BURHAN

Produit scalaire dans l'espace et applications : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-scalaire-dans-l-espace/exercices/examen

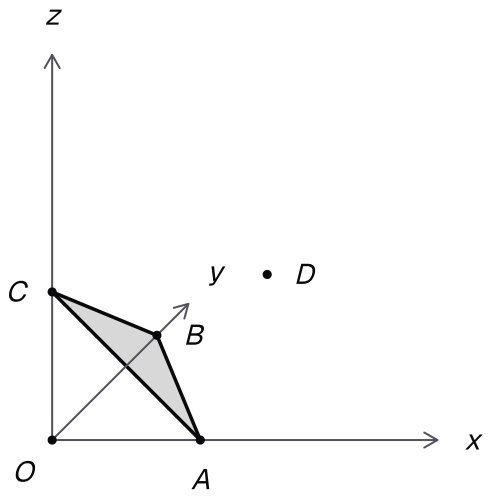
Chapitre	Palier	Exercices
Produit scalaire dans l'espace et applications	Niveau examen	5

Exercice 1 — 10 pts

Problème : Un tétraèdre, son plan de base et une sphère

Problème guidé, de la taille d'un exercice de devoir surveillé de 1BAC SM. Barème indicatif sur 10 points, donné à titre d'estimation.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(3,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,3)$ et $D(4,1,3)$, et le vecteur $\vec{n}(2,1,2)$.



Les points A, B, C sur les trois axes, le triangle ABC et le point D hors de son plan.

1. — 1 pts

Montre que les points A, B et C ne sont pas alignés.

INDICE

Commence par les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$. Pour l'alignement, cherche si l'un des vecteurs est un multiple de l'autre.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{AB}(-3,6,0)$ et $\overrightarrow{AC}(-3,0,3)$; le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est pas nul.

Si l'on avait $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ pour un réel λ, la deuxième coordonnée donnerait $0 = 6\lambda$, donc $\lambda = 0$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, ce qui est faux. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. 1 pts

Montre que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

INDICE

Il suffit de deux produits scalaires nuls avec deux vecteurs de direction non colinéaires du plan.

CORRIGÉ

Deux produits scalaires. D'après l'expression analytique du produit scalaire (repère orthonormé) :

$$\begin{aligned}&\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}\\&= 2 \times (-3) + 1 \times 6 + 2 \times 0\\&= -6 + 6 + 0 = 0,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}&\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}\\&= 2 \times (-3) + 1 \times 0 + 2 \times 3\\&= -6 + 0 + 6 = 0.\end{aligned}$$

Hypothèses. Le vecteur $\vec{n}$ est non nul, et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de direction non colinéaires de (ABC) (question 1).

Conclusion. D'après la propriété « vecteur normal et deux vecteurs de direction », $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. 1,5 pts

En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

Traduis $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, puis développe. Contrôle avec B et C.

CORRIGÉ

Équation. D'après le théorème « plan, point et vecteur normal », un point $M(x, y, z)$ appartient à (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Avec $\overrightarrow{AM}(x - 3, y, z)$, cela s'écrit $2(x - 3) + y + 2z = 0$.

Donc (ABC) : $2x + y + 2z - 6 = 0$.

Contrôle. Pour B : $2 \times 0 + 6 + 2 \times 0 - 6 = 0$. Pour C : $2 \times 0 + 0 + 2 \times 3 - 6 = 0$.

Conclusion. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x + y + 2z - 6 = 0$.

4. 1 pts

Calcule la distance du point D au plan (ABC).

INDICE

Formule de la distance à un plan, avec la norme de $\vec{n}$ au dénominateur.

CORRIGÉ

D'après la formule de la distance à un plan (repère orthonormé) :

$$\begin{aligned} & d(D,(ABC)) \\ &= \frac{|2\times 4+1+2\times 3-6|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} \\ &= \frac{9}{3}=3. \end{aligned}$$

Conclusion. La distance du point D au plan (ABC) vaut 3.

5. 2 pts

Soit Δ la droite qui passe par D et qui est orthogonale au plan (ABC). Donne une représentation paramétrique de Δ, puis détermine le projeté orthogonal H de D sur (ABC).

INDICE

La droite Δ est dirigée par $\vec{n}$. Le point H est l'intersection de Δ et du plan : remplace dans l'équation de (ABC).

CORRIGÉ

La droite Δ. D'après le théorème de la droite orthogonale, Δ est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}$; elle passe par $D(4,1,3)$:

$$\begin{cases} x=4+2t \\ y=1+t \\ z=3+2t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Intersection avec le plan. Pour le point de Δ de paramètre t, le premier membre de l'équation de (ABC) vaut :

$$\begin{aligned} & 2(4+2t)+(1+t) \\ & \quad +2(3+2t)-6 \\ &= 9t+9. \end{aligned}$$

Ce point est dans (ABC) si et seulement si $9t+9=0$, donc $t_0=-1$.

Le projeté. D'après la propriété du projeté orthogonal, H est le point de Δ de paramètre $t_0=-1$: $H(2,0,1)$. Contrôle : $2\times 2+0+2\times 1-6=0$.

Conclusion. Le projeté orthogonal de D sur (ABC) est $H(2,0,1)$.

6. 2 pts

Soit S la sphère de centre D et de rayon 5. Montre que S coupe le plan (ABC) suivant un cercle dont tu préciseras le centre et le rayon.

INDICE

Compare la distance trouvée à la question 4 avec le rayon. Le centre du cercle a été calculé à la question 5.

CORRIGÉ

On a $h = d(D,(ABC)) = 3 < 5$: la distance du centre au plan est inférieure au rayon.

D'après le théorème « sphère et plan », S coupe (ABC) suivant un cercle. Son centre est le projeté orthogonal $H(2,0,1)$ de D (question 5), et son rayon vaut :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{16} = 4. \end{aligned}$$

Conclusion. La sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle de centre $H(2,0,1)$ et de rayon 4.

7. 1,5 pts

Montre que le point $E(7,1,7)$ appartient à S, puis écris une équation du plan tangent à S en E.

INDICE

Calcule DE. Le plan tangent en E admet $\overrightarrow{DE}$ pour vecteur normal.

CORRIGÉ

Le point E. On a $\overrightarrow{DE}(3,0,4)$, donc :

$$\begin{aligned} DE &= \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

La distance DE est égale au rayon : $E \in S$.

Plan tangent. D'après la propriété du plan tangent, ce plan est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$, soit $3(x-7) + 4(z-7) = 0$.

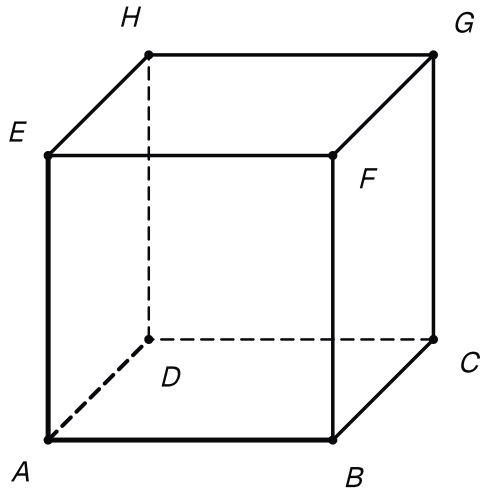
Conclusion. Le point E appartient à S, et le plan tangent à S en E a pour équation $3x + 4z - 49 = 0$.

Exercice 2 10 pts

Problème : Une diagonale du cube et deux plans parallèles

Ce problème guidé correspond à un exercice de devoir surveillé de 1BAC SM. Les points indiqués, 10 au total, sont une estimation.

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 : faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$. Une figure à main levée t'aidera, sans jamais servir de preuve. On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Le cube d'arête 1 et le repère (A, AB, AD, AE), porté par les trois arêtes issues de A.

1. 1 pts

Justifie que ce repère est orthonormé, et donne les coordonnées des huit sommets du cube.

INDICE

Les arêtes mesurent 1 et sont deux à deux orthogonales. Pour les coordonnées, décompose chaque vecteur $\overrightarrow{AX}$ sur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, par exemple $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

CORRIGÉ

Repère. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ont pour norme 1, car les arêtes mesurent 1, et ils sont deux à deux orthogonaux, car les faces sont des carrés. D'après la définition, le repère est orthonormé.

Coordonnées. On décompose chaque vecteur $\overrightarrow{AX}$ sur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, par exemple $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

Conclusion. Le repère est orthonormé, et l'on a $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $H(0,1,1)$ et $G(1,1,1)$.

2. 1,5 pts

Montre que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).

INDICE

Calcule $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$, vérifie qu'ils ne sont pas colinéaires, puis calcule deux produits scalaires.

CORRIGÉ

Vecteurs de direction. On a $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$, $\overrightarrow{BD}(-1,1,0)$ et $\overrightarrow{BE}(-1,0,1)$. Si l'on avait $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BD}$, la troisième coordonnée donnerait $1=\lambda\times 0=0$, ce qui est faux : $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires.

Produits scalaires. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}\\&=1\times(-1)+1\times 1+1\times 0\\&=-1+1+0=0,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}\\&=1\times(-1)+1\times 0+1\times 1\\&=-1+0+1=0.\end{aligned}$$

Conclusion. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$, non nul, est orthogonal à deux vecteurs de direction non colinéaires de (BDE) : d'après la propriété « vecteur normal et deux vecteurs de direction », il est normal au plan (BDE).

3. 1 pts

En déduire une équation cartésienne du plan (BDE).

INDICE

Un point et un vecteur normal suffisent : prends le point B.

CORRIGÉ

D'après le théorème « plan, point et vecteur normal », un point $M(x,y,z)$ appartient à (BDE) si et seulement si $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AG}=0$, soit $(x-1)+y+z=0$.

Donc (BDE) : $x+y+z-1=0$.

Contrôle. Pour D : $0+1+0-1=0$. Pour E : $0+0+1-1=0$.

Conclusion. Une équation cartésienne du plan (BDE) est $x+y+z-1=0$.

4. 1,5 pts

Montre que le plan (CFH) a pour équation $x+y+z-2=0$, puis qu'il est parallèle au plan (BDE).

INDICE

Vérifie d'abord que C, F, H ne sont pas alignés et satisfont l'équation. Compare ensuite les vecteurs normaux des deux plans.

CORRIGÉ

Les points ne sont pas alignés. On a $\overrightarrow{CF}(0,-1,1)$ et $\overrightarrow{CH}(-1,0,1)$. Si l'on avait $\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CH}$, la première coordonnée donnerait $0=-\lambda$, donc $\lambda=0$ et $\overrightarrow{CF}=\vec{0}$, ce qui est faux. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : les points C, F, H ne sont pas alignés.

Ils vérifient l'équation. On a $1+1+0-2=0$, $1+0+1-2=0$ et $0+1+1-2=0$.

Équation de (CFH). Comme $(1,1,1)\neq(0,0,0)$, l'équation $x+y+z-2=0$ définit un plan (chapitre précédent). Ce plan contient les trois points non alignés C, F, H : c'est le plan (CFH).

Parallélisme. Les deux plans admettent $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$ pour vecteur normal. D'après la propriété des plans parallèles, (CFH) et (BDE) sont parallèles.

Conclusion. Le plan (CFH) a pour équation $x+y+z-2=0$, et il est parallèle au plan (BDE).

5. 1,5 pts

La droite (AG) coupe le plan (BDE) en I. Détermine les coordonnées de I, puis vérifie que $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}=\vec{0}$.

INDICE

La droite (AG) passe par A et est dirigée par $\overrightarrow{AG}$: ses points sont (t,t,t). Remplace dans l'équation de (BDE).

CORRIGÉ

Le point I. La droite (AG) est dirigée par le vecteur normal $\overrightarrow{AG}$: elle est orthogonale à (BDE), et I est le projeté orthogonal de A sur ce plan. Ses points sont les points (t,t,t), $t\in\mathbb{R}$.

Le point (t,t,t) est dans (BDE) si et seulement si $3t-1=0$, soit $t=\dfrac{1}{3}$. Donc $I\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

La somme vectorielle. La première coordonnée de $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}$ vaut :

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0.$$

Les deux autres s'obtiennent de la même façon, les rôles de B, D, E étant échangés : elles sont nulles aussi.

Conclusion. On a $I\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}=\vec{0}$.

6. 2 pts

La droite (AG) coupe le plan (CFH) en J. Montre que $AI = IJ = JG$.

INDICE

Même calcul qu'à la question précédente avec l'équation de (CFH). Calcule ensuite les trois distances, ou leurs carrés.

CORRIGÉ

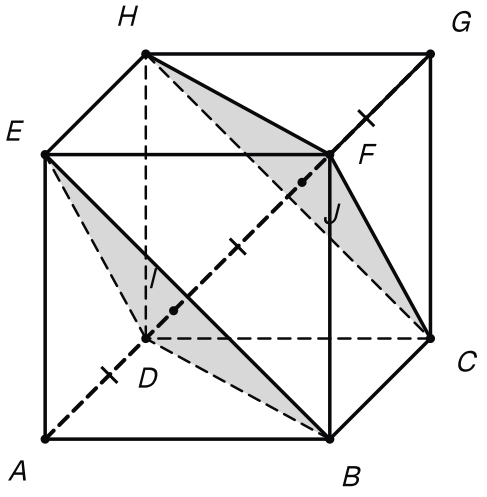
Le point J. Le point (t, t, t) de (AG) est dans (CFH) si et seulement si $3t - 2 = 0$, soit $t = \dfrac{2}{3}$. Donc $J\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

Trois vecteurs égaux. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JG}$ ont tous trois pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Longueurs. D'après la formule de la norme (repère orthonormé) :

$$AI = IJ = JG = \sqrt{3 \times \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Conclusion. On a $AI = IJ = JG = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$: les deux plans partagent la diagonale $[AG]$ en trois segments égaux.



Les plans (BDE) et (CFH) coupent la diagonale [AG] en I et J : AI = IJ = JG.

7. 1,5 pts

Calcule $d(A,(BDE))$, puis écris une équation de la sphère de centre A tangente au plan (BDE).

INDICE

Formule de la distance, ou distance AI. Une sphère est tangente à un plan quand son rayon est la distance du centre au plan.

CORRIGÉ

Distance. Le vecteur normal $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$ a pour norme $\sqrt{3}$. D'après la formule de la distance à un plan :

$$d(A,(BDE)) = \frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

C'est bien la distance AI de la question 6.

Sphère tangente. D'après le théorème « sphère et plan », la sphère de centre A et de rayon $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ est tangente à (BDE), au point I. Le carré du rayon vaut $\dfrac{1}{3}$.

Conclusion. On a $d(A,(BDE)) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, et la sphère de centre A tangente à (BDE) a pour équation $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 3 — 10 pts

Problème : Une sphère, une droite et des plans parallèles

Exercice de devoir surveillé (1BAC SM), guidé pas à pas. Barème sur 10 : chaque question porte un nombre de points indicatif.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On admet que S est la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$. On donne le point $A(3,1,0)$ et la droite D de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1+3t \\ z = t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

1. — 1,5 pts

Détermine le centre Ω et le rayon R de la sphère S.

INDICE

Complète les carrés en x et en z ; le terme en y est déjà un carré.

CORRIGÉ

Complétion des carrés. On a :

$$\begin{aligned} x^2-2x &= (x-1)^2-1,\\ z^2+4z &= (z+2)^2-4. \end{aligned}$$

L'équation devient $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2-9=0$, soit :

$$\begin{aligned} &(x-1)^2+y^2\\ &\quad+(z+2)^2=9. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après l'équation cartésienne d'une sphère, S a pour centre $\Omega(1,0,-2)$ et pour rayon $R=3$.

2. — 1 pts

Montre que le point A appartient à S.

INDICE

Calcule ΩA et compare au rayon.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{\Omega A}(2,1,2)$, donc, dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned} \Omega A &= \sqrt{2^2+1^2+2^2}\\ &= \sqrt{9}=3=R. \end{aligned}$$

Conclusion. La distance ΩA est égale au rayon : le point A appartient à S.

3. 1,5 pts

Écris une équation du plan T tangent à S en A.

INDICE

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ est normal au plan tangent en A.

CORRIGÉ

D'après la propriété du plan tangent, T est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$. Dans le repère orthonormé, cela s'écrit $2(x-3) + (y-1) + 2z = 0$.

Conclusion. Le plan tangent à S en A a pour équation T : $2x + y + 2z - 7 = 0$.

4. 2 pts

Détermine les points communs à la droite D et à la sphère S.

INDICE

Remplace la représentation de D dans l'équation réduite de S, puis réduis : tu obtiens une équation en t.

CORRIGÉ

Équation en t. Le point de D de paramètre t a pour coordonnées $(3, 1+3t, t)$. Il est sur S si et seulement si :

$$\begin{aligned} &2^2 + (1+3t)^2 \\ &\quad + (2+t)^2 = 9. \end{aligned}$$

En développant, $4 + 1 + 6t + 9t^2 + 4 + 4t + t^2 = 9$, soit :

$$10t^2 + 10t = 0.$$

Résolution. On factorise : $10t(t+1) = 0$, donc $t = 0$ ou $t = -1$.

Conclusion. D'après le théorème « sphère et droite », D coupe S en deux points : A (pour $t = 0$) et $B(3, -2, -1)$ (pour $t = -1$).

5. 1,5 pts

Pour tout réel m, on note P_m le plan d'équation $2x + y + 2z + m = 0$. Détermine les valeurs de m pour lesquelles P_m est tangent à S.

INDICE

Calcule $d(\Omega, P_m)$ en fonction de m : la valeur absolue reste au numérateur. Écris ensuite que cette distance vaut R.

CORRIGÉ

Distance. D'après la formule de la distance à un plan, le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} &|2 \times 1 + 0 + 2 \times (-2) + m| \\ &= |m - 2|, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} &d(\Omega, P_m) \\ &= \frac{|m-2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|m-2|}{3}. \end{aligned}$$

Tangence. Le plan P_m est tangent à S si et seulement si $d(\Omega, P_m) = 3$, c'est-à-dire $|m - 2| = 9$. Donc $m - 2 = 9$ ou $m - 2 = -9$, soit $m = 11$ ou $m = -7$. Pour $m = -7$, on retrouve le plan T.

Point de contact pour $m = 11$. C'est le projeté orthogonal de Ω sur P_{11} (position relative d'une sphère et d'un plan). Le point $(1 + 2t, t, -2 + 2t)$ de la droite passant par Ω et dirigée par $(2, 1, 2)$ est dans P_{11} si et seulement si $9t + 9 = 0$, soit $t_0 = -1$.

Conclusion. Le plan P_m est tangent à S pour $m = 11$ et pour $m = -7$; pour $m = 11$, le point de contact est $(-1, -1, -4)$.

6. 1,5 pts

Détermine les valeurs de m pour lesquelles P_m coupe S suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.

INDICE

Le rayon du cercle vaut $\sqrt{R^2 - h^2}$, avec $h = d(\Omega, P_m)$. Traduis $r^2 = 5$ par une condition sur h, puis sur m.

CORRIGÉ

On note $h = d(\Omega, P_m) = \dfrac{|m-2|}{3}$. D'après le théorème « sphère et plan », P_m coupe S suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$ si et seulement si $h < 3$ et $9 - h^2 = 5$.

La condition $9 - h^2 = 5$ donne $h^2 = 4$, soit $h = 2$, valeur bien inférieure à 3. Elle s'écrit $|m - 2| = 6$, donc $m = 8$ ou $m = -4$.

Conclusion. Le plan P_m coupe S suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$ pour $m = 8$ et pour $m = -4$.

7. 1 pts

Pour $m = -4$, détermine le centre du cercle d'intersection.

INDICE

Le centre est le projeté orthogonal de Ω sur P_{-4} : droite passant par Ω dirigée par $(2, 1, 2)$, puis substitution.

CORRIGÉ

D'après le théorème « sphère et plan », le centre du cercle est le projeté orthogonal H de Ω sur P_{-4}.

Les points de la droite passant par Ω et dirigée par $\vec{n}(2, 1, 2)$ sont les points $(1 + 2t, t, -2 + 2t), t \in \mathbb{R}$.
En remplaçant dans l'équation de P_{-4}, on obtient $9t - 6 = 0$, donc $t_0 = \dfrac{2}{3}$ et $H\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$.

Conclusion. Pour $m = -4$, le cercle d'intersection a pour centre $H\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$.

Exercice 4 10 pts

Problème : Un triangle rectangle isocèle, deux plans perpendiculaires et une sphère

Problème guidé de devoir surveillé de 1BAC SM, noté sur 10 points ; le barème de chaque question est indicatif.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points $A(1,-1,0)$, $B(2,1,2)$, $C(4,2,0)$ et $D(4,-1,3)$. Une figure à main levée t'aidera à suivre la configuration, sans jamais servir de preuve.

1. 1 pts

Calcule les longueurs AB et AC, puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

INDICE

Dans le repère orthonormé, utilise la formule de la norme et l'expression analytique. Pour l'angle, écris $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$.

CORRIGÉ

Longueurs. On a $\overrightarrow{AB}(1,2,2)$ et $\overrightarrow{AC}(3,3,0)$. Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} AB&=\sqrt{1^2+2^2+2^2}\\ &=\sqrt{9}=3,\\ AC&=\sqrt{3^2+3^2+0^2}\\ &=\sqrt{18}=3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Produit scalaire. D'après l'expression analytique :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &=1\times3+2\times3+2\times0\\ &=3+6+0=9. \end{aligned}$$

Angle. Les deux vecteurs sont non nuls. D'après l'expression du produit scalaire par le cosinus, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$, donc :

$$\begin{aligned} \cos\widehat{BAC}&=\frac{9}{3\times3\sqrt{2}}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Comme $\widehat{BAC}$ appartient à $[0,\pi]$, on obtient $\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{4}$.

Conclusion. $AB=3$, $AC=3\sqrt{2}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9$, et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $\dfrac{\pi}{4}$.

2. 1,5 pts

Montre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B. Retrouve ensuite $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ par les seules longueurs.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et la longueur BC. Pour la seconde partie, emploie l'expression $\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$.

CORRIGÉ

Angle droit en B. On a $\overrightarrow{BA}(-1,-2,-2)$ et $\overrightarrow{BC}(2,1,-2)$. Dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=(-1)\times 2+(-2)\times 1\\&\quad+(-2)\times(-2)\\&=-2-2+4=0.\end{aligned}$$

Les droites (BA) et (BC) sont donc perpendiculaires en B.

Côtés égaux. On a :

$$\begin{aligned}BC&=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\\&=\sqrt{9}=3=BA.\end{aligned}$$

Par les longueurs. D'après l'expression du produit scalaire par les normes :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)\\&=\frac{1}{2}(9+18-9)=9.\end{aligned}$$

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B, et l'on retrouve $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9$, comme à la question 1.

3. 1,5 pts

Calcule $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$. En déduire que $\overrightarrow{BD}$ est un vecteur normal au plan (ABC), puis une équation cartésienne de ce plan.

INDICE

Calcule les deux produits scalaires par l'expression analytique. Pour conclure, vérifie à l'aide de la question 2 que $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs de direction non colinéaires du plan (ABC).

CORRIGÉ

Produits scalaires. On a $\overrightarrow{BD}(2,-2,1)$, $\overrightarrow{BA}(-1,-2,-2)$ et $\overrightarrow{BC}(2,1,-2)$. Dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}\\&=2\times(-1)+(-2)\times(-2)\\&\quad+1\times(-2)\\&=-2+4-2=0,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=2\times2+(-2)\times1\\&\quad+1\times(-2)\\&=4-2-2=0.\end{aligned}$$

Vecteurs de direction. D'après la question 2, les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont non nuls et orthogonaux. Si l'on avait $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}$, on obtiendrait $0=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda BA^2=9\lambda$, donc $\lambda=0$ et $\overrightarrow{BC}=\vec{0}$, ce qui est faux. Les points A, B, C ne sont donc pas alignés, et $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs de direction non colinéaires du plan (ABC).

Vecteur normal. Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est non nul et orthogonal à ces deux vecteurs. D'après la propriété « vecteur normal et deux vecteurs de direction », $\overrightarrow{BD}$ est normal à (ABC). Dans la suite, on note $\vec{n}=\overrightarrow{BD}$, soit $\vec{n}(2,-2,1)$.

Équation. D'après le théorème « plan, point et vecteur normal », $M(x,y,z)\in(ABC)$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=0$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}\\&=2(x-2)-2(y-1)\\&\quad+(z-2)\\&=2x-2y+z-4.\end{aligned}$$

Contrôle : $2\times1-2\times(-1)+0-4=0$ pour A, et $2\times4-2\times2+0-4=0$ pour C.

Conclusion. Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est normal au plan (ABC), et (ABC) : $2x-2y+z-4=0$.

4. 1,5 pts

En déduire que B est le projeté orthogonal de D sur (ABC), puis calcule $d(D,(ABC))$ de deux façons.

INDICE

Le projeté orthogonal de D est l'unique point H du plan tel que $\overrightarrow{DH}$ soit colinéaire à un vecteur normal. Calcule ensuite la longueur DB, puis applique la formule de la distance à un plan.

CORRIGÉ

Le projeté. Le point B appartient à (ABC), et $\overrightarrow{DB} = -\vec{n}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$ de la question 3. D'après la propriété du projeté orthogonal, B est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

Première façon. La distance de D au plan est la distance de D à son projeté orthogonal, et $DB = BD = \|\vec{n}\|$:

$$\begin{aligned} DB &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Seconde façon. D'après la formule de la distance à un plan, le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} &|2 \times 4 - 2 \times (-1) + 3 - 4| \\ &= 9, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} &d(D,(ABC)) \\ &= \frac{9}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. Le point B est le projeté orthogonal de D sur (ABC), et $d(D,(ABC)) = 3$.

5. 1,5 pts

Soit Q le plan qui passe par B et admet $\overrightarrow{BC}$ pour vecteur normal. Écris une équation cartésienne de Q, montre que Q contient les points A et D, puis que les plans Q et (ABC) sont perpendiculaires.

INDICE

Traduis $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. Pour la perpendicularité, calcule le produit scalaire des deux vecteurs normaux.

CORRIGÉ

Équation de Q. D'après le théorème « plan, point et vecteur normal », $M\in Q$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=2(x-2)+(y-1)\\&\quad-2(z-2)\\&=2x+y-2z-1.\end{aligned}$$

Donc Q : $2x+y-2z-1=0$.

Les points A et D. Ils vérifient cette équation : $2\times1+(-1)-2\times0-1=0$ et $2\times4+(-1)-2\times3-1=0$.

Perpendicularité. Les vecteurs normaux $\vec{n}(2,-2,1)$ de (ABC) et $\overrightarrow{BC}(2,1,-2)$ de Q vérifient, dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned}&\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=2\times2+(-2)\times1\\&\quad+1\times(-2)\\&=4-2-2=0.\end{aligned}$$

Conclusion. Le plan Q contient A et D, et d'après le critère des plans perpendiculaires, les plans Q et (ABC) sont perpendiculaires.

6. 1,5 pts

Soit Σ la sphère de diamètre $[AD]$. Détermine son centre I et son rayon. En déduire, à l'aide de la question 3, que B appartient à Σ, puis montre que C ne lui appartient pas.

INDICE

Le centre est le milieu de $[AD]$. Pour un point M, la caractérisation de la sphère de diamètre $[AD]$ ramène la question au calcul de $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MD}$; pour le point B, ce produit scalaire figure déjà à la question 3.

CORRIGÉ

Centre et rayon. D'après la définition de la sphère de diamètre $[AD]$, son centre est le milieu $I\left(\frac{5}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$ de $[AD]$. On a $\overrightarrow{AD}(3,0,3)$, et :

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{3^2+0^2+3^2} \\ &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \end{aligned}$$

donc le rayon vaut $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Le point B. D'après la caractérisation de la sphère de diamètre $[AD]$, un point M appartient à Σ si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MD}=0$. D'après la question 3, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}=0$, donc $B\in\Sigma$.

Le point C. Avec $\overrightarrow{CA}(-3,-3,0)$ et $\overrightarrow{CD}(0,-3,3)$:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD} \\ &= (-3)\times 0 + (-3)\times(-3) \\ &\quad + 0\times 3 \\ &= 0+9+0 = 9. \end{aligned}$$

Ce produit scalaire n'est pas nul, donc $C\notin\Sigma$.

Conclusion. La sphère Σ a pour centre $I\left(\frac{5}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$ et pour rayon $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; elle contient B mais pas C.

7. 1,5 pts

Montre que la sphère Σ coupe le plan (ABC) suivant un cercle dont tu préciseras le centre K et le rayon. Montre que ce cercle est le cercle de diamètre $[AB]$ du plan (ABC).

INDICE

Calcule $h = d(I, (ABC))$ et compare-la au rayon de Σ. Le centre K est le projeté orthogonal de I sur (ABC) : prends la droite qui passe par I et qui est dirigée par $\vec{n} = \overrightarrow{BD}$.

CORRIGÉ

Distance du centre au plan. Le premier membre de l'équation de (ABC) vaut, au point I :

$$\begin{aligned} &2 \times \frac{5}{2} - 2 \times (-1) + \frac{3}{2} - 4 \\ &= 5 + 2 + \frac{3}{2} - 4 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Avec $\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$, la formule de la distance à un plan donne :

$$\begin{aligned} h &= d(I, (ABC)) \\ &= \frac{\left|\frac{9}{2}\right|}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Nature de l'intersection. On a $h^2 = \frac{9}{4} < \frac{9}{2} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$: h est strictement inférieur au rayon de Σ.

D'après le théorème « sphère et plan », Σ coupe (ABC) suivant le cercle de centre K, projeté orthogonal de I, et de rayon :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Centre K. Les points $\left(\frac{5}{2} + 2t, -1 - 2t, \frac{3}{2} + t\right)$ de la droite passant par I et dirigée par $\vec{n}$ sont dans (ABC) si et seulement si $9t + \frac{9}{2} = 0$, soit $t_0 = -\frac{1}{2}$. Donc $K\left(\frac{3}{2}, 0, 1\right)$.

Cercle de diamètre $[AB]$. Le milieu de $[AB]$ est $\left(\frac{3}{2}, 0, 1\right)$, c'est-à-dire K, et $\frac{AB}{2} = \frac{3}{2} = r$.

Conclusion. La sphère Σ coupe (ABC) suivant le cercle de centre $K\left(\frac{3}{2}, 0, 1\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$: c'est le cercle de diamètre $[AB]$ du plan (ABC).

Exercice 5 — 10 pts

Problème : Des droites issues d'un point extérieur et tangentes à une sphère

Énoncé guidé au niveau d'un devoir surveillé de 1BAC SM : 10 points au total, répartis par estimation entre les questions.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note S la sphère de centre $\Omega(-1, 2, 1)$ et de rayon 3, et l'on donne le point $A(4, 2, 1)$. Pour tout réel m, on note D_m la droite qui passe par A et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}_m(-4, m, 0)$.

1. — 1 pts

Écris une équation cartésienne de S. Calcule ΩA : le point A appartient-il à S ?

INDICE

Le centre et le rayon sont donnés : l'équation se lit directement. Compare ensuite ΩA au rayon.

CORRIGÉ

Équation. D'après l'équation cartésienne d'une sphère (repère orthonormé), de centre $\Omega(-1, 2, 1)$ et de rayon 3 :

$$S : (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9.$$

Position de A. On a $\overrightarrow{\Omega A}(5, 0, 0)$, donc :

$$\Omega A = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Conclusion. Comme $\Omega A = 5 \neq 3$, le point A n'appartient pas à S ; il est même extérieur à S, puisque $5 > 3$.

2. 1,5 pts

Écris une représentation paramétrique de D_m. Montre que le point de D_m de paramètre t appartient à S si et seulement si $(16+m^2)t^2-40t+16=0$.

INDICE

Remplace x, y, z dans l'équation de S obtenue à la question 1, puis développe et regroupe selon les puissances de t.

CORRIGÉ

Représentation. Le vecteur $\vec{u}_m$ est non nul, car sa première coordonnée vaut -4. La droite D_m passe par $A(4,2,1)$ et est dirigée par $\vec{u}_m$:

$$\begin{cases} x = 4-4t \\ y = 2+mt \\ z = 1 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

Équation en t. Pour ce point, $x+1=5-4t$, $y-2=mt$ et $z-1=0$. Il appartient à S si et seulement si $(5-4t)^2+(mt)^2+0^2=9$, c'est-à-dire :

$$25-40t+16t^2+m^2t^2=9.$$

En regroupant selon les puissances de t, cette équation équivaut à :

$$(16+m^2)t^2-40t+16=0.$$

Conclusion. Le point de D_m de paramètre t appartient à S si et seulement si $(16+m^2)t^2-40t+16=0$.

3. 1,5 pts

Détermine, selon les valeurs du réel m, le nombre de points communs à la droite D_m et à la sphère S.

INDICE

Le coefficient de t^2 ne s'annule jamais : l'équation est du second degré. Étudie le signe de son discriminant en fonction de m.

CORRIGÉ

Discriminant. Comme $16 + m^2 > 0$, l'équation de la question 2 est du second degré. Son discriminant vaut :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-40)^2 \\ &\quad - 4 \times (16 + m^2) \times 16 \\ &= 1600 - 1024 - 64m^2 \\ &= 64(9 - m^2).\end{aligned}$$

Signe. Le signe de Δ est celui de $9 - m^2 = (3 - m)(3 + m)$. D'après le théorème « sphère et droite » :

- si $-3 < m < 3$, alors $\Delta > 0$ et D_m coupe S en deux points ;
- si $m = 3$ ou $m = -3$, alors $\Delta = 0$ et D_m est tangente à S ;
- si $m < -3$ ou $m > 3$, alors $\Delta < 0$: D_m et S n'ont aucun point commun.

Conclusion. La droite D_m a deux points communs avec S pour $-3 < m < 3$, un seul pour $m = \pm 3$, et aucun sinon.

4. 1,5 pts

On note T le point de contact de D_3 avec S, et T' celui de D_{-3} avec S. Détermine leurs coordonnées, puis montre que $AT = AT' = 4$.

INDICE

Pour $m = 3$ et pour $m = -3$, l'équation en t a une seule solution. Reporte-la dans la représentation paramétrique.

CORRIGÉ

Le paramètre. Pour $m = 3$ comme pour $m = -3$, on a $m^2 = 9$, et l'équation s'écrit $25t^2 - 40t + 16 = 0$, soit $(5t - 4)^2 = 0$. Sa seule solution est $t = \dfrac{4}{5}$.

Les points de contact. On reporte $t = \dfrac{4}{5}$ dans la représentation paramétrique : $T\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{22}{5}, 1\right)$ pour $m = 3$, et $T'\left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{2}{5}, 1\right)$ pour $m = -3$.

Les distances. On a $\overrightarrow{AT}\left(-\dfrac{16}{5}, \dfrac{12}{5}, 0\right)$ et $\overrightarrow{AT'}\left(-\dfrac{16}{5}, -\dfrac{12}{5}, 0\right)$, donc, dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned} AT = AT' &= \sqrt{\frac{256}{25} + \frac{144}{25}} \\ &= \sqrt{16} = 4. \end{aligned}$$

Conclusion. Les points de contact sont $T\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{22}{5}, 1\right)$ et $T'\left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{2}{5}, 1\right)$, et $AT = AT' = 4$.

5. 1,5 pts

Écris une représentation paramétrique de S. Soit θ_0 un réel tel que $\cos\theta_0 = \dfrac{3}{5}$ et $\sin\theta_0 = \dfrac{4}{5}$. Montre que T est le point de S de paramètres $\theta = \theta_0$ et $\varphi = 0$, puis donne des paramètres du point T'.

INDICE

Pour $\varphi = 0$, on a $\cos\varphi = 1$ et $\sin\varphi = 0$. Pour T', cherche un réel de même cosinus que θ_0 et de sinus opposé.

CORRIGÉ

Représentation de S. D'après le théorème de la représentation paramétrique d'une sphère (repère orthonormé), S est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :

$$\begin{cases} x = -1 + 3\cos\varphi\cos\theta \\ y = 2 + 3\cos\varphi\sin\theta \\ z = 1 + 3\sin\varphi \end{cases}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Le point T. Un tel réel θ_0 existe, car $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 1$. Pour $\theta = \theta_0$ et $\varphi = 0$, on a $\cos\varphi = 1$ et $\sin\varphi = 0$, d'où :

$$x = -1 + 3 \times \frac{3}{5} = \frac{4}{5},$$
$$y = 2 + 3 \times \frac{4}{5} = \frac{22}{5},$$

et $z = 1$: c'est le point T.

Le point T'. Comme $\cos(-\theta_0) = \dfrac{3}{5}$ et $\sin(-\theta_0) = -\dfrac{4}{5}$, les paramètres $\theta = -\theta_0$ et $\varphi = 0$ donnent $x = \dfrac{4}{5}$, $y = 2 - \dfrac{12}{5} = -\dfrac{2}{5}$ et $z = 1$: c'est le point T'.

Conclusion. Le point T a pour paramètres $(\theta_0, 0)$, et le point T' a pour paramètres $(-\theta_0, 0)$.

6. 1,5 pts

Soit Q le plan d'équation $5x - 4 = 0$. Montre que la droite (ΩA) est orthogonale à Q, puis que Q coupe S suivant un cercle Γ dont tu préciseras le centre K et le rayon. Vérifie que T et T' appartiennent à Γ.

INDICE

Un vecteur normal de Q se lit sur son équation. Calcule ensuite $h = d(\Omega, Q)$, puis le projeté orthogonal de Ω sur Q.

CORRIGÉ

Orthogonalité. Le plan Q admet $\vec{n}(5, 0, 0)$ pour vecteur normal, et $\overrightarrow{\Omega A} = \vec{n}$. D'après le critère de la droite orthogonale à un plan, (ΩA) est orthogonale à Q.

Distance. D'après la formule de la distance à un plan :

$$\begin{aligned} h &= d(\Omega, Q) \\ &= \frac{|5 \times (-1) - 4|}{\sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

Rayon. Comme $\dfrac{9}{5} < 3$, d'après le théorème « sphère et plan », Q coupe S suivant un cercle Γ de rayon :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{9 - \frac{81}{25}} \\ &= \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Centre. Son centre K est le projeté orthogonal de Ω sur Q. Les points $(-1 + 5t, 2, 1)$ de la droite (ΩA) sont dans Q si et seulement si $25t - 9 = 0$, soit $t_0 = \dfrac{9}{25}$: $K\left(\dfrac{4}{5}, 2, 1\right)$.

Les points T et T'. Ils appartiennent à S et vérifient $5 \times \dfrac{4}{5} - 4 = 0$: ils sont dans Q, donc sur Γ. Contrôle : $\overrightarrow{KT}\left(0, \dfrac{12}{5}, 0\right)$ et $\overrightarrow{KT'}\left(0, -\dfrac{12}{5}, 0\right)$, d'où $KT = KT' = \dfrac{12}{5}$.

Conclusion. Le plan Q coupe S suivant le cercle Γ de centre $K\left(\dfrac{4}{5}, 2, 1\right)$ et de rayon $\dfrac{12}{5}$, qui passe par T et T'.

7. 1,5 pts

Montre que tout point M du cercle Γ vérifie $AM = 4$.

INDICE

Montre d'abord que K est aussi le projeté orthogonal de A sur Q, puis applique la propriété de la distance à un plan au point A et à un point M de Γ.

CORRIGÉ

Projeté de A. Le point K appartient à Q, et $\overrightarrow{AK}\left(-\dfrac{16}{5}, 0, 0\right)$ est colinéaire à $\vec{n}$. D'après la propriété du projeté orthogonal, K est le projeté orthogonal de A sur Q.

Un point de Γ. Soit M un point de Γ : il est dans Q et $KM = \dfrac{12}{5}$. D'après la propriété de la distance à un plan, appliquée au point A et à son projeté K :

$$\begin{aligned} AM^2 &= AK^2 + KM^2 \\ &= \frac{256}{25} + \frac{144}{25} \\ &= \frac{400}{25} = 16. \end{aligned}$$

Conclusion. Tout point M de Γ vérifie $AM = 4$: il est à la même distance de A que les points de contact T et T'.