BURHAN

Résumé : Produit scalaire dans l'espace et applications

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-scalaire-dans-l-espace/resume

Chapitre	Semestre
Produit scalaire dans l'espace et applications	Semestre 2

Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

Ce Résumé rassemble les énoncés exacts du chapitre, ses méthodes et ses pièges. Trace aussi ta propre figure à main levée, mais ne lis jamais une propriété sur un dessin en perspective.

Le **cube** $ABCDEFGH$ d'arête 1 a pour faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), et pour arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$. Le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est orthonormé.

Toute formule en coordonnées de ce chapitre exige un **repère orthonormé** : annonce-le avant chaque calcul.

Définition : Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, A un point, et B, C les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Il existe au moins un plan P qui contient A, B et C.

- Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan P, comme en géométrie plane. On montre ci-dessous qu'il ne dépend ni du point A, ni du plan P.
- La **norme** de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la longueur AB ; elle ne dépend pas de A, car deux représentants d'un même vecteur sont les côtés opposés d'un parallélogramme, éventuellement aplati (tronc commun). On a $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si l'un d'eux est nul, ou si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Propriété : Expressions du produit scalaire ; orthogonalité

Avec les notations de la définition du produit scalaire :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2\right)$; en particulier, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ne dépend ni de A, ni de P.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos \widehat{BAC}$.
3. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
4. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Méthode : Calculer un produit scalaire

1. **Regarde les données** : trois longueurs, un angle connu, un projeté orthogonal, ou des coordonnées.

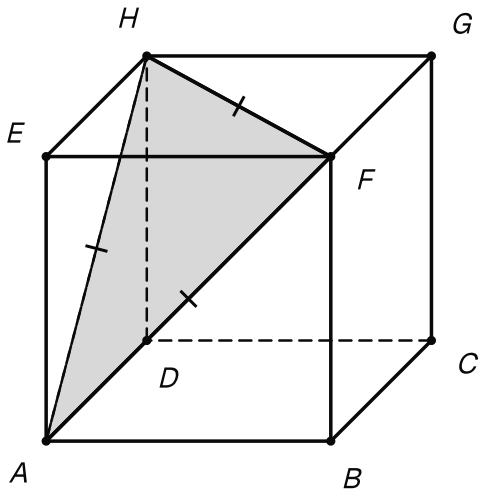
2. **Longueurs seulement** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2\right)$.
3. **Angle ou projeté** : place les trois points dans un même plan et calcule comme en géométrie plane.
4. **Coordonnées** : vérifie que le repère est orthonormé, puis applique l'expression analytique.

Exemple : Un produit scalaire par les longueurs

Dans le cube, AF, AH et FH sont des diagonales de faces carrées d'arête 1 : chacune mesure $\sqrt{2}$. Avec les longueurs seules :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH}\\ &= \frac{1}{2}\left(AF^2 + AH^2 - FH^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(2 + 2 - 2) = 1.\end{aligned}$$

Le triangle AFH est équilatéral, donc $\widehat{FAH} = \frac{\pi}{3}$. Le cosinus redonne $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 1$.



Trois diagonales de faces, [AF], [AH] et [FH], de même longueur : le triangle AFH est équilatéral.

Exemple : Un produit scalaire par un projeté

Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$. La droite (AB) est orthogonale aux droites sécantes (BC) et (BF), donc au plan (BCG), qui contient G.

Donc (BG) est perpendiculaire à (AB) en B : le projeté orthogonal de G sur (AB) est B. Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}\\ &= AB^2 = 1.\end{aligned}$$

Repère orthonormé : norme, distance, expression analytique

Définition : Base orthonormée, repère orthonormé

- Une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** si $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$ et si les trois vecteurs sont deux à deux orthogonaux : $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$.
- Un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace est **orthonormé** si sa base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormée.

Théorème : Norme et distance dans un repère orthonormé

Dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, tout vecteur $\vec{u}(x,y,z)$ vérifie

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Dans un repère orthonormé, pour tous points A et B,

$$AB=\sqrt{\begin{matrix}(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2\\+(z_B-z_A)^2\end{matrix}}.$$

Théorème : Expression analytique du produit scalaire

Dans une base orthonormée, pour tous vecteurs $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'.$$

En particulier, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'+zz'=0$.

Propriété : Propriétés de calcul du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace et tout réel α :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$;
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})=\alpha\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$;
3. $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$, et $\vec{u}\cdot\vec{u}=0$ si et seulement si $\vec{u}=\vec{0}$;
4. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$;
5. $\|\alpha\vec{u}\|=|\alpha|\,\|\vec{u}\|$.

Produit scalaire, repère orthonormé

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

Norme, repère orthonormé

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Distance, repère orthonormé

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Carré scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Identité

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Méthode : Prouver une orthogonalité

1. **Choisis** un vecteur directeur de chaque droite, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. **Annonce** le repère orthonormé, puis calcule $xx' + yy' + zz'$ terme à terme.
3. **Conclus** : une somme nulle donne deux vecteurs orthogonaux, donc deux droites orthogonales.
4. **Nuance** : deux droites orthogonales ne se coupent pas forcément ; sécantes, elles sont perpendiculaires.

Exemple : Calculer en coordonnées

Dans un repère orthonormé, soit $\vec{u}(2, -1, 2)$ et $\vec{v}(1, 4, 1)$. D'après l'expression analytique :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times 1 + (-1) \times 4 + 2 \times 1 \\ &= 2 - 4 + 2 = 0, \end{aligned}$$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. De plus :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Pour $A(1, -2, 3)$ et $B(3, 4, 0)$, on a $\overrightarrow{AB}(2, 6, -3)$ et :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{49} = 7. \end{aligned}$$

Attention : Pas de formule en coordonnées sans repère orthonormé

Prends un pavé droit $ABCDEFGH$ (ses faces sont des rectangles) avec $AB = 2$ et $AD = AE = 1$. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Mais ce repère n'est pas orthonormé, car $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$.

La formule de la distance donnerait $AG = \sqrt{3}$: c'est faux.

Dans le repère orthonormé $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on a $G(2, 1, 1)$ et :

$$AG = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Vecteur normal et équation d'un plan

Définition : Vecteur normal à un plan

Soit P un plan de l'espace. Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** au plan P si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et si $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de direction de P.

Propriété : Vecteur normal et deux vecteurs de direction

Soit $P = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ un plan, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **non colinéaires**, et $\vec{n}$ un vecteur **non nul**. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan P si et seulement si

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0.$$

Théorème : Plan défini par un point et un vecteur normal

Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur **non nul**.

1. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est un plan. C'est l'**unique** plan qui passe par A et admet $\vec{n}$ pour vecteur normal.
2. Dans un repère orthonormé, si $\vec{n}(a, b, c)$ et $A(x_A, y_A, z_A)$, ce plan a pour équation cartésienne

   $$ax + by + cz + d = 0,$$

   avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Propriété : Vecteur normal lu sur une équation cartésienne

Dans un repère orthonormé, soit P un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Alors :

- le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est normal au plan P ;
- tout plan admet un vecteur normal ; deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires et, réciproquement, tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal de P est normal à P.

Méthode : Écrire l'équation d'un plan par un vecteur normal

1. **Trouve** un point A du plan et un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.
2. **Pour le plan** (ABC) : cherche $\vec{n}$ non nul avec $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Fixe une coordonnée, par exemple $a = 1$, et vérifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
3. **Traduis** $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ dans le repère orthonormé, puis développe.
4. **Contrôle** : chaque point donné vérifie l'équation obtenue.

Exemple : Un point et un vecteur normal

Dans un repère orthonormé, cherchons le plan P qui passe par $A(1,-1,2)$ et admet $\vec{n}(2,-1,2)$ pour vecteur normal. Il a une équation de la forme $2x-y+2z+d=0$.

Comme A est dans P, $2\times 1-(-1)+2\times 2+d=0$, donc $d=-7$.

Ainsi P : $2x-y+2z-7=0$.

Exemple : Le plan passant par trois points

Dans un repère orthonormé, soit $A(2,0,2)$, $B(0,1,2)$ et $C(2,2,0)$. On a $\overrightarrow{AB}(-2,1,0)$ et $\overrightarrow{AC}(0,2,-2)$.

Non-colinéarité. Si $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$, la première coordonnée donne $\lambda=0$, donc $\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, ce qui est faux.

Vecteur normal. Le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est normal à (ABC) si :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-2a+b=0,$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2b-2c=0.$$

Avec $a=1$: $b=2$, $c=2$.

Équation. Le plan passe par A, d'où (ABC) : $x+2y+2z-6=0$. Les points B et C la vérifient : $0+2\times 1+2\times 2-6=0$ et $2+2\times 2+2\times 0-6=0$.

Attention : Normal n'est pas directeur

Le plan d'équation $x+2y+2z-6=0$ admet $\vec{n}(1,2,2)$ pour vecteur **normal** : ce vecteur ne le dirige pas.

Un vecteur de direction $\vec{w}(\alpha,\beta,\gamma)$ vérifie au contraire $\alpha+2\beta+2\gamma=0$, comme $(2,-1,0)$. Une droite dirigée par $\vec{n}$ traverse le plan perpendiculairement.

Plans parallèles ou perpendiculaires, droite orthogonale à un plan

Propriété : Plans parallèles et vecteurs normaux

Soit P et P' deux plans, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Les plans P et P' sont **parallèles** si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.

Théorème : Droite orthogonale à un plan

Soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}$, et $D=D(A,\vec{u})$ une droite, avec $\vec{u}\neq\vec{0}$. La droite D est **orthogonale** au plan P si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Propriété : Parallélisme et orthogonalité

Soit P et P' deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, et $D = D(A, \vec{u})$, $D' = D(A', \vec{u}')$ deux droites, avec $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ non nuls.

1. La droite D est parallèle au plan P si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.
2. Si D et D' sont orthogonales à P, elles sont parallèles.
3. Si P et P' sont orthogonaux à D, ils sont parallèles.
4. Si D est orthogonale à P et si P' est parallèle à P, alors D est orthogonale à P'.

Propriété : Plans perpendiculaires

Soit P et P' deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Les plans P et P' sont **perpendiculaires** si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.

Méthode : Droite et plan : orthogonale ou parallèle

1. **Lis** un vecteur normal $\vec{n}$ du plan sur son équation, dans le repère orthonormé.
2. **Écris** un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite.
3. **Compare** : si $\vec{u} = \lambda\vec{n}$ pour un réel λ, la droite est orthogonale au plan ; si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, elle lui est parallèle.
4. **Pour la droite passant par un point Ω et orthogonale au plan**, prends $\vec{n}$ comme vecteur directeur.

Exemple : Comparer deux plans

Dans un repère orthonormé, soit $P : x + 2y + 2z - 6 = 0$, de vecteur normal $\vec{n}(1, 2, 2)$.

- $P_1 : -2x - 4y - 4z + 3 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}_1(-2, -4, -4) = -2\vec{n}$: les plans P et P_1 sont parallèles.
- $P_2 : 2x - y + 5 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}_2(2, -1, 0)$, et les plans P et P_2 sont perpendiculaires, car :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{n}_2 &= 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 2 \times 0 \\ &= 2 - 2 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Exemple : Une droite orthogonale à un plan

La droite qui passe par $\Omega(1, -1, 3)$ et qui est orthogonale à P est dirigée par $\vec{n}(1, 2, 2)$. Elle a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

La droite dirigée par $\vec{w}(0, 1, -1)$ est parallèle à P, car :

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{n} &= 0 \times 1 + 1 \times 2 + (-1) \times 2 \\ &= 0 + 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Attention : Orthogonales ne veut pas dire sécantes

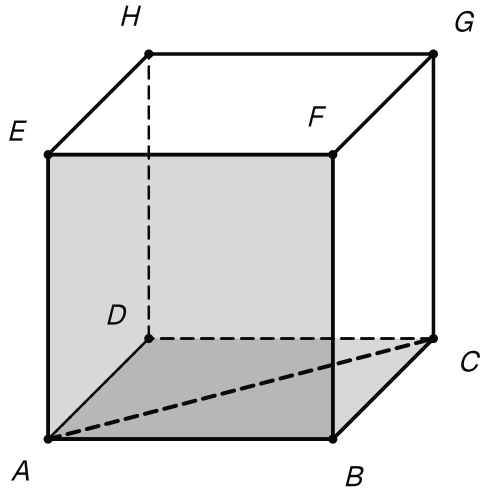
Un produit scalaire nul entre deux vecteurs directeurs prouve que deux droites sont **orthogonales**, pas qu'elles se coupent.

Dans le cube, (AB) et (CG) sont orthogonales et n'ont aucun point commun. Le mot « perpendiculaires » exige en plus un point d'intersection.

Attention : Deux plans perpendiculaires

Les plans $(ABCD)$ et $(ABFE)$ du cube sont perpendiculaires. Pourtant la droite (AC), contenue dans $(ABCD)$, n'est pas orthogonale à $(ABFE)$: elle n'est pas dirigée par le vecteur normal $\overrightarrow{AD}$.

Prouve la perpendicularité de deux plans par $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$, jamais par une droite prise au hasard.



Faces ABCD et ABFE perpendiculaires ; pourtant (AC) n'est pas orthogonale à ABFE.

Projeté orthogonal et distance d'un point à un plan

Propriété : Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Dans un repère orthonormé, soit P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, $\vec{n}(a, b, c)$, et $M(x_0, y_0, z_0)$ un point. La droite $D(M, \vec{n})$, orthogonale à P, coupe P en un **seul** point H, appelé **projeté orthogonal** de M sur P, et

$$\overrightarrow{MH} = t_0\,\vec{n},$$

avec

$$t_0 = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Le point H est l'unique point de P tel que $\overrightarrow{MH}$ soit colinéaire à $\vec{n}$.

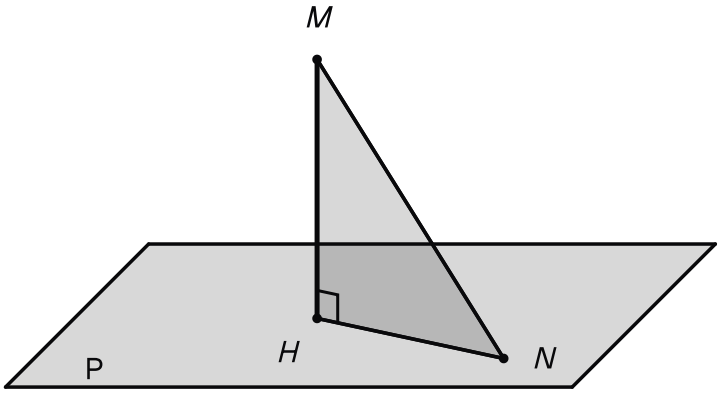
Théorème : Distance d'un point à un plan

Avec les notations du projeté orthogonal, pour tout point N du plan P,

$$MN^2 = MH^2 + HN^2;$$

en particulier $MN \geq MH$, avec égalité si et seulement si $N = H$. La **distance** du point M au plan P est $d(M, P) = MH$, et

$$d(M, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



Pour tout point N du plan, MN est au moins égal à MH : la distance de M au plan est MH.

Méthode : Projeté orthogonal et distance

1. **Écris** la droite qui passe par M et qui est dirigée par $\vec{n}(a, b, c)$.

2. **Remplace** x, y, z dans l'équation du plan : une équation du premier degré donne t_0, puis le projeté H.
3. **Calcule** la distance par la formule $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
4. **Contrôle** : H vérifie l'équation du plan, et MH redonne la même distance.

Exemple : Les deux voies donnent la même distance

Dans un repère orthonormé, soit $P : 2x - y + 2z + 3 = 0$ et $M(1, 2, 3)$. La droite $D(M, \vec{n})$, avec $\vec{n}(2, -1, 2)$, a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant, $9t + 9 = 0$, donc $t_0 = -1$ et $H(-1, 3, 1)$.

La formule donne :

$$\begin{aligned} & d(M, P) \\ &= \frac{|2 \times 1 - 2 + 2 \times 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Contrôle : $\overrightarrow{MH}(-2, 1, -2)$ et $MH = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Attention : La valeur absolue et la racine

Dans la formule de la distance, garde la valeur absolue : une distance n'est jamais négative. Garde aussi la racine du dénominateur. Pour le plan précédent, diviser par $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ au lieu de 3 donnerait 1 au lieu de 3.

À retenir : Coin devoir : rédiger une distance

Une distance se rédige en trois temps dans une copie de devoir.

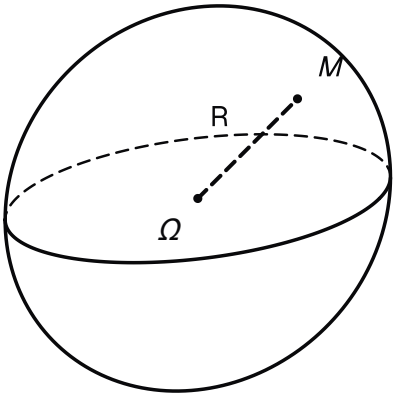
1. **Annonce** : « Le repère est orthonormé et P a pour équation… ».
2. **Nomme** le résultat : « D'après la formule de la distance à un plan… ».
3. **Écris** le calcul complet, numérateur entre barres de valeur absolue, puis la valeur exacte, jamais un décimal.

Sphère : équation et représentation paramétrique

Définition : Sphère

Soit Ω un point et R un réel **strictement positif**.

- La **sphère** de centre Ω et de rayon R, notée $S(\Omega, R)$, est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.
- Si A et B sont deux points distincts, la **sphère de diamètre** $[AB]$ est la sphère de centre le milieu de $[AB]$ et de rayon $\dfrac{AB}{2}$.



Sphère S(Ω, R) : l'ensemble des points M tels que ΩM = R.

Théorème : Équation cartésienne d'une sphère

Dans un repère orthonormé, soit $\Omega(a, b, c)$ un point et $R > 0$. Un point $M(x, y, z)$ appartient à la sphère $S(\Omega, R)$ si et seulement si

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

En développant, la sphère $S(\Omega, R)$ a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + e = 0$, avec $e = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Propriété : Sphère de diamètre [AB]

Soit A et B deux points **distincts**. Un point M appartient à la sphère de diamètre $[AB]$ si et seulement si

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Théorème : Représentation paramétrique d'une sphère

Dans un repère orthonormé, soit $\Omega(a,b,c)$ un point et $R>0$. Un point $M(x,y,z)$ appartient à la sphère $S(\Omega,R)$ si et seulement s'il existe deux réels θ et φ tels que

$$\begin{cases} x = a + R\cos\varphi\cos\theta \\ y = b + R\cos\varphi\sin\theta \\ z = c + R\sin\varphi \end{cases}$$

Ce système, où θ et φ parcourent $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** de la sphère $S(\Omega,R)$.

Méthode : Écrire une sphère, lire son centre et son rayon

1. **Centre et rayon connus** : écris $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ dans le repère orthonormé.
2. **Centre et un point** A connus : le rayon est $R=\Omega A$.
3. **Diamètre** $[AB]$: traduis $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, ou prends le milieu de $[AB]$ et le rayon $\dfrac{AB}{2}$.
4. **Sphère annoncée par une forme développée** : complète chaque carré, $x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$, puis lis le centre et le rayon.

Exemple : Une sphère par son centre et un point

Dans un repère orthonormé, la sphère S de centre $\Omega(1,-2,0)$ qui passe par $A(3,-1,2)$ a pour rayon :

$$\begin{aligned} \Omega A &= \sqrt{2^2+1^2+2^2} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Son équation est :

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9.$$

Exemple : Centre et rayon d'une sphère annoncée

On admet que S est la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$. Complétons les carrés :

$$\begin{aligned} x^2-4x &= (x-2)^2-4, \\ y^2+2y &= (y+1)^2-1, \\ z^2-6z &= (z-3)^2-9. \end{aligned}$$

L'équation devient $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2-14+5=0$, soit $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$.

Le centre est $\Omega(2,-1,3)$, et le rayon vaut 3.

Exemple : La sphère de diamètre [AB]

Dans un repère orthonormé, soit $A(1,0,2)$ et $B(3,4,-2)$. La sphère de diamètre $[AB]$ a pour centre le milieu $I(2,2,0)$ et pour rayon $\dfrac{AB}{2}=\dfrac{6}{2}=3$. Son équation est $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=9$.

Le point $C(4,3,2)$ lui appartient. En effet, $\overrightarrow{CA}(-3,-3,0)$, $\overrightarrow{CB}(-1,1,-4)$ et :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\\&=(-3)\times(-1)+(-3)\times 1\\&\quad+0\times(-4)\\&=3-3+0=0.\end{aligned}$$

Exemple : Des points par leurs paramètres

Dans un repère orthonormé, prends la sphère de centre $\Omega(1,0,-1)$ et de rayon 2.

Pour $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi=0$, on a $\cos\varphi=1$ et $\sin\theta=1$, d'où le point $(1,2,-1)$.

Pour $\theta=0$ et $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, on obtient le point $(1,0,1)$, en haut de la sphère.

Attention : Les signes du centre

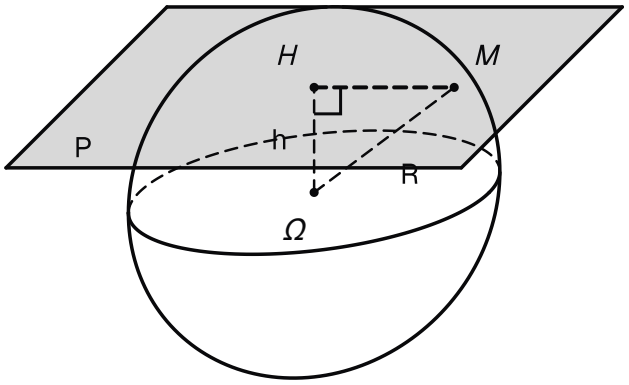
L'équation $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=16$ décrit la sphère de centre $(-3,0,1)$, pas $(3,0,-1)$, et de rayon 4, pas 16. Relis chaque signe : $x+3=x-(-3)$.

Sphère et plan ; plan tangent

Théorème : Position relative d'une sphère et d'un plan

Soit $S(\Omega,R)$ une sphère, P un plan, H le projeté orthogonal de Ω sur P, et $h=d(\Omega,P)=\Omega H$.

- Si $h>R$, le plan P et la sphère S n'ont **aucun** point commun.
- Si $h=R$, ils ont un **seul** point commun, le point H : on dit que le plan P est **tangent** à la sphère S en H.
- Si $h<R$, leur intersection est le **cercle** du plan P de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-h^2}$.



Cas h < R : la section est le cercle de centre H dont le rayon HM vérifie HM² = R² - h².

Propriété : Plan tangent à une sphère en un point

Soit $S(\Omega, R)$ une sphère et A un point de S. Le plan qui passe par A et admet $\overrightarrow{\Omega A}$ pour vecteur normal est l'**unique** plan tangent à S en A. C'est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0.$$

Méthode : Position d'une sphère et d'un plan

1. **Lis** le centre Ω et le rayon R de la sphère.
2. **Calcule** $h = d(\Omega, P)$ par la formule de la distance, dans le repère orthonormé.
3. **Compare** : $h > R$, aucun point commun ; $h = R$, plan tangent en H ; $h < R$, un cercle.
4. **Pour le cercle** : son centre est le projeté orthogonal H de Ω sur P, et son rayon vaut $r = \sqrt{R^2 - h^2}$.

Exemple : Un cercle d'intersection

Dans un repère orthonormé, soit S la sphère de centre $\Omega(0, 1, -2)$ et de rayon 5, et $P : 2x - 2y + z - 5 = 0$. On a :

$$\begin{aligned} h &= \frac{|2 \times 0 - 2 \times 1 + (-2) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Comme $3 < 5$, P coupe S suivant un cercle de rayon $r = \sqrt{25 - 9} = 4$. Son centre est $H(2, -1, -1)$, obtenu avec $t_0 = 1$.

Attention : Le cercle a son propre centre et son propre rayon

Dans l'exemple précédent, le cercle n'a ni le centre Ω, ni le rayon 5 de la sphère : son centre est H et son rayon vaut 4. Le rayon $r = \sqrt{R^2 - h^2}$ est égal à R seulement quand le plan passe par Ω.

Méthode : Plan tangent en un point

1. **Vérifie** que le point A est sur la sphère : $\Omega A = R$.
2. **Calcule** $\overrightarrow{\Omega A}$: c'est un vecteur normal au plan tangent en A.
3. **Traduis** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$ dans le repère orthonormé, puis développe.
4. **Contrôle** : la distance de Ω au plan obtenu vaut R.

Exemple : Un plan tangent

Dans un repère orthonormé, soit S de centre $\Omega(1, -1, 2)$ et de rayon 3, et $A(3, 0, 4)$. On a $\overrightarrow{\Omega A}(2, 1, 2)$ et $\Omega A = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$: A est sur S.

Le plan tangent en A admet $\overrightarrow{\Omega A}$ pour vecteur normal, d'où $2x + y + 2z - 14 = 0$. Contrôle :

$$\frac{|2 \times 1 + (-1) + 2 \times 2 - 14|}{3} = 3.$$

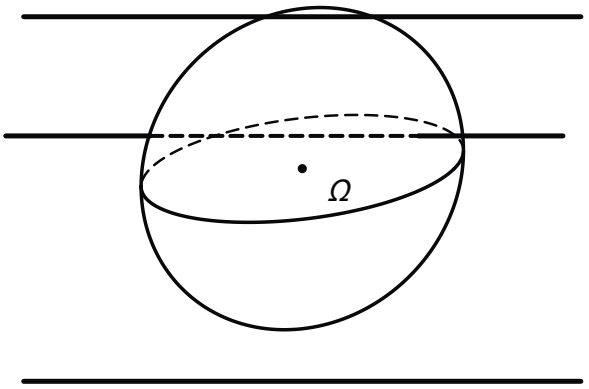
Sphère et droite

Théorème : Intersection d'une sphère et d'une droite

Soit $S(\Omega, R)$ une sphère et $D = D(A, \vec{u})$ une droite, avec $\vec{u} \neq \vec{0}$. Pour tout réel t, notons M_t le point tel que $\overrightarrow{AM_t} = t\vec{u}$. Le point M_t appartient à S si et seulement si

$$\|\vec{u}\|^2 t^2 + 2\left(\overrightarrow{\Omega A} \cdot \vec{u}\right) t + \Omega A^2 - R^2 = 0.$$

Cette équation du second degré a zéro, une ou deux solutions : la droite D et la sphère S ont respectivement **aucun**, **un seul** ou **deux** points communs. Lorsqu'elles ont un seul point commun, on dit que la droite D est **tangente** à la sphère S.



Une droite et une sphère : deux points communs, un point de tangence, ou rien.

Méthode : Sphère et droite

1. **Écris** une représentation paramétrique de la droite et l'équation de la sphère, dans le repère orthonormé.
2. **Remplace** x, y, z : tu obtiens une équation du second degré en t.
3. **Calcule** le discriminant Δ : $\Delta < 0$, aucun point commun ; $\Delta = 0$, droite tangente ; $\Delta > 0$, deux points.
4. **Termine** : chaque valeur de t donne un point, que tu vérifies dans l'équation de la sphère.

Exemple : Deux points communs

Dans un repère orthonormé, soit S : $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$ et la droite D de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant, on obtient :

$$2t^2 - 10t + 8 = 0,$$

de discriminant :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 36.$$

Comme $\Delta > 0$, il y a deux solutions, $t = 1$ et $t = 4$: D coupe S aux points $(3, -1, 1)$ et $(3, 2, -2)$.

Exemple : Une droite tangente

Avec la même sphère, la droite D' de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

donne $2t^2 - 4t + 2 = 0$. Le discriminant vaut $(-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 0$: une seule solution, $t = 1$.

La droite D' est tangente à S au point $(3, 1, 1)$.

Ce que tu sais faire

À retenir

- Un produit scalaire nul prouve une orthogonalité ; un calcul en coordonnées commence par « dans le repère orthonormé ».
- Un vecteur normal et un point suffisent pour écrire un plan.
- Le projeté orthogonal H de M sur P donne $d(M, P) = MH$.
- Pour une sphère et un plan, compare h et R ; pour une sphère et une droite, étudie le signe de Δ.

Tu sais maintenant mesurer dans l'espace : longueurs, angles droits, distances à un plan, contacts avec une sphère. Le chapitre suivant ajoute un nouvel outil de calcul sur les vecteurs de l'espace.