BURHAN

Produit scalaire dans l'espace et applications : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-scalaire-dans-l-espace/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Produit scalaire dans l'espace et applications	Entraînement	8

Exercice 1

Le plan de trois points et un quatrième point

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1, 0, 1)$, $B(2, 2, 1)$, $C(0, 0, 2)$ et $D(3, 1, 0)$.

1.

Montre que les points A, B et C ne sont pas alignés.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis montre qu'ils ne sont pas colinéaires. Regarde les troisièmes coordonnées : l'une est nulle, l'autre non.

2.

Détermine le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ normal au plan (ABC) dont la première coordonnée vaut 2.

INDICE

D'après la caractérisation par deux vecteurs de direction, il faut $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Écris ces deux équations, puis remplace a par 2.

3.

Déduis-en une équation cartésienne du plan (ABC), puis vérifie-la avec les trois points.

INDICE

Traduis $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ avec l'expression analytique, puis développe. Le contrôle consiste à remplacer les coordonnées de A, B et C.

4.

Montre que D n'appartient pas au plan (ABC), puis calcule la distance $d(D, (ABC))$.

INDICE

Remplace les coordonnées de D dans l'équation : un résultat non nul exclut D du plan. Applique ensuite la formule de la distance, avec la norme de $\vec{n}$.

Exercice 2

Projeté orthogonal et symétrique d'un point

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le plan P : $x + 2y - 2z + 1 = 0$ et le point $M(3, 4, -3)$.

1.

Écris une représentation paramétrique de la droite D qui passe par M et qui est orthogonale à P.

INDICE

Lis un vecteur normal $\vec{n}$ sur l'équation de P : il dirige toute droite orthogonale à P.

2.

Détermine les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur P.

INDICE

Le point H est le point de D qui est dans P. Remplace x, y, z dans l'équation de P : tu obtiens une équation du premier degré en t. Attention au signe devant $2z$.

3.

Calcule $d(M, P)$ de deux façons.

INDICE

Première façon : la formule de la distance à un plan. Seconde façon : $d(M, P) = MH$, avec les coordonnées de $\overrightarrow{MH}$.

4.

Détermine le point M' tel que H soit le milieu de $[MM']$. Vérifie que $d(M', P) = d(M, P)$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{MH}$, coordonnée par coordonnée. Pour la vérification, applique la formule de la distance au point M'.

Exercice 3

Une famille de plans et un plan fixe

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le plan P : $2x + y - z + 3 = 0$ et, pour tout réel m, l'ensemble Q_m des points $M(x, y, z)$ tels que $mx + 2y + (m-1)z + 4 = 0$.

1.

Justifie que, pour tout réel m, Q_m est un plan, et donne un vecteur normal $\vec{n}_m$ à Q_m.

INDICE

Une équation $ax + by + cz + d = 0$ définit un plan dès que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Regarde le coefficient de y.

2.

Détermine le réel m pour lequel les plans P et Q_m sont perpendiculaires.

INDICE

Lis un vecteur normal $\vec{n}$ à P. Les plans sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}_m = 0$: c'est une équation du premier degré en m.

3.

Montre que, pour aucune valeur de m, les plans P et Q_m ne sont parallèles.

INDICE

Raisonne par l'absurde : suppose $\vec{n}_m = k\vec{n}$ pour un réel k. La deuxième coordonnée donne k ; compare ensuite ce que donnent la première et la troisième.

4.

Pour $m = -3$, vérifie que $\vec{n}$ est un vecteur de direction du plan Q_{-3}.

INDICE

Écris l'équation de Q_{-3}. Le critère du chapitre précédent : $\vec{w}(\alpha, \beta, \gamma)$ dirige $ax + by + cz + d = 0$ si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

Exercice 4

Une sphère définie par un diamètre

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1, -2, 3)$ et $B(3, 2, -1)$, et l'on note S la sphère de diamètre $[AB]$.

1.

Détermine le centre I et le rayon R de S, puis une équation de S.

INDICE

Le centre est le milieu de $[AB]$ et le rayon vaut $\dfrac{AB}{2}$. Calcule AB dans le repère orthonormé.

2.

Retrouve une équation de S en traduisant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en fonction de x, y, z, puis l'expression analytique. Développe chaque produit avant de regrouper.

3.

Montre de deux façons que le point $C(4, -1, 3)$ appartient à S.

INDICE

Première façon : calcule IC. Seconde façon : calcule $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Exercice 5

Une sphère tangente à un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le point $\Omega(2, -1, 1)$ et le plan $P : x + 2y + 2z + 7 = 0$.

1.

Calcule $d(\Omega, P)$. Déduis-en une équation de la sphère S de centre Ω tangente à P.

INDICE

Utilise la formule de la distance à un plan. Une sphère est tangente à un plan exactement quand la distance du centre au plan égale le rayon.

2.

Détermine le point de contact H de S et de P.

INDICE

Le point de contact est le projeté orthogonal de Ω sur P. Écris la droite passant par Ω dirigée par le vecteur normal, puis remplace dans l'équation de P.

3.

Montre qu'il existe un second plan P', parallèle à P et tangent à S. Donne son équation et son point de contact.

INDICE

Un plan parallèle à P a une équation $x + 2y + 2z + d = 0$. Écris que sa distance à Ω vaut 3 : une équation avec une valeur absolue, donc deux solutions.

Exercice 6

Le cercle commun à une sphère et un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne la sphère S : $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ et le plan P : $2x + 2y - z + 14 = 0$.

1.

Donne le centre Ω et le rayon R de S, puis calcule $h = d(\Omega, P)$.

INDICE

Lis le centre sur l'équation réduite en surveillant les signes ; le rayon est la racine du second membre. Applique ensuite la formule de la distance.

2.

Justifie que P coupe S suivant un cercle $\mathcal{C}$, puis détermine son centre et son rayon.

INDICE

Compare h et R. Le centre du cercle est le projeté orthogonal de Ω sur P : écris la droite passant par Ω dirigée par le vecteur normal. Le rayon vient du théorème de Pythagore.

3.

Quelle est la position de S et du plan P' : $2x + 2y - z - 22 = 0$?

INDICE

Même méthode : calcule la distance du centre à P' et compare-la au rayon.

Exercice 7

Deux plans tangents en des points opposés

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On admet que S est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, et l'on donne le point $A(3, -1, 2)$.

1.

Détermine le centre Ω et le rayon R de S, puis montre que $A \in S$.

INDICE

Complète les carrés en x et en y ; le terme en z est déjà un carré. Pour A, calcule ΩA.

2.

Détermine une équation du plan T tangent à S en A, et contrôle-la par une distance.

INDICE

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ est normal au plan tangent en A. Traduis $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$. Le contrôle : la distance de Ω à T doit valoir R.

3.

Soit B le point tel que Ω soit le milieu de $[AB]$. Calcule ses coordonnées, puis montre que le plan T' tangent à S en B est parallèle à T.

INDICE

Écris $\overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{\Omega A}$. Compare ensuite les vecteurs normaux des deux plans tangents.

Exercice 8

Une droite tangente à une sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne la sphère S de centre $\Omega(1, 1, 0)$ et de rayon 3, et la droite D de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 4 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.

Montre que D et S ont un seul point commun T, et donne ses coordonnées.

INDICE

Écris l'équation de S, remplace x, y, z par leurs expressions en t, et réduis. Le nombre de points communs se lit sur le discriminant.

2.

Montre que la droite D est orthogonale à la droite (ΩT).

INDICE

Calcule $\overrightarrow{\Omega T}$ et un vecteur directeur de D, puis leur produit scalaire.

3.

Écris une équation du plan tangent à S en T, puis montre que la droite D est contenue dans ce plan.

INDICE

Le plan tangent en T admet $\overrightarrow{\Omega T}$ pour vecteur normal. Pour la droite, remplace la représentation paramétrique dans l'équation : le résultat doit être nul pour tout t.