecte. Ce n'est donc pas $\overrightarrow{AE}$, et $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EA}$.

Quand le produit s'annule-t-il ? Si deux vecteurs non nuls se rapprochent de la colinéarité, leur angle se rapproche de 0 ou de π. Son sinus devient petit, et la norme du produit aussi.

La propriété suivante dit que le produit n'est nul que dans le cas colinéaire. Elle se lit comme un test de colinéarité.

Propriété : Produit vectoriel nul

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

En particulier, $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Il sert de test : pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on calcule leur produit vectoriel.

Exemple : Produits nuls dans le cube

Dans le cube, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$: ces deux vecteurs sont colinéaires, donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{DC} = \vec{0}$. De même, $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{AE}$, donc $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

En revanche, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$ est non nul. La propriété du produit vectoriel nul montre alors que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

Règles de calcul

Et l'ordre, et les coefficients ? Idée, pas une preuve : dans le cube, tu as vu que $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EA}$. Échanger les deux vecteurs semble inverser le sens du produit. Et doubler $\vec{u}$ semble doubler la norme du produit.

Ces règles ressemblent à celles du produit de deux réels, sauf pour l'ordre des facteurs. La propriété suivante, admise, les énonce en général.

Propriété : Antisymétrie et bilinéarité

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace et tout réel α :

1. $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$;
2. $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha\,(\vec{u} \wedge \vec{v})$;
3. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. D'après l'antisymétrie du produit vectoriel, admise, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} &= -(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \\ &= -\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Ta prédiction se confirme.

Exemple : Développer un produit vectoriel

Développons $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$ par bilinéarité :

$$\begin{aligned}&(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \wedge \vec{u} - \vec{u} \wedge \vec{v} \\ &\quad + \vec{v} \wedge \vec{u} - \vec{v} \wedge \vec{v} \\ &= \vec{0} - \vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{0} \\ &= -2\,(\vec{u} \wedge \vec{v}).\end{aligned}$$

On a utilisé $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ (produit vectoriel nul), puis $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (antisymétrie).

Avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ dans le cube, on obtient $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{AE}$.

Pièges et entraînement

Attention : L'ordre et les parenthèses comptent

✗ « $\vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. »

✓ $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$: dans le cube, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$ mais $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AE}$.

Les parenthèses comptent aussi : $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB}) \wedge \overrightarrow{AD} = \vec{0}$, alors que $\overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD}$, par antisymétrie.

À retenir

Trois règles admises, à citer par leur nom.

- **Produit nul** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- **Antisymétrie** : échanger les vecteurs change le signe.
- **Bilinéarité** : on développe et on sort les coefficients, en gardant l'ordre des facteurs.

À toi : Développer dans le cube

Rédige : dans le cube, calcule $(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \wedge (\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD})$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$, sans coordonnées. Cite chaque propriété admise que tu utilises. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Développe par bilinéarité : tu obtiens quatre produits.
Indice 2
$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AD} = \vec{0}$: il reste deux produits.
Indice 3
Remplace $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$ par $-\overrightarrow{AE}$, grâce à l'antisymétrie.

Réponse
Développement. Par bilinéarité, en gardant l'ordre des facteurs :

$$\begin{aligned}
&(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\
&\quad \wedge (\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}) \\
&= 2\,\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB} \\
&\quad - 6\,\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \\
&\quad + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} \\
&\quad - 3\,\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AD} \\
&= \vec{0} - 6\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AE} - \vec{0} \\
&= -7\overrightarrow{AE}.
\end{aligned}$$

Justification des produits. D'après la propriété du produit vectoriel nul, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AD} = \vec{0}$. Dans le cube, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$; d'après l'antisymétrie, $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AE}$.

Conclusion. Le produit vaut donc $-7\overrightarrow{AE}$.

Coordonnées dans une base orthonormée directe

Les vecteurs d'une base

Devine : Une régularité dans le cube

Dans le cube, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. À ton avis, que vaut $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE}$?

A. $\overrightarrow{AC}$

Faux.

Faux. $\overrightarrow{AC}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 1$.

B. $\vec{0}$

Faux.

Faux. $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires : le produit n'est pas nul.

C. $\overrightarrow{AB}$

Juste.

C'est juste. Les trois produits suivent l'ordre circulaire $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$; les trois conditions de la définition le confirment.

D. $\overrightarrow{BA}$

Faux.

Faux. La base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB})$ est directe, par permutation circulaire : le produit est $\overrightarrow{AB}$, pas son opposé.

Indice 1

Repère l'ordre des trois vecteurs dans les deux produits donnés.

Correction

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AD}$ et à $\overrightarrow{AE}$, de norme $1 = 1 \times 1 \times \sin\dfrac{\pi}{2}$. La base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB})$ est directe, par permutation circulaire. Par unicité, $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}$.

Vers un calcul en coordonnées. Le cube fournit une base orthonormée directe : $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$.

Dans le cube, tu as obtenu $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}$. La propriété suivante, admise, énonce cette régularité pour toute base orthonormée directe.

Propriété : Produits vectoriels des vecteurs d'une base orthonormée directe

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée **directe**. Alors

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j},$$
$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \qquad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \qquad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}.$$

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Pour le retenir, lis $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en tournant : dans l'ordre circulaire, le produit de deux vecteurs donne le troisième ; à rebours, son opposé.

Vérifie : Un premier développement

Dans une base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, quelles sont les coordonnées de $\vec{i}\wedge(\vec{j}+\vec{k})$?

A. $(0,1,1)$
Faux.
Faux. $\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$ et non $\vec{j}$: l'ordre $\vec{i},\vec{k}$ est à rebours.

B. $(0,1,-1)$
Faux.
Faux. Ce sont les coordonnées de $(\vec{j}+\vec{k})\wedge\vec{i}$, l'opposé du produit demandé.

C. $(1,1,1)$
Faux.
Faux. Ce vecteur n'est pas orthogonal à $\vec{i}$: son produit scalaire avec $\vec{i}$ vaut 1.

D. $(0,-1,1)$
Juste.
C'est juste. Par bilinéarité, $\vec{i}\wedge(\vec{j}+\vec{k})=\vec{i}\wedge\vec{j}+\vec{i}\wedge\vec{k}=\vec{k}-\vec{j}$.

Indice 1
Développe par bilinéarité, puis remplace chaque produit de vecteurs de base.

Correction
Par bilinéarité,

$$\vec{i}\wedge(\vec{j}+\vec{k})=\vec{i}\wedge\vec{j}+\vec{i}\wedge\vec{k}.$$

D'après les produits des vecteurs d'une base orthonormée directe, $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$ et $\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$.

Le produit vaut donc $-\vec{j}+\vec{k}$, de coordonnées $(0,-1,1)$.

La formule des coordonnées

Petit rappel du tronc commun. Le déterminant de deux vecteurs du plan s'écrit $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$.

La formule qui suit donne les trois coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ par trois déterminants de ce type. Teste-la sur le cube, dans le repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$: avec $\overrightarrow{AB}(1,0,0)$ et $\overrightarrow{AD}(0,1,0)$, elle doit redonner $\overrightarrow{AE}(0,0,1)$.

Théorème : Coordonnées du produit vectoriel

Dans une base orthonormée **directe** $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$. Alors

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k},$$

c'est-à-dire que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées $(yz'-zy',\ zx'-xz',\ xy'-yx')$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Il ne vaut que dans une base orthonormée **directe** : annonce-la toujours avant de calculer.

Exemple : Calculer puis contrôler

Dans un repère orthonormé direct, soit $\vec{u}(1,2,2)$ et $\vec{v}(2,1,-2)$. Les trois coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix} &= 2\times(-2)-1\times 2\\ &= -6,\\ -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix} &= -(1\times(-2)-2\times 2)\\ &= 6,\\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} &= 1\times 1-2\times 2\\ &= -3.\end{aligned}$$

Donc $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées $(-6,6,-3)$.

Contrôle par deux produits scalaires nuls :

$$\begin{aligned}\vec{w}\cdot\vec{u} &= (-6)\times 1+6\times 2\\ &\quad +(-3)\times 2=0,\\ \vec{w}\cdot\vec{v} &= (-6)\times 2+6\times 1\\ &\quad +(-3)\times(-2)=0.\end{aligned}$$

Sa norme vaut :

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\| &= \sqrt{(-6)^2+6^2+(-3)^2}\\ &= \sqrt{81}=9.\end{aligned}$$

Méthode et pièges

Méthode : Coordonnées d'un produit vectoriel

1. **Annoncer** la base orthonormée directe.
2. **Écrire** les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ en deux colonnes voisines.
3. **Calculer** trois déterminants 2×2 : cache la première ligne, puis la deuxième, puis la troisième ; le deuxième déterminant change de signe.
4. **Contrôler** : le résultat $\vec{w}$ vérifie $\vec{w}\cdot\vec{u}=0$ et $\vec{w}\cdot\vec{v}=0$.

Trouve l'erreur : Quatre résultats proposés

Dans un repère orthonormé direct, $\vec{u}(1,0,2)$ et $\vec{v}(3,1,-1)$. Quatre élèves proposent les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$. Lequel a raison ?

A. $(-2,7,1)$

Juste.

C'est juste. Les trois déterminants donnent -2, 7 et 1, et le contrôle $(-2)\times 1+7\times 0+1\times 2=0$ passe.

B. $(-2,-7,1)$

Faux.

Faux. Le signe moins du deuxième déterminant est oublié. Le contrôle avec $\vec{v}$ le révèle : $(-2)\times 3+(-7)\times 1+1\times(-1)=-14$.

C. $(2,-7,-1)$

Faux.

Faux. C'est $\vec{v}\wedge\vec{u}$, l'opposé : les deux colonnes sont écrites dans le mauvais ordre.

D. $(3,0,-2)$

Faux.

Faux. Multiplier les coordonnées une à une ne donne pas le produit vectoriel ; ce vecteur n'est même pas orthogonal à $\vec{u}$.

Indice 1

Calcule toi-même les trois déterminants, sans oublier le signe du deuxième.

Indice 2

Contrôle chaque proposition par un produit scalaire avec $\vec{u}$ et avec $\vec{v}$.

Correction

Dans le repère orthonormé direct, les trois coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont :

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\\ &=0\times(-1)-1\times 2\\ &=-2,\\ &-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\\ &=-(1\times(-1)-3\times 2)\\ &=7,\\ &\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ &=1\times 1-3\times 0\\ &=1.\end{aligned}$$

Contrôle : $(-2)\times 1+7\times 0+1\times 2=0$ et $(-2)\times 3+7\times 1+1\times(-1)=0$.

Le bon résultat est $(-2,7,1)$.

Attention : Une base orthonormée directe, sinon rien

✗ Appliquer la formule des coordonnées dans n'importe quelle base.

✓ La formule ne vaut que dans une base orthonormée **directe**.

Dans la base orthonormée indirecte $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$, $\vec{j}$ a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et $\vec{i}$ a pour coordonnées $(0, 1, 0)$. La formule donnerait pour $\vec{j} \wedge \vec{i}$ les coordonnées $(0, 0, 1)$, c'est-à-dire $\vec{k}$. Or $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$.

À toi de calculer

Attention : Le signe du milieu

✗ La deuxième coordonnée vaut $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}$.

✓ La deuxième coordonnée vaut $-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = zx' - xz'$.

Contrôle toujours ton résultat : il doit être orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Si un contrôle échoue, vérifie d'abord ce signe.

À toi : Un vecteur orthogonal à deux vecteurs

Rédige : dans un repère orthonormé direct, soit $\vec{u}(2, -1, 1)$ et $\vec{v}(1, 1, -1)$. Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et contrôle ton résultat. Donne ensuite un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, de coordonnées les plus simples possible, et la norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Annonce la base orthonormée directe, puis écris les deux colonnes $(2, -1, 1)$ et $(1, 1, -1)$.
Indice 2
Le premier déterminant vaut $(-1) \times (-1) - 1 \times 1$.
Indice 3
Un vecteur colinéaire non nul est encore orthogonal aux deux. Pour la norme, simplifie la racine.

Réponse
Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, les coordonnées de $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ sont :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1) \times (-1) - 1 \times 1$$
$$= 0,$$
$$-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -(2 \times (-1) - 1 \times 1)$$
$$= 3,$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times 1 - 1 \times (-1)$$
$$= 3.$$

Donc $\vec{w}(0, 3, 3)$.

Contrôle. $0 \times 2 + 3 \times (-1) + 3 \times 1 = 0$ et $0 \times 1 + 3 \times 1 + 3 \times (-1) = 0$.

Vecteur orthogonal simple. Le vecteur $(0, 1, 1)$, égal à $\frac{1}{3}\vec{w}$, est non nul et orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Norme.

$$\begin{aligned} \|\vec{w}\| &= \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le produit $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(0, 3, 3)$, le vecteur $(0, 1, 1)$ convient, et la norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ vaut $3\sqrt{2}$.

Aire d'un triangle ; points alignés

L'aire d'un triangle

Devine : Un triangle dans une face du cube

Dans le cube, le triangle ABD est la moitié du carré $ABCD$ de côté 1. Tu sais que $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = AE = 1$. À ton avis, quelle formule donne l'aire du triangle ABD ?

A. $2\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$

Faux.

Faux. Ce nombre vaut 2, le double de l'aire du carré.

B. $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$

Juste.

C'est juste. Elle vaut $\frac{1}{2}$, l'aire du triangle ; la norme entière vaut 1, l'aire du carré.

C. $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$

Faux.

Faux. Cette norme vaut 1 : c'est l'aire du carré $ABCD$, pas celle du triangle.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

Faux.

Faux. Ce produit scalaire vaut 0, alors que le triangle a une aire non nulle.

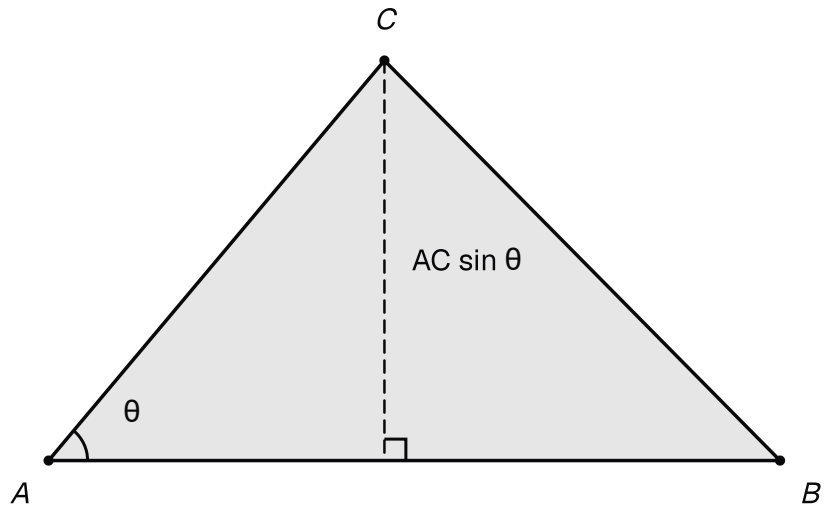
Indice 1

Le triangle ABD est rectangle en A : calcule son aire directement.

Correction

Le triangle ABD est rectangle en A : son aire vaut $\frac{1}{2} \times AB \times AD = \frac{1}{2}$. Or $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = 1$. L'aire du triangle est donc la moitié de cette norme. L'énoncé qui suit le démontre pour tout triangle.

L'idée, avant l'énoncé. Pourquoi est-ce vrai ? L'aire d'un triangle vaut la base fois la hauteur, divisée par 2. Prends $[AB]$ pour base. La hauteur issue de C se calcule avec le sinus de l'angle en A : elle vaut $AC \sin\theta$. Or la norme du produit vectoriel vaut justement $AB \times AC \times \sin\theta$.



Base [AB] et hauteur issue de C : cette hauteur vaut AC sin θ, où θ est l'angle en A.

Propriété : Aire d'un triangle et d'un parallélogramme

Soit A, B, C trois points **non alignés**, et D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. L'aire du triangle ABC et celle du parallélogramme $ABDC$ valent

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}_{ABDC} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$$

Démonstration

Étape 1. Les points A, B, C ne sont pas alignés, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Soit $\theta \in]0, \pi[$ la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Par la définition du produit vectoriel, $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \times AC \times \sin\theta$.

Étape 2. Dans le plan (ABC), soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, alors $H = A$ et $CH = AC = AC\sin\theta$. Sinon, dans le triangle AHC rectangle en H, $CH = AC\sin\widehat{HAC}$; or $\widehat{HAC}$ mesure θ si $H \in [AB)$, et $\pi - \theta$ si H est sur la demi-droite opposée. Comme $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ (trigonométrie), $CH = AC\sin\theta$ dans tous les cas.

Étape 3. L'aire du triangle est $\dfrac{1}{2}AB \times CH = \dfrac{1}{2}AB \times AC\sin\theta = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$. Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $ABDC$ est un parallélogramme non aplati ; sa diagonale $[BC]$ le partage en deux triangles isométriques, ABC et DCB (géométrie plane) : son aire est le double.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La norme du produit vectoriel contient déjà la hauteur : $AC\sin\theta$ est la hauteur issue de C. Base fois hauteur donne le parallélogramme ; la moitié donne le triangle. L'égalité $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ règle le cas d'un angle obtus.

Vérifie : Le cas d'un angle obtus

À l'étape 2 de la preuve, l'angle en A du triangle AHC peut mesurer $\pi - \theta$. Pourquoi a-t-on encore $CH = AC\sin\theta$?

A. Car l'angle θ est toujours aigu.

Faux.

Faux. θ peut être obtus : c'est justement le cas traité ici.

B. Car le produit vectoriel ne dépend pas de l'angle.

Faux.

Faux. Sa norme dépend de l'angle, par $\sin\theta$.

C. Car $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$.

Juste.

C'est juste. Dans le triangle AHC rectangle en H, $CH = AC\sin(\pi - \theta)$, qui vaut $AC\sin\theta$.

D. Car $\cos(\pi - \theta) = \cos\theta$.

Faux.

Faux. Cette égalité est fausse : $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$. Et la hauteur s'exprime avec un sinus.

Indice 1

Relis la valeur du sinus d'un angle et de son supplémentaire (trigonométrie).

Correction

> Si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus, H est sur la droite (AB), du côté opposé à B par rapport à A. L'angle en A du triangle AHC mesure alors $\pi - \theta$. Dans ce triangle rectangle en H, $CH = AC\sin(\pi - \theta)$. Comme $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ (trigonométrie), $CH = AC\sin\theta$.

Calculer une aire

Méthode : Aire d'un triangle

1. **Annoncer** un repère orthonormé direct et calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
2. **Calculer** $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; s'il est nul, les points sont alignés et il n'y a pas de triangle.
3. **Calculer** la norme de ce produit : racine de la somme des carrés.
4. **Diviser** par 2 pour le triangle ; garder la norme entière pour le parallélogramme.

Exemple : Aire d'un triangle de l'espace

Dans un repère orthonormé direct, soit $A(1,-1,0)$, $B(3,2,2)$ et $C(3,-1,1)$. On a $\overrightarrow{AB}(2,3,2)$ et $\overrightarrow{AC}(2,0,1)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} &= 3 \times 1 - 0 \times 2 = 3, \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} &= -(2 \times 1 - 2 \times 2) = 2, \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} &= 2 \times 0 - 2 \times 3 = -6. \end{aligned}$$

Contrôle : $3 \times 2 + 2 \times 3 + (-6) \times 2 = 0$ et $3 \times 2 + 2 \times 0 + (-6) \times 1 = 0$.

Le produit $(3, 2, -6)$ n'est pas nul, donc A, B, C ne sont pas alignés. D'après l'aire d'un triangle :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{49} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Attention : La moitié, et la racine

✗ $\mathcal{A}_{ABC} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$, ou $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left(3^2 + 2^2 + (-6)^2\right)$.

✓ $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = \frac{7}{2}$.

La norme entière est l'aire du **parallélogramme** construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$; le triangle en est la moitié. Et une norme se calcule avec une racine carrée.

Trois points alignés

L'idée, avant l'énoncé. Pourquoi est-ce vrai ? Trois points sont alignés quand $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (chapitre sur les vecteurs de l'espace). Or la propriété du produit vectoriel nul transforme la colinéarité en un calcul. Un triangle aplati a une aire nulle : tout concorde.

Propriété : Trois points alignés

Trois points A, B, C de l'espace sont alignés si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Démonstration

Étape 1. Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (chapitre sur les vecteurs de l'espace).

Étape 2. D'après la propriété du produit vectoriel nul, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Les deux équivalences donnent le résultat.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux équivalences mises bout à bout : alignement et colinéarité, puis colinéarité et produit vectoriel nul. La preuve ne fait aucun calcul : elle enchaîne deux résultats déjà connus.

Exemple : Un paramètre qui aligne trois points

Dans un repère orthonormé direct, soit $A(1, 2, -1)$, $B(3, 1, 0)$ et $C(m, 4, -3)$, avec m réel. On a $\overrightarrow{AB}(2, -1, 1)$ et $\overrightarrow{AC}(m-1, 2, -2)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont :

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times (-2) - 2 \times 1 \\
&= 0, \\
&-\begin{vmatrix} 2 & m-1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -(2 \times (-2) - (m-1) \times 1) \\
&= m + 3, \\
&\begin{vmatrix} 2 & m-1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times 2 - (m-1) \times (-1) \\
&= m + 3.
\end{aligned}$$

D'après la caractérisation de trois points alignés, A, B, C sont alignés si et seulement si ce produit est nul, c'est-à-dire si et seulement si $m + 3 = 0$, soit $m = -3$.

À toi, puis le devoir

À toi : Trois points de l'espace

Rédige : dans un repère orthonormé direct, soit $A(0,1,-1)$, $B(2,0,1)$ et $C(-2,3,-1)$. Montre que A, B, C ne sont pas alignés, puis calcule l'aire du triangle ABC. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule d'abord les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
Indice 2
Calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ par trois déterminants et cite la caractérisation de trois points alignés.
Indice 3
N'oublie ni la racine carrée, ni la division par 2.

Réponse
Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, $\overrightarrow{AB}(2,-1,2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,2,0)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont :

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times 0 - 2 \times 2 \\
&= -4, \\
&-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(2 \times 0 - (-2) \times 2) \\
&= -4, \\
&\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times 2 - (-2) \times (-1) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Les points ne sont pas alignés. Le produit $(-4,-4,2)$ est non nul : la caractérisation de trois points alignés montre que A, B, C ne sont pas alignés.

Aire. On a $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36}$. D'après l'aire d'un triangle :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{ABC} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{36} = \frac{6}{2} = 3.
\end{aligned}$$

Conclusion. Les points A, B, C ne sont pas alignés, et l'aire du triangle ABC vaut 3.

Remarque : Coin devoir : « Montrer que les points ne sont pas alignés »

En devoir surveillé, cette question appelle une rédaction courte et complète. Avec $A(1,2,0)$, $B(3,3,2)$ et $C(3,4,0)$, dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

« On a $\overrightarrow{AB}(2,1,2)$ et $\overrightarrow{AC}(2,2,0)$, donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{j} \\ &\quad + \begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k} \\ &= -4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}.\end{aligned}$$

Ce vecteur est non nul. La caractérisation de trois points alignés prouve donc que A, B, C ne sont pas alignés. »

Chaque élément compte : le repère annoncé, le calcul écrit, le résultat non nul, la propriété nommée.

Vecteur normal et équation du plan (ABC)

Rappel : vecteur normal

Petit rappel du chapitre précédent. Un vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) s'il est non nul et orthogonal à deux vecteurs de direction non colinéaires, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Si $\vec{n}$ a pour coordonnées (a, b, c) dans un repère orthonormé, le plan a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Devine : Un plan qui coupe le cube

Dans le cube, considère le plan (BDE), qui passe par les extrémités des trois arêtes issues de A. Dans le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$ et $G(1,1,1)$. À ton avis, lequel de ces vecteurs lui est normal ?

A. $\overrightarrow{AE}$

Faux.

Faux. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = 1$: $\overrightarrow{AE}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{BE}$.

B. $\overrightarrow{AC}$

Faux.

Faux. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = -1$, qui n'est pas nul.

C. $\overrightarrow{BD}$

Faux.

Faux. $\overrightarrow{BD}$ joint deux points du plan : c'est un vecteur de direction, pas un vecteur normal.

D. $\overrightarrow{AG}$

Juste.

C'est juste. Dans ce repère orthonormé direct, $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $(1,1,1)$, celles de $\overrightarrow{AG}$.

Indice 1

Pour chaque vecteur $\vec{n}$ proposé, teste $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BE}$.

Correction

Dans le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a $\overrightarrow{BD}(-1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{BE}(-1, 0, 1)$. Leur produit vectoriel a pour coordonnées $1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$, $-((-1) \times 1 - (-1) \times 0) = 1$ et $(-1) \times 0 - (-1) \times 1 = 1$.

C'est $\overrightarrow{AG}(1, 1, 1)$. L'énoncé qui suit garantit qu'il est normal au plan (BDE).

Un vecteur normal en un calcul

L'idée, avant l'énoncé. Pourquoi est-ce vrai ? Par définition, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$. Il reste à savoir qu'il n'est pas nul : c'est le cas quand les points ne sont pas alignés. Plus de système à résoudre : un seul calcul suffit.

Propriété : Vecteur normal au plan (ABC)

Soit A, B, C trois points **non alignés**. Le vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Démonstration

Étape 1. Les points A, B, C ne sont pas alignés, donc $\vec{n} \neq \vec{0}$, d'après la caractérisation de trois points alignés.

Étape 2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; par la définition du produit vectoriel, $\vec{n}$ est orthogonal à chacun d'eux : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (chapitre précédent).

Étape 3. Le plan (ABC) est le plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires. Un vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs de direction non colinéaires d'un plan est normal à ce plan (chapitre précédent) : $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un vecteur normal est un vecteur non nul, orthogonal à deux vecteurs de direction non colinéaires. Le produit vectoriel fournit l'orthogonalité par sa définition, et la non-nullité par la caractérisation de l'alignement. La preuve vérifie ces deux points, l'un après l'autre.

Vérifie : Pourquoi le vecteur n'est pas nul

À l'étape 1 de la preuve, quel argument montre que $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ n'est pas nul ?

A. Les points A, B, C ne sont pas alignés.

Juste.
C'est juste. D'après la caractérisation de trois points alignés, le produit n'est nul que si les points sont alignés.

B. Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

Faux.

Faux. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur : l'orthogonalité ne prouve pas que $\vec{n}$ est non nul.

C. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même norme.

Faux.

Faux. Rien n'impose cette égalité, et elle ne dit rien de la colinéarité.

D. Le plan (ABC) admet une équation cartésienne.

Faux.

Faux. Ce fait ne dit rien du vecteur $\vec{n}$: il faut relier $\vec{n}$ à la position des trois points.

Indice 1

Quand un produit vectoriel est-il nul ?

Correction

Les points A, B, C ne sont pas alignés, par hypothèse. D'après la caractérisation de trois points alignés, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ seulement pour trois points alignés. Donc $\vec{n} \neq \vec{0}$.

L'équation du plan

Méthode : Équation du plan (ABC)

1. **Calculer** $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ dans un repère orthonormé direct, et vérifier $\vec{n} \neq \vec{0}$: les points ne sont pas alignés.
2. **Écrire** $ax + by + cz + d = 0$, avec (a, b, c) les coordonnées de $\vec{n}$ ou d'un vecteur colinéaire plus simple.
3. **Trouver** d en remplaçant x, y, z par les coordonnées de A.
4. **Contrôler** avec B et C.

Exemple : Équation d'un plan par trois points

Dans un repère orthonormé direct, soit $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 0)$ et $C(0, 2, 1)$. On a $\overrightarrow{AB}(1, 1, -2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 2, -1)$. Les coordonnées de $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont :

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times (-1) - 2 \times (-2) \\
&= 3, \\
&-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -(1 \times (-1) - (-1) \times (-2)) \\
&= 3, \\
&\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 2 - (-1) \times 1 \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

Donc $\vec{n}$ a pour coordonnées $(3, 3, 3)$. Il n'est pas nul, donc A, B, C ne sont pas alignés, et $\vec{n}$ est normal au plan (ABC). On prend le vecteur colinéaire $(1, 1, 1)$.

Une équation est $x + y + z + d = 0$. Avec A : $1 + 0 + 2 + d = 0$, donc $d = -3$. D'où l'équation

$$x + y + z - 3 = 0.$$

Contrôle avec B et C : $2 + 1 + 0 - 3 = 0$ et $0 + 2 + 1 - 3 = 0$.

Remarque : Simplifier le vecteur normal

Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal est encore normal au plan. Diviser $(3, 3, 3)$ par 3 ne change donc pas le plan : cela allège seulement les calculs. Avec $\vec{n}$ lui-même, on aurait trouvé $3x + 3y + 3z - 9 = 0$, une équation du même plan.

Comparer, puis à toi

Exemple : Comparer avec un plan donné

Soit P le plan d'équation $2x + 2y + 2z + 5 = 0$. Son vecteur normal $(2, 2, 2)$ est colinéaire à $(1, 1, 1)$: d'après le chapitre précédent, P et (ABC) sont parallèles.

Le point A donne $2 \times 1 + 2 \times 0 + 2 \times 2 + 5 = 11 \neq 0$: A n'est pas dans P. Les deux plans sont donc strictement parallèles.

À toi : Un plan par trois points

Rédige : dans un repère orthonormé direct, soit $A(0, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$ et $C(1, 2, 0)$. Montre que ces points définissent un plan, puis donne une équation cartésienne du plan (ABC). Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis leur produit vectoriel.

Indice 2

Un produit non nul prouve que les points ne sont pas alignés ; ses coordonnées donnent a, b, c.

Indice 3

Trouve d avec A, puis contrôle avec B et C.

Réponse

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, $\overrightarrow{AB}(2,-1,0)$ et $\overrightarrow{AC}(1,1,-1)$. Les coordonnées de $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ sont :

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\\ &=(-1)\times(-1)-1\times 0\\ &=1,\\ &-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\\ &=-(2\times(-1)-1\times 0)\\ &=2,\\ &\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ &=2\times 1-1\times(-1)\\ &=3.\end{aligned}$$

Les points définissent un plan. Le vecteur $\vec{n}(1,2,3)$ est non nul : par la caractérisation de trois points alignés, A, B, C ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

Équation. D'après le vecteur normal au plan (ABC), une équation est $x+2y+3z+d=0$. Avec A : $0+2\times 1+3\times 1+d=0$, donc $d=-5$.

Contrôle. Avec B et C : $2+2\times 0+3\times 1-5=0$ et $1+2\times 2+3\times 0-5=0$.

Conclusion. Les points A, B, C définissent un plan, et une équation cartésienne de (ABC) est $x+2y+3z-5=0$.

Distance d'un point à une droite

Le point le plus proche

Un câble est tendu en ligne droite dans un hangar, et une lampe pend du plafond. Quelle est la plus courte distance de la lampe au câble ?

Parmi tous les points du câble, l'un est le plus proche : c'est le pied de la perpendiculaire menée depuis la lampe. Cette distance va se calculer par un produit vectoriel.

Devine : Un sommet et une arête

Dans le cube d'arête 1, à ton avis, quelle est la distance du sommet G à la droite (AB) ?

A. 0

Faux.

Faux. G n'est pas sur la droite (AB) : sa distance à cette droite n'est pas nulle.

B. $\sqrt{2}$

Juste.

C'est juste. Le point de (AB) le plus proche de G est B, et $[BG]$ est une diagonale de la face $BCGF$: $BG = \sqrt{2}$.

C. 1

Faux.

Faux. La longueur $GC = 1$ est la distance de G à la face $ABCD$, pas à la droite (AB).

D. $\sqrt{3}$

Faux.

Faux. $AG = \sqrt{3}$ est la distance de G à A ; mais A n'est pas le point de (AB) le plus proche de G.

Indice 1

Cherche le point de (AB) tel que la droite qui le joint à G soit perpendiculaire à (AB).

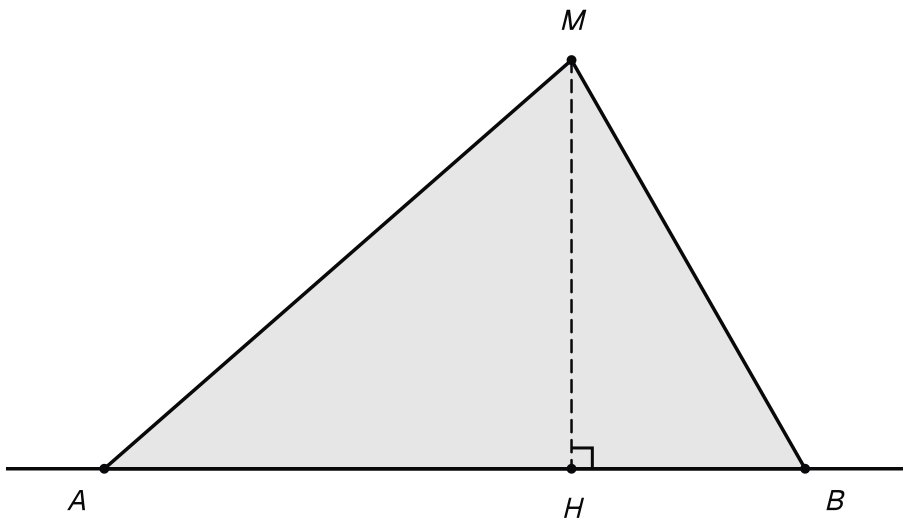
Correction

Le point B est sur (AB), et $\overrightarrow{BG}(0, 1, 1)$ vérifie $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ dans le repère orthonormé direct du cube. Donc B est le projeté orthogonal de G sur (AB). La distance vaut $BG = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

La formule de la distance

Petit rappel de géométrie plane. Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite est le point de la droite tel que (MH) lui est perpendiculaire. Dans un triangle ABM, avec H sur (AB), la longueur MH est la hauteur issue de M. L'aire du triangle vaut alors $\dfrac{1}{2} AB \times MH$.

L'idée, avant l'énoncé. Pourquoi est-ce vrai ? L'aire du triangle ABM se calcule de deux façons : par la base AB et la hauteur MH, ou par la norme d'un produit vectoriel. En égalant les deux, la hauteur MH apparaît.



Le triangle ABM et sa hauteur [MH] : H est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

Théorème : Distance d'un point à une droite

Soit $D = D(A, \vec{u})$ une droite, avec $\vec{u} \neq \vec{0}$, et M un point de l'espace. Soit H le projeté orthogonal de M sur D : la **distance** de M à D, notée $d(M, D)$, est la longueur MH. Alors

$$d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Démonstration

Étape 1. Si $M \in D$, alors $H = M$ et $d(M, D) = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$, donc $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ (produit vectoriel nul) : la formule est vraie.

Étape 2. Si $M \notin D$, soit B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, $D = (AB)$. Les points A, B, M ne sont pas alignés, et MH est la hauteur issue de M du triangle ABM : son aire vaut $\frac{1}{2} AB \times MH$ (géométrie plane, dans le plan (ABM)).

Étape 3. D'après l'aire d'un triangle, cette aire vaut aussi $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\|$. Par antisymétrie, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = -(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u})$, de même norme. Comme $AB = \|\vec{u}\| \neq 0$, on obtient $MH = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une distance à une droite est une hauteur de triangle. On écrit l'aire de deux façons, puis on isole la hauteur. L'antisymétrie sert seulement à remplacer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}$ par un vecteur de même norme.

Vérifie : Une égalité de normes

À l'étape 3 de la preuve, pourquoi $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|$?

A. Car $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Faux.

Faux. Rien n'impose cette orthogonalité : M est un point quelconque hors de la droite.

B. Car l'aire d'un triangle est toujours positive.

Faux.

Faux. Cette remarque ne relie pas les deux produits : il faut une propriété du produit vectoriel.

C. Car $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, et l'antisymétrie donne deux vecteurs opposés.

Juste.

C'est juste. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = -(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u})$, et deux vecteurs opposés ont la même norme.

D. Car le produit vectoriel est commutatif.

Faux.

Faux. Il ne l'est pas : échanger les deux vecteurs change le sens du résultat.

Indice 1

Relis la définition du point B à l'étape 2.

Correction

Le point B est défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}$. Par antisymétrie, $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = -(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u})$. Deux vecteurs opposés ont la même norme, d'où l'égalité.

Calculer une distance

Méthode : Distance d'un point à une droite

1. **Lire** un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite, par exemple sur une représentation paramétrique.
2. **Calculer** $\overrightarrow{AM}$, puis $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$ dans un repère orthonormé direct.
3. **Calculer** les deux normes, chacune par la racine d'une somme de carrés.
4. **Diviser** la norme du produit par $\|\vec{u}\|$, puis simplifier.

Exemple : Distance à une droite donnée par une représentation paramétrique

Dans un repère orthonormé direct, soit $M(5, -2, 1)$ et la droite D de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 2t \end{cases}$$

Elle passe par $A(1,-1,0)$ et elle est dirigée par $\vec{u}(2,1,2)$. On a $\overrightarrow{AM}(4,-1,1)$, et les coordonnées de $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}$ sont :

$$\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = (-1)\times 2 - 1\times 1 = -3,$$
$$-\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -(4\times 2 - 2\times 1) = -6,$$
$$\begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 4\times 1 - 2\times(-1) = 6.$$

Contrôle : $(-3)\times 4 + (-6)\times(-1) + 6\times 1 = 0$ et $(-3)\times 2 + (-6)\times 1 + 6\times 2 = 0$.

D'après la distance d'un point à une droite :

$$d(M,D) = \frac{\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Attention : Droite ou plan : deux formules

✗ Pour la distance de M à une droite, appliquer $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

✓ Cette formule donne la distance d'un point à un **plan** d'équation $ax+by+cz+d=0$ (chapitre précédent).

Une **droite** de l'espace n'a pas d'équation de ce type : sa distance à M vaut $\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

À toi, puis le devoir

À toi : Distance d'un point à une droite

Rédige : dans un repère orthonormé direct, soit $M(-1,4,1)$ et la droite D passant par $A(0,1,2)$, de vecteur directeur $\vec{u}(1,-2,2)$. Calcule $d(M,D)$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$.
Indice 2
Calcule $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}$ par trois déterminants, puis contrôle-le.
Indice 3
Simplifie la racine du numérateur avant de diviser par $\|\vec{u}\|$.

Réponse

Produit vectoriel. Dans le repère orthonormé direct, $\overrightarrow{AM}(-1,3,-1)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}$ sont :

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}3&-2\\-1&2\end{vmatrix}\\&=3\times 2-(-2)\times(-1)\\&=4,\\&-\begin{vmatrix}-1&1\\-1&2\end{vmatrix}\\&=-((-1)\times 2\\&\quad-1\times(-1))\\&=1,\\&\begin{vmatrix}-1&1\\3&-2\end{vmatrix}\\&=(-1)\times(-2)-1\times 3\\&=-1.\end{aligned}$$

Contrôle. $4\times(-1)+1\times 3+(-1)\times(-1)=0$ et $4\times 1+1\times(-2)+(-1)\times 2=0$.

Distance. D'après la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned}&d(M,D)\\&=\frac{\sqrt{4^2+1^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\\&=\frac{\sqrt{18}}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. La distance du point M à la droite D vaut $\sqrt{2}$.

Remarque : Coin devoir : « Calculer la distance du point M à la droite D »

En devoir surveillé, cette question attend la formule nommée, puis un calcul complet. Avec la droite D passant par $A(1,0,-1)$, de vecteur directeur $\vec{u}(2,2,1)$, et le point $M(6,4,-1)$:

« Dans le repère orthonormé direct, $\overrightarrow{AM}(5,4,0)$, et $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}$ a pour coordonnées $(4,-5,2)$. D'après la distance d'un point à une droite,

$$\begin{aligned}d(M,D)&=\frac{\sqrt{4^2+(-5)^2+2^2}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}\\&=\frac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}.\end{aligned}$$

La distance cherchée vaut $\sqrt{5}$. »

Le correcteur cherche le repère annoncé, le produit vectoriel, la formule nommée et la racine simplifiée.

Droite d'intersection de deux plans

Deux plans qui se coupent

Petit rappel. Deux plans de l'espace sont parallèles ou sécants (géométrie analytique de l'espace). Ils sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires (chapitre précédent). Sinon, ils se coupent suivant une droite. Il reste à trouver un vecteur directeur de cette droite.

Devine : Deux faces du cube

Dans le cube, le plan de la face $ABCD$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{AE}$, et celui de la face $ABFE$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{AD}$. À ton avis, suivant quelle droite ces deux plans se coupent-ils ?

A. (AE)

Faux.

Faux. E n'est pas dans la face $ABCD$: (AE) n'est pas contenue dans les deux plans.

B. (AD)

Faux.

Faux. D n'est pas dans la face $ABFE$: (AD) n'est pas contenue dans les deux plans.

C. (AC)

Faux.

Faux. C n'est pas dans la face $ABFE$: (AC) n'est pas contenue dans les deux plans.

D. (AB)

Juste.

C'est juste. A et B sont dans les deux faces. Et $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}$ dirige bien (AB).

Indice 1

Cherche deux sommets communs aux deux faces.

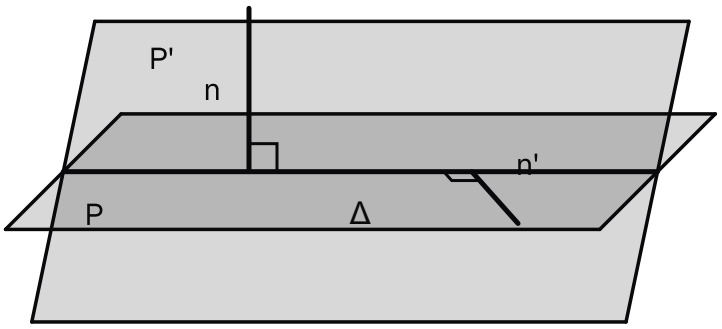
Correction

Les vecteurs normaux $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires : les deux plans sont sécants. Ils contiennent A et B, donc ils se coupent suivant (AB).

Remarque que $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}$, par antisymétrie, puisque $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}$. Le produit vectoriel des deux vecteurs normaux dirige la droite d'intersection.

Un vecteur directeur en un calcul

L'idée, avant l'énoncé. Pourquoi est-ce vrai ? Un vecteur directeur de la droite d'intersection est un vecteur de direction des deux plans. Il est donc orthogonal à $\vec{n}$ et à $\vec{n}'$. Or le produit vectoriel $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est justement orthogonal aux deux.



La droite Δ, commune aux plans P et P', est orthogonale à leurs vecteurs normaux n et n'.

Propriété : Droite d'intersection de deux plans

Soit P et P' deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, **non colinéaires**. Alors P et P' sont sécants suivant une droite Δ, et $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est un vecteur directeur de Δ.

Démonstration

Étape 1. Les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires, donc P et P' ne sont pas parallèles (plans parallèles et vecteurs normaux, chapitre précédent) : ils sont sécants suivant une droite Δ (géométrie analytique de l'espace). Soit A un point de Δ.

Étape 2. Le vecteur $\vec{w} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$ est non nul (produit vectoriel nul) et orthogonal à $\vec{n}$ (définition). Dans un repère orthonormé où P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, $\vec{n} = \lambda(a, b, c)$ avec $\lambda \neq 0$ (chapitre précédent) ; l'expression analytique donne $\lambda(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0$ pour $\vec{w}(\alpha, \beta, \gamma)$, donc $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ car $\lambda \neq 0$: c'est un vecteur de direction de P (géométrie analytique de l'espace). De même pour P'.

Étape 3. La droite $D(A, \vec{w})$ est donc contenue dans P et dans P' (chapitre sur les vecteurs de l'espace), donc dans Δ. Deux droites dont l'une contient l'autre sont égales : $\Delta = D(A, \vec{w})$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un vecteur orthogonal au vecteur normal d'un plan est un vecteur de direction de ce plan. Le produit $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est orthogonal aux deux vecteurs normaux.

La droite qu'il dirige et qui passe par un point commun aux deux plans est donc contenue dans chacun d'eux : c'est leur droite d'intersection. La non-colinéarité des vecteurs normaux garantit qu'il n'est pas nul.

Vérifie : Pourquoi deux plans se coupent

À l'étape 1 de la preuve, pourquoi les plans P et P' sont-ils sécants ?

A. Leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

Juste.
C'est juste. Deux plans parallèles ont des vecteurs normaux colinéaires ; ce n'est pas le cas ici, donc les plans se coupent.

B. Leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Faux.
Faux. L'énoncé ne suppose pas cette orthogonalité : il suppose seulement que les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

C. Ils passent tous les deux par l'origine du repère.

Faux.
Faux. Rien ne l'indique dans l'énoncé, et deux plans passant par un même point peuvent être confondus.

D. Le produit $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est nul.

Faux.
Faux. Ce produit n'est pas nul, justement parce que $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires.

Indice 1
Relis le lien entre plans parallèles et vecteurs normaux (chapitre précédent).

Correction
D'après le chapitre précédent, deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires. Ici, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne le sont pas : P et P' ne sont pas parallèles. Deux plans non parallèles sont sécants suivant une droite.

Représenter l'intersection

Méthode : Droite d'intersection de deux plans

1. **Lire** $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sur les équations, dans un repère orthonormé, et vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
2. **Calculer** $\vec{w} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$ dans un repère orthonormé direct : c'est un vecteur directeur de la droite.

3. **Trouver** un point commun : fixer à 0 une coordonnée dont la composante dans $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ n'est pas nulle, puis résoudre le système de deux équations. Par exemple, $z = 0$ convient si la troisième coordonnée de $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ n'est pas nulle.
4. **Écrire** une représentation paramétrique, puis contrôler un deuxième point dans les deux équations.

Exemple : Représentation paramétrique d'une intersection

Dans un repère orthonormé direct, soit $P : x + y - z - 1 = 0$ et $P' : 2x - y + z - 2 = 0$. Les vecteurs normaux $\vec{n}(1, 1, -1)$ et $\vec{n}'(2, -1, 1)$ ne sont pas colinéaires : $\vec{n}' = k\vec{n}$ imposerait $k = 2$ et $k = -1$.

Les coordonnées de $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ sont :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \times 1 - (-1) \times (-1) \\ &= 0, \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} &= -(1 \times 1 - 2 \times (-1)) \\ &= -3, \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} &= 1 \times (-1) - 2 \times 1 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Donc $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ a pour coordonnées $(0, -3, -3)$; le vecteur $\vec{w}(0, 1, 1)$ lui est colinéaire et dirige la droite d'intersection Δ.

Avec $z = 0$: $x + y = 1$ et $2x - y = 2$. En additionnant, $3x = 3$, donc $x = 1$ et $y = 0$. La droite Δ passe par $A(1, 0, 0)$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemple : Contre-exemple : des vecteurs normaux colinéaires

Soit $P_1 : x - 2y + z + 1 = 0$ et $P_2 : -2x + 4y - 2z + 3 = 0$. Leurs vecteurs normaux sont colinéaires, car $(-2, 4, -2) = -2(1, -2, 1)$. Leur produit vectoriel est donc nul (produit vectoriel nul) : il ne dirige aucune droite.

Les plans sont parallèles. Le point $(-1, 0, 0)$ de P_1 donne $-2 \times (-1) + 4 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 5 \neq 0$ dans l'équation de P_2 : ils n'ont aucun point commun.

L'hypothèse « non colinéaires » est indispensable.

Contrôler, puis à toi

Remarque : Contrôler par un second point

Un point de la droite trouvée doit vérifier les deux équations. Pour $t = 1$, le point $(1, 1, 1)$ donne $1 + 1 - 1 - 1 = 0$ dans P et $2 \times 1 - 1 + 1 - 2 = 0$ dans P'. Le contrôle passe : la représentation paramétrique est confirmée par deux points distincts.

À toi : Intersection de deux plans

Rédige : dans un repère orthonormé direct, soit $P : x + 2y + z - 4 = 0$ et $P' : x - y + 2z - 1 = 0$. Montre que P et P' sont sécants, puis donne une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Lis $\vec{n}(1, 2, 1)$ et $\vec{n}'(1, -1, 2)$, et vérifie qu'ils ne sont pas colinéaires.
Indice 2
Calcule $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ par trois déterminants.
Indice 3
Avec $z = 0$, résous $x + 2y = 4$ et $x - y = 1$; contrôle ensuite le point de paramètre $t = 1$.

Réponse
Les plans sont sécants. Les vecteurs normaux $\vec{n}(1, 2, 1)$ et $\vec{n}'(1, -1, 2)$ ne sont pas colinéaires : $\vec{n}' = k\vec{n}$ imposerait $k = 1$ et $k = -\dfrac{1}{2}$. D'après la droite d'intersection de deux plans, P et P' sont sécants suivant une droite Δ dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{n}'$.

Vecteur directeur. Dans le repère orthonormé direct, les coordonnées de $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ sont :

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times 2 - (-1) \times 1 \\
&= 5, \\
&-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -(1 \times 2 - 1 \times 1) \\
&= -1, \\
&\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times (-1) - 1 \times 2 \\
&= -3.
\end{aligned}$$

Un point commun. Avec $z = 0$: $x + 2y = 4$ et $x - y = 1$. En soustrayant, $3y = 3$, donc $y = 1$ et $x = 2$. La droite passe par $A(2, 1, 0)$:

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 - t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = -3t \end{cases}$$

Contrôle. Avec $t = 1$, le point $(7, 0, -3)$ donne $7 + 2 \times 0 + (-3) - 4 = 0$ et $7 - 0 + 2 \times (-3) - 1 = 0$.

Conclusion. Les plans P et P' sont sécants, et la représentation paramétrique ci-dessus est celle de leur droite d'intersection Δ.

Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir

Admis : le changement d'orientation par permutation ou changement de sens, le produit vectoriel nul, l'antisymétrie et la bilinéarité, les produits des vecteurs d'une base orthonormée directe, les coordonnées du produit vectoriel.

Démontré : l'aire d'un triangle et d'un parallélogramme, l'alignement de trois points, le vecteur normal au plan (ABC), la distance d'un point à une droite, la droite d'intersection de deux plans.

Un résultat admis se cite par son nom ; un résultat démontré, tu sais aussi le prouver.

Produit scalaire ou produit vectoriel ?

- Montrer que deux vecteurs sont orthogonaux : produit scalaire nul.
- Montrer que trois points sont alignés : produit vectoriel nul.
- Trouver un vecteur normal au plan (ABC) : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
- Calculer l'aire d'un triangle : la moitié de la norme d'un produit vectoriel.
- Distance à un plan : formule avec la valeur absolue ; distance à une droite : formule avec le produit vectoriel.

Le mot du prof. Avec ce chapitre, tu termines la géométrie de l'espace de l'année. Tu sais orienter l'espace, calculer un produit vectoriel et le contrôler. Surtout, tu sais rédiger : repère annoncé, propriété nommée, calcul vérifié. Ces trois réflexes te serviront partout.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Produit vectoriel » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)