BURHAN

Produit scalaire dans l'espace et applications : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-scalaire-dans-l-espace/exercices/examen

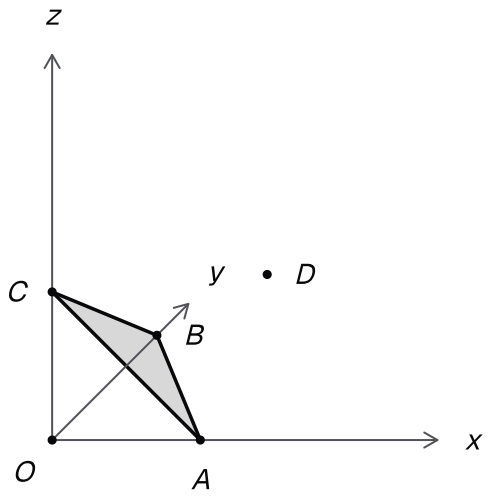
Chapitre	Palier	Exercices
Produit scalaire dans l'espace et applications	Niveau examen	5

Exercice 1 — 10 pts

Problème : Un tétraèdre, son plan de base et une sphère

Problème guidé, de la taille d'un exercice de devoir surveillé de 1BAC SM. Barème indicatif sur 10 points, donné à titre d'estimation.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(3,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,3)$ et $D(4,1,3)$, et le vecteur $\vec{n}(2,1,2)$.



Les points A, B, C sur les trois axes, le triangle ABC et le point D hors de son plan.

1. — 1 pts

Montre que les points A, B et C ne sont pas alignés.

INDICE

Commence par les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$. Pour l'alignement, cherche si l'un des vecteurs est un multiple de l'autre.

2. — 1 pts

Montre que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

INDICE

Il suffit de deux produits scalaires nuls avec deux vecteurs de direction non colinéaires du plan.

3. — 1,5 pts

En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

Traduis $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, puis développe. Contrôle avec B et C.

4. 1 pts

Calcule la distance du point D au plan (ABC).

INDICE

Formule de la distance à un plan, avec la norme de $\vec{n}$ au dénominateur.

5. 2 pts

Soit Δ la droite qui passe par D et qui est orthogonale au plan (ABC). Donne une représentation paramétrique de Δ, puis détermine le projeté orthogonal H de D sur (ABC).

INDICE

La droite Δ est dirigée par $\vec{n}$. Le point H est l'intersection de Δ et du plan : remplace dans l'équation de (ABC).

6. 2 pts

Soit S la sphère de centre D et de rayon 5. Montre que S coupe le plan (ABC) suivant un cercle dont tu préciseras le centre et le rayon.

INDICE

Compare la distance trouvée à la question 4 avec le rayon. Le centre du cercle a été calculé à la question 5.

7. 1,5 pts

Montre que le point $E(7,1,7)$ appartient à S, puis écris une équation du plan tangent à S en E.

INDICE

Calcule DE. Le plan tangent en E admet $\overrightarrow{DE}$ pour vecteur normal.

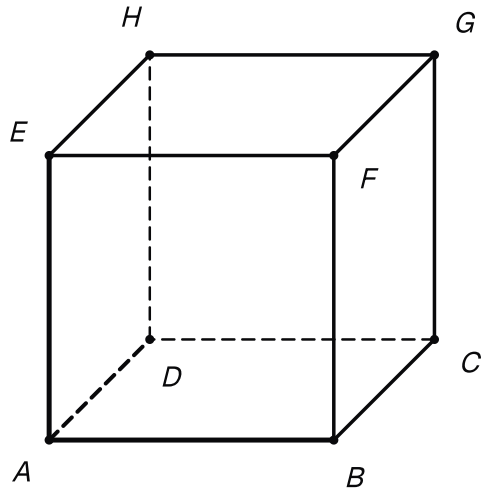
Exercice 2

10 pts

Problème : Une diagonale du cube et deux plans parallèles

Ce problème guidé correspond à un exercice de devoir surveillé de 1BAC SM. Les points indiqués, 10 au total, sont une estimation.

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 : faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$. Une figure à main levée t'aidera, sans jamais servir de preuve. On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Le cube d'arête 1 et le repère (A, AB, AD, AE), porté par les trois arêtes issues de A.

1.

1 pts

Justifie que ce repère est orthonormé, et donne les coordonnées des huit sommets du cube.

INDICE

Les arêtes mesurent 1 et sont deux à deux orthogonales. Pour les coordonnées, décompose chaque vecteur $\overrightarrow{AX}$ sur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, par exemple $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

2.

1,5 pts

Montre que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).

INDICE

Calcule $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$, vérifie qu'ils ne sont pas colinéaires, puis calcule deux produits scalaires.

3.

1 pts

En déduire une équation cartésienne du plan (BDE).

INDICE

Un point et un vecteur normal suffisent : prends le point B.

4. 1,5 pts

Montre que le plan (CFH) a pour équation $x+y+z-2=0$, puis qu'il est parallèle au plan (BDE).

INDICE

Vérifie d'abord que C, F, H ne sont pas alignés et satisfont l'équation. Compare ensuite les vecteurs normaux des deux plans.

5. 1,5 pts

La droite (AG) coupe le plan (BDE) en I. Détermine les coordonnées de I, puis vérifie que $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}=\vec{0}$.

INDICE

La droite (AG) passe par A et est dirigée par $\overrightarrow{AG}$: ses points sont (t,t,t). Remplace dans l'équation de (BDE).

6. 2 pts

La droite (AG) coupe le plan (CFH) en J. Montre que $AI=IJ=JG$.

INDICE

Même calcul qu'à la question précédente avec l'équation de (CFH). Calcule ensuite les trois distances, ou leurs carrés.

7. 1,5 pts

Calcule $d(A,(BDE))$, puis écris une équation de la sphère de centre A tangente au plan (BDE).

INDICE

Formule de la distance, ou distance AI. Une sphère est tangente à un plan quand son rayon est la distance du centre au plan.

Exercice 3 — 10 pts

Problème : Une sphère, une droite et des plans parallèles

Exercice de devoir surveillé (1BAC SM), guidé pas à pas. Barème sur 10 : chaque question porte un nombre de points indicatif.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On admet que S est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0$. On donne le point $A(3, 1, 0)$ et la droite D de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. — 1,5 pts

Détermine le centre Ω et le rayon R de la sphère S.

INDICE

Complète les carrés en x et en z ; le terme en y est déjà un carré.

2. — 1 pts

Montre que le point A appartient à S.

INDICE

Calcule ΩA et compare au rayon.

3. — 1,5 pts

Écris une équation du plan T tangent à S en A.

INDICE

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ est normal au plan tangent en A.

4. — 2 pts

Détermine les points communs à la droite D et à la sphère S.

INDICE

Remplace la représentation de D dans l'équation réduite de S, puis réduis : tu obtiens une équation en t.

5. — 1,5 pts

Pour tout réel m, on note P_m le plan d'équation $2x + y + 2z + m = 0$. Détermine les valeurs de m pour lesquelles P_m est tangent à S.

INDICE

Calcule $d(\Omega, P_m)$ en fonction de m : la valeur absolue reste au numérateur. Écris ensuite que cette distance vaut R.

6. 1,5 pts

Détermine les valeurs de m pour lesquelles P_m coupe S suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.

INDICE

Le rayon du cercle vaut $\sqrt{R^2 - h^2}$, avec $h = d(\Omega, P_m)$. Traduis $r^2 = 5$ par une condition sur h, puis sur m.

7. 1 pts

Pour $m = -4$, détermine le centre du cercle d'intersection.

INDICE

Le centre est le projeté orthogonal de Ω sur P_{-4} : droite passant par Ω dirigée par $(2, 1, 2)$, puis substitution.

Exercice 4 — 10 pts

Problème : Un triangle rectangle isocèle, deux plans perpendiculaires et une sphère

Problème guidé de devoir surveillé de 1BAC SM, noté sur 10 points ; le barème de chaque question est indicatif.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points $A(1,-1,0)$, $B(2,1,2)$, $C(4,2,0)$ et $D(4,-1,3)$. Une figure à main levée t'aidera à suivre la configuration, sans jamais servir de preuve.

1. — 1 pts

Calcule les longueurs AB et AC, puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

INDICE

Dans le repère orthonormé, utilise la formule de la norme et l'expression analytique. Pour l'angle, écris $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$.

2. — 1,5 pts

Montre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B. Retrouve ensuite $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ par les seules longueurs.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et la longueur BC. Pour la seconde partie, emploie l'expression $\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$.

3. — 1,5 pts

Calcule $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$. En déduire que $\overrightarrow{BD}$ est un vecteur normal au plan (ABC), puis une équation cartésienne de ce plan.

INDICE

Calcule les deux produits scalaires par l'expression analytique. Pour conclure, vérifie à l'aide de la question 2 que $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs de direction non colinéaires du plan (ABC).

4. — 1,5 pts

En déduire que B est le projeté orthogonal de D sur (ABC), puis calcule $d(D,(ABC))$ de deux façons.

INDICE

Le projeté orthogonal de D est l'unique point H du plan tel que $\overrightarrow{DH}$ soit colinéaire à un vecteur normal. Calcule ensuite la longueur DB, puis applique la formule de la distance à un plan.

5. 1,5 pts

Soit Q le plan qui passe par B et admet $\overrightarrow{BC}$ pour vecteur normal. Écris une équation cartésienne de Q, montre que Q contient les points A et D, puis que les plans Q et (ABC) sont perpendiculaires.

INDICE

Traduis $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Pour la perpendicularité, calcule le produit scalaire des deux vecteurs normaux.

6. 1,5 pts

Soit Σ la sphère de diamètre $[AD]$. Détermine son centre I et son rayon. En déduire, à l'aide de la question 3, que B appartient à Σ, puis montre que C ne lui appartient pas.

INDICE

Le centre est le milieu de $[AD]$. Pour un point M, la caractérisation de la sphère de diamètre $[AD]$ ramène la question au calcul de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD}$; pour le point B, ce produit scalaire figure déjà à la question 3.

7. 1,5 pts

Montre que la sphère Σ coupe le plan (ABC) suivant un cercle dont tu préciseras le centre K et le rayon. Montre que ce cercle est le cercle de diamètre $[AB]$ du plan (ABC).

INDICE

Calcule $h = d(I, (ABC))$ et compare-la au rayon de Σ. Le centre K est le projeté orthogonal de I sur (ABC) : prends la droite qui passe par I et qui est dirigée par $\vec{n} = \overrightarrow{BD}$.

Exercice 5 10 pts

Problème : Des droites issues d'un point extérieur et tangentes à une sphère

Énoncé guidé au niveau d'un devoir surveillé de 1BAC SM : 10 points au total, répartis par estimation entre les questions.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note S la sphère de centre $\Omega(-1, 2, 1)$ et de rayon 3, et l'on donne le point $A(4, 2, 1)$. Pour tout réel m, on note D_m la droite qui passe par A et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}_m(-4, m, 0)$.

1. 1 pts

Écris une équation cartésienne de S. Calcule ΩA : le point A appartient-il à S ?

INDICE

Le centre et le rayon sont donnés : l'équation se lit directement. Compare ensuite ΩA au rayon.

2. 1,5 pts

Écris une représentation paramétrique de D_m. Montre que le point de D_m de paramètre t appartient à S si et seulement si $(16 + m^2)t^2 - 40t + 16 = 0$.

INDICE

Remplace x, y, z dans l'équation de S obtenue à la question 1, puis développe et regroupe selon les puissances de t.

3. 1,5 pts

Détermine, selon les valeurs du réel m, le nombre de points communs à la droite D_m et à la sphère S.

INDICE

Le coefficient de t^2 ne s'annule jamais : l'équation est du second degré. Étudie le signe de son discriminant en fonction de m.

4. 1,5 pts

On note T le point de contact de D_3 avec S, et T' celui de D_{-3} avec S. Détermine leurs coordonnées, puis montre que $AT = AT' = 4$.

INDICE

Pour $m = 3$ et pour $m = -3$, l'équation en t a une seule solution. Reporte-la dans la représentation paramétrique.

5. 1,5 pts

Écris une représentation paramétrique de S. Soit θ_0 un réel tel que $\cos\theta_0 = \dfrac{3}{5}$ et $\sin\theta_0 = \dfrac{4}{5}$. Montre que T est le point de S de paramètres $\theta = \theta_0$ et $\varphi = 0$, puis donne des paramètres du point T'.

INDICE

Pour $\varphi = 0$, on a $\cos\varphi = 1$ et $\sin\varphi = 0$. Pour T', cherche un réel de même cosinus que θ_0 et de sinus opposé.

6. 1,5 pts

Soit Q le plan d'équation $5x - 4 = 0$. Montre que la droite (ΩA) est orthogonale à Q, puis que Q coupe S suivant un cercle Γ dont tu préciseras le centre K et le rayon. Vérifie que T et T' appartiennent à Γ.

INDICE

Un vecteur normal de Q se lit sur son équation. Calcule ensuite $h = d(\Omega, Q)$, puis le projeté orthogonal de Ω sur Q.

7. 1,5 pts

Montre que tout point M du cercle Γ vérifie $AM = 4$.

INDICE

Montre d'abord que K est aussi le projeté orthogonal de A sur Q, puis applique la propriété de la distance à un plan au point A et à un point M de Γ.