BURHAN

Produit scalaire dans l'espace et applications : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-scalaire-dans-l-espace/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Produit scalaire dans l'espace et applications	Entraînement	8

Exercice 1

Le plan de trois points et un quatrième point

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points $A(1,0,1)$, $B(2,2,1)$, $C(0,0,2)$ et $D(3,1,0)$.

1.

Montre que les points A, B et C ne sont pas alignés.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis montre qu'ils ne sont pas colinéaires. Regarde les troisièmes coordonnées : l'une est nulle, l'autre non.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{AB}(1,2,0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est pas nul.

Si l'on avait $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ pour un réel λ, la troisième coordonnée donnerait $1=\lambda\times 0=0$, ce qui est faux. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires.

Conclusion. Les points A, B et C ne sont pas alignés : ils définissent un plan (ABC).

2.

Détermine le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ normal au plan (ABC) dont la première coordonnée vaut 2.

INDICE

D'après la caractérisation par deux vecteurs de direction, il faut $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Écris ces deux équations, puis remplace a par 2.

CORRIGÉ

Système. Le vecteur $\vec{n}$ est non nul, et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de direction non colinéaires de (ABC). D'après la propriété « vecteur normal et deux vecteurs de direction », $\vec{n}$ est normal à (ABC) si et seulement si, dans le repère orthonormé :

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=a+2b=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-a+c=0\end{cases}$$

Résolution. Avec $a=2$, la première équation donne $2b=-2$, soit $b=-1$; la seconde donne $c=a=2$.

Conclusion. Le vecteur normal à (ABC) de première coordonnée 2 est $\vec{n}(2,-1,2)$.

3.

Déduis-en une équation cartésienne du plan (ABC), puis vérifie-la avec les trois points.

INDICE

Traduis $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ avec l'expression analytique, puis développe. Le contrôle consiste à remplacer les coordonnées de A, B et C.

CORRIGÉ

Équation. D'après le théorème « plan, point et vecteur normal », un point $M(x, y, z)$ appartient à (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Avec $\overrightarrow{AM}(x-1, y, z-1)$ et l'expression analytique :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\\ &= 2(x-1) - y + 2(z-1)\\ &= 2x - y + 2z - 4.\end{aligned}$$

Donc $(ABC) : 2x - y + 2z - 4 = 0$.

Contrôle. On remplace les coordonnées des trois points :

- pour A : $2 \times 1 - 0 + 2 \times 1 - 4 = 0$;
- pour B : $2 \times 2 - 2 + 2 \times 1 - 4 = 0$;
- pour C : $2 \times 0 - 0 + 2 \times 2 - 4 = 0$.

Conclusion. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 2z - 4 = 0$, et les trois points la vérifient.

4.

Montre que D n'appartient pas au plan (ABC), puis calcule la distance $d(D, (ABC))$.

INDICE

Remplace les coordonnées de D dans l'équation : un résultat non nul exclut D du plan. Applique ensuite la formule de la distance, avec la norme de $\vec{n}$.

CORRIGÉ

Position de D. On a $2 \times 3 - 1 + 2 \times 0 - 4 = 1 \neq 0$, donc $D \notin (ABC)$: les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

Distance. Le repère est orthonormé et :

$$\begin{aligned}\|\vec{n}\| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\\ &= \sqrt{9} = 3.\end{aligned}$$

D'après la formule de la distance à un plan :

$$d(D, (ABC)) = \frac{|1|}{3} = \frac{1}{3}.$$

Conclusion. Le point D n'appartient pas au plan (ABC), et $d(D, (ABC)) = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 2

Projeté orthogonal et symétrique d'un point

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le plan P : $x + 2y - 2z + 1 = 0$ et le point $M(3, 4, -3)$.

1.

Écris une représentation paramétrique de la droite D qui passe par M et qui est orthogonale à P.

INDICE

Lis un vecteur normal $\vec{n}$ sur l'équation de P : il dirige toute droite orthogonale à P.

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé, donc $\vec{n}(1, 2, -2)$ est normal à P. D'après le théorème de la droite orthogonale, D est dirigée par $\vec{n}$; elle passe par $M(3, 4, -3)$.

Conclusion. Une représentation paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2.

Détermine les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur P.

INDICE

Le point H est le point de D qui est dans P. Remplace x, y, z dans l'équation de P : tu obtiens une équation du premier degré en t. Attention au signe devant $2z$.

CORRIGÉ

Équation en t. Le point H est le point de D qui appartient à P. Pour le point de D de paramètre t, le premier membre de l'équation de P vaut :

$$\begin{aligned} &(3 + t) + 2(4 + 2t) \\ &\quad - 2(-3 - 2t) + 1 \\ &= 9t + 18. \end{aligned}$$

Ce point est dans P si et seulement si $9t + 18 = 0$, soit $t_0 = -2$.

Coordonnées de H. D'après la propriété du projeté orthogonal, H est le point de D de paramètre $t_0 = -2$: $H(1, 0, 1)$.

Contrôle. $1 + 2 \times 0 - 2 \times 1 + 1 = 0$, donc $H \in P$.

Conclusion. Le projeté orthogonal de M sur P est $H(1, 0, 1)$.

3.

Calcule $d(M, P)$ de deux façons.

INDICE

Première façon : la formule de la distance à un plan. Seconde façon : $d(M, P) = MH$, avec les coordonnées de $\overrightarrow{MH}$.

CORRIGÉ

Par la formule. D'après la formule de la distance à un plan (repère orthonormé), le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} &|3 + 2 \times 4 - 2 \times (-3) + 1| \\ &= 18, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} &d(M, P) \\ &= \frac{18}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{18}{3} = 6. \end{aligned}$$

Par le projeté. La distance de M à P est la distance MH. On a $\overrightarrow{MH}(-2, -4, 4)$, donc :

$$\begin{aligned} MH &= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{36} = 6. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux méthodes donnent $d(M, P) = 6$.

4.

Détermine le point M' tel que H soit le milieu de $[MM']$. Vérifie que $d(M', P) = d(M, P)$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{MH}$, coordonnée par coordonnée. Pour la vérification, applique la formule de la distance au point M'.

CORRIGÉ

Coordonnées de M'. Le point H est le milieu de $[MM']$ si et seulement si $\overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{MH}$. Avec $\overrightarrow{MH}(-2, -4, 4)$ et $H(1, 0, 1)$, cela donne $x_{M'} - 1 = -2$, $y_{M'} = -4$ et $z_{M'} - 1 = 4$. Donc $M'(-1, -4, 5)$.

Vérification. Pour M', le premier membre de l'équation de P vaut $(-1) + 2 \times (-4) - 2 \times 5 + 1 = -18$. D'après la formule de la distance à un plan :

$$d(M', P) = \frac{|-18|}{3} = 6.$$

Conclusion. Le point cherché est $M'(-1, -4, 5)$, et $d(M', P) = 6 = d(M, P)$.

Exercice 3

Une famille de plans et un plan fixe

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le plan P : $2x + y - z + 3 = 0$ et, pour tout réel m, l'ensemble Q_m des points $M(x, y, z)$ tels que $mx + 2y + (m-1)z + 4 = 0$.

1.

Justifie que, pour tout réel m, Q_m est un plan, et donne un vecteur normal $\vec{n}_m$ à Q_m.

INDICE

Une équation $ax + by + cz + d = 0$ définit un plan dès que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Regarde le coefficient de y.

CORRIGÉ

Pour tout réel m, le coefficient de y vaut $2 \neq 0$, donc $(m, 2, m-1) \neq (0, 0, 0)$. D'après le chapitre précédent, l'équation définit un plan.

Le repère est orthonormé : les coefficients de x, y et z donnent un vecteur normal.

Conclusion. Pour tout réel m, Q_m est un plan, et $\vec{n}_m(m, 2, m-1)$ lui est normal.

2.

Détermine le réel m pour lequel les plans P et Q_m sont perpendiculaires.

INDICE

Lis un vecteur normal $\vec{n}$ à P. Les plans sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}_m = 0$: c'est une équation du premier degré en m.

CORRIGÉ

Le vecteur $\vec{n}(2, 1, -1)$ est normal à P. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned} &\vec{n} \cdot \vec{n}_m \\ &= 2m + 1 \times 2 + (-1)(m-1) \\ &= m + 3. \end{aligned}$$

D'après la propriété des plans perpendiculaires, P et Q_m sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}_m = 0$, c'est-à-dire $m + 3 = 0$.

Conclusion. Les plans P et Q_m sont perpendiculaires pour $m = -3$, et pour cette seule valeur.

3.

Montre que, pour aucune valeur de m, les plans P et Q_m ne sont parallèles.

INDICE

Raisonne par l'absurde : suppose $\vec{n}_m = k\vec{n}$ pour un réel k. La deuxième coordonnée donne k ; compare ensuite ce que donnent la première et la troisième.

CORRIGÉ

Soit m un réel. Supposons par l'absurde que P et Q_m soient parallèles. D'après la propriété des plans parallèles, il existe un réel k tel que $\vec{n}_m = k\vec{n}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} m = 2k \\ 2 = k \\ m - 1 = -k \end{cases}$$

La deuxième égalité donne $k = 2$, puis la première $m = 4$ et la troisième $m = -1$. C'est une contradiction.

Conclusion. Pour aucune valeur de m, les plans P et Q_m ne sont parallèles.

4.

Pour $m = -3$, vérifie que $\vec{n}$ est un vecteur de direction du plan Q_{-3}.

INDICE

Écris l'équation de Q_{-3}. Le critère du chapitre précédent : $\vec{w}(\alpha, \beta, \gamma)$ dirige $ax + by + cz + d = 0$ si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

CORRIGÉ

Pour $m = -3$, on obtient Q_{-3} : $-3x + 2y - 4z + 4 = 0$. Avec $\vec{n}(2, 1, -1)$, on calcule :

$$\begin{aligned} &-3 \times 2 + 2 \times 1 \\ &\quad + (-4) \times (-1) \\ &= -6 + 2 + 4 = 0. \end{aligned}$$

D'après le critère du chapitre précédent, $\vec{n}$ est un vecteur de direction de Q_{-3}.

Conclusion. Le vecteur $\vec{n}$ dirige le plan Q_{-3} : la droite orthogonale à P menée d'un point de Q_{-3} reste dans Q_{-3}.

Exercice 4

Une sphère définie par un diamètre

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1, -2, 3)$ et $B(3, 2, -1)$, et l'on note S la sphère de diamètre $[AB]$.

1.

Détermine le centre I et le rayon R de S, puis une équation de S.

INDICE

Le centre est le milieu de $[AB]$ et le rayon vaut $\dfrac{AB}{2}$. Calcule AB dans le repère orthonormé.

CORRIGÉ

Centre. D'après la définition de la sphère de diamètre $[AB]$, son centre est le milieu $I(2, 0, 1)$ de $[AB]$.

Rayon. On a $\overrightarrow{AB}(2, 4, -4)$, donc, dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{36} = 6, \end{aligned}$$

et $R = \dfrac{AB}{2} = 3$.

Équation. D'après l'équation cartésienne d'une sphère :

$$\begin{aligned} S : (x-2)^2 + y^2 \\ + (z-1)^2 = 9. \end{aligned}$$

Conclusion. La sphère S a pour centre $I(2, 0, 1)$ et pour rayon $R = 3$.

2.

Retrouve une équation de S en traduisant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en fonction de x, y, z, puis l'expression analytique. Développe chaque produit avant de regrouper.

CORRIGÉ

D'après la propriété de la sphère de diamètre $[AB]$, $M(x,y,z) \in S$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Calcul. On a $\overrightarrow{MA}(1-x,-2-y,3-z)$ et $\overrightarrow{MB}(3-x,2-y,-1-z)$. Dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \\
&= (1-x)(3-x) \\
&\quad + (-2-y)(2-y) \\
&\quad + (3-z)(-1-z) \\
&= x^2 - 4x + 3 + y^2 - 4 \\
&\quad + z^2 - 2z - 3 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 \\
&\quad - 4x - 2z - 4.
\end{aligned}$$

Donc S : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z - 4 = 0$.

Comparaison. On développe l'équation de la question 1, après avoir passé 9 dans le premier membre :

$$\begin{aligned}
&(x-2)^2 + y^2 \\
&\quad + (z-1)^2 - 9 \\
&= x^2 - 4x + 4 + y^2 \\
&\quad + z^2 - 2z + 1 - 9 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 \\
&\quad - 4x - 2z - 4.
\end{aligned}$$

On retrouve la même équation.

Conclusion. La condition $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ redonne l'équation de S trouvée à la question 1.

3.

Montre de deux façons que le point $C(4,-1,3)$ appartient à S.

INDICE

Première façon : calcule IC. Seconde façon : calcule $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

CORRIGÉ

Par la distance au centre. On a $\overrightarrow{IC}(2,-1,2)$, donc :

$$\begin{aligned} IC &= \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} \\ &= \sqrt{9} = 3 = R. \end{aligned}$$

Par le produit scalaire. On a $\overrightarrow{CA}(-3,-1,0)$ et $\overrightarrow{CB}(-1,3,-4)$, donc :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} \\ &= (-3)\times(-1)+(-1)\times 3 \\ &\quad +0\times(-4) \\ &= 3-3+0 = 0. \end{aligned}$$

D'après la propriété de la sphère de diamètre $[AB]$, $C\in S$.

Conclusion. Les deux méthodes montrent que le point C appartient à S.

Exercice 5

Une sphère tangente à un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le point $\Omega(2, -1, 1)$ et le plan P : $x + 2y + 2z + 7 = 0$.

1.

Calcule $d(\Omega, P)$. Déduis-en une équation de la sphère S de centre Ω tangente à P.

INDICE

Utilise la formule de la distance à un plan. Une sphère est tangente à un plan exactement quand la distance du centre au plan égale le rayon.

CORRIGÉ

Distance. D'après la formule de la distance à un plan (repère orthonormé), le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} &|2 + 2 \times (-1) + 2 \times 1 + 7| \\ &= 9, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} &d(\Omega, P) \\ &= \frac{9}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \\ &= \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Sphère tangente. D'après le théorème « sphère et plan », le plan P est tangent à la sphère de centre Ω et de rayon R si et seulement si $R = d(\Omega, P) = 3$.

Conclusion. La sphère S de centre Ω tangente à P a pour rayon 3 et pour équation :

$$\begin{aligned} &(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \\ &\quad + (z - 1)^2 = 9. \end{aligned}$$

2.

Détermine le point de contact H de S et de P.

INDICE

Le point de contact est le projeté orthogonal de Ω sur P. Écris la droite passant par Ω dirigée par le vecteur normal, puis remplace dans l'équation de P.

CORRIGÉ

Droite utile. Le point de contact est le projeté orthogonal H de Ω sur P. La droite passant par Ω et dirigée par $\vec{n}(1, 2, 2)$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Substitution. Pour le point de paramètre t, le premier membre de l'équation de P vaut :

$$\begin{aligned} &(2 + t) + 2(-1 + 2t) \\ &\quad + 2(1 + 2t) + 7 \\ &= 9t + 9. \end{aligned}$$

Le point est dans P si et seulement si $9t + 9 = 0$, donc $t_0 = -1$ et $H(1, -3, -1)$.

Contrôle. On a $1 + 2 \times (-3) + 2 \times (-1) + 7 = 0$. De plus $\overrightarrow{H\Omega}(1, 2, 2)$, donc :

$$\begin{aligned} \Omega H &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. Le point de contact de S et de P est $H(1, -3, -1)$.

3.

Montre qu'il existe un second plan P', parallèle à P et tangent à S. Donne son équation et son point de contact.

INDICE

Un plan parallèle à P a une équation $x + 2y + 2z + d = 0$. Écris que sa distance à Ω vaut 3 : une équation avec une valeur absolue, donc deux solutions.

CORRIGÉ

Forme de l'équation. Soit un plan parallèle à P. Un vecteur normal de ce plan est colinéaire à $\vec{n}$ (plans parallèles et vecteurs normaux). Donc $\vec{n}$, non nul, lui est normal (vecteur normal lu sur une équation), et le plan a une équation $x + 2y + 2z + d = 0$.

Condition de tangence. Ce plan est tangent à S si et seulement si sa distance à Ω vaut 3 :

$$\begin{aligned} &\frac{|2 - 2 + 2 + d|}{3} = 3 \\ \iff\ &|2 + d| = 9 \\ \iff\ &d = 7 \text{ ou } d = -11. \end{aligned}$$

La valeur $d = 7$ redonne P ; la valeur $d = -11$ donne un second plan.

Point de contact. Le point de paramètre t de la droite de la question 2 est dans ce plan si et seulement si $9t - 9 = 0$, soit $t_0 = 1$: le point de contact est $H'(3, 1, 3)$.

Conclusion. Le second plan parallèle à P et tangent à S est P' : $x + 2y + 2z - 11 = 0$, de point de contact $H'(3, 1, 3)$.

Exercice 6

Le cercle commun à une sphère et un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne la sphère S : $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ et le plan P : $2x + 2y - z + 14 = 0$.

1.

Donne le centre Ω et le rayon R de S, puis calcule $h = d(\Omega, P)$.

INDICE

Lis le centre sur l'équation réduite en surveillant les signes ; le rayon est la racine du second membre. Applique ensuite la formule de la distance.

CORRIGÉ

Centre et rayon. D'après l'équation cartésienne d'une sphère, $\Omega(1, -2, 3)$ et $R = \sqrt{25} = 5$.

Distance. D'après la formule de la distance à un plan (repère orthonormé), le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} &|2 \times 1 + 2 \times (-2) - 3 + 14| \\ &= 9, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} h &= \frac{9}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. La sphère S a pour centre $\Omega(1, -2, 3)$ et pour rayon 5, et $h = d(\Omega, P) = 3$.

2.

Justifie que P coupe S suivant un cercle $\mathcal{C}$, puis détermine son centre et son rayon.

INDICE

Compare h et R. Le centre du cercle est le projeté orthogonal de Ω sur P : écris la droite passant par Ω dirigée par le vecteur normal. Le rayon vient du théorème de Pythagore.

CORRIGÉ

Nature de l'intersection. Comme $h = 3 < 5 = R$, d'après le théorème « sphère et plan », $P \cap S$ est un cercle $\mathcal{C}$. Son centre est le projeté orthogonal H de Ω sur P, et son rayon est $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Centre. La droite passant par Ω et dirigée par $\vec{n}(2, 2, -1)$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant dans l'équation de P, on obtient $9t + 9 = 0$, donc $t_0 = -1$ et $H(-1, -4, 4)$.

Conclusion. Le plan P coupe S suivant le cercle $\mathcal{C}$ de centre $H(-1, -4, 4)$ et de rayon 4.

3.

Quelle est la position de S et du plan P' : $2x + 2y - z - 22 = 0$?

INDICE

Même méthode : calcule la distance du centre à P' et compare-la au rayon.

CORRIGÉ

D'après la formule de la distance à un plan, le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} &|2 \times 1 + 2 \times (-2) - 3 - 22| \\ &= 27, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} &d(\Omega, P') \\ &= \frac{27}{3} = 9. \end{aligned}$$

Comme $9 > 5$, la distance du centre au plan est supérieure au rayon.

Conclusion. D'après le théorème « sphère et plan », le plan P' et la sphère S n'ont aucun point commun.

Exercice 7

Deux plans tangents en des points opposés

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On admet que S est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, et l'on donne le point $A(3, -1, 2)$.

1.

Détermine le centre Ω et le rayon R de S, puis montre que $A \in S$.

INDICE

Complète les carrés en x et en y ; le terme en z est déjà un carré. Pour A, calcule ΩA.

CORRIGÉ

Complétion des carrés. On a :

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1,$$
$$y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4.$$

L'équation devient $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 - 9 = 0$, soit :

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9.$$

D'après l'équation cartésienne d'une sphère, $\Omega(1, -2, 0)$ et $R = 3$.

Point A. On a $\overrightarrow{\Omega A}(2, 1, 2)$, donc :

$$\Omega A = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 = R.$$

Conclusion. La sphère S a pour centre $\Omega(1, -2, 0)$ et pour rayon 3, et $A \in S$.

2.

Détermine une équation du plan T tangent à S en A, et contrôle-la par une distance.

INDICE

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ est normal au plan tangent en A. Traduis $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$. Le contrôle : la distance de Ω à T doit valoir R.

CORRIGÉ

Équation. D'après la propriété du plan tangent, T est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$. Dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A}\\&= 2(x-3) + (y+1)\\&\quad + 2(z-2)\\&= 2x + y + 2z - 9.\end{aligned}$$

Donc T : $2x + y + 2z - 9 = 0$.

Contrôle. D'après la formule de la distance à un plan, avec $\|\overrightarrow{\Omega A}\| = 3$, le numérateur vaut :

$$\begin{aligned}&|2 \times 1 + (-2) + 2 \times 0 - 9|\\&= 9,\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}&d(\Omega, T)\\&= \frac{9}{3} = 3 = R.\end{aligned}$$

Conclusion. Le plan tangent à S en A a pour équation $2x + y + 2z - 9 = 0$.

3.

Soit B le point tel que Ω soit le milieu de $[AB]$. Calcule ses coordonnées, puis montre que le plan T' tangent à S en B est parallèle à T.

INDICE

Écris $\overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{\Omega A}$. Compare ensuite les vecteurs normaux des deux plans tangents.

CORRIGÉ

Coordonnées de B. Comme Ω est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{\Omega A}$, donc $\overrightarrow{\Omega B}(-2, -1, -2)$ et $B(-1, -3, -2)$. De plus $\Omega B = \Omega A = 3$: $B \in S$.

Parallélisme. D'après la propriété du plan tangent, T' admet $\overrightarrow{\Omega B}$ pour vecteur normal. Ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{\Omega A}$, normal à T : d'après la propriété des plans parallèles, T' est parallèle à T.

Équation de T'. Un point M est dans T' si et seulement si $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{\Omega B} = 0$, soit $-2(x+1) - (y+3) - 2(z+2) = 0$, c'est-à-dire $-2x - y - 2z - 9 = 0$.

Conclusion. Le point B a pour coordonnées $(-1, -3, -2)$, et le plan tangent en B, d'équation T' : $2x + y + 2z + 9 = 0$, est parallèle à T.

Exercice 8

Une droite tangente à une sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne la sphère S de centre $\Omega(1, 1, 0)$ et de rayon 3, et la droite D de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 4 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.

Montre que D et S ont un seul point commun T, et donne ses coordonnées.

INDICE

Écris l'équation de S, remplace x, y, z par leurs expressions en t, et réduis. Le nombre de points communs se lit sur le discriminant.

CORRIGÉ

Équation en t. D'après l'équation cartésienne d'une sphère (repère orthonormé), S : $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$. Le point de D de paramètre t est sur S si et seulement si :

$$t^2 + 1^2 + (4 - t)^2 = 9.$$

En développant, $t^2 + 1 + 16 - 8t + t^2 = 9$, soit :

$$2t^2 - 8t + 8 = 0.$$

Discriminant. Il vaut $(-8)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$: l'équation a une seule solution, $t = \dfrac{8}{4} = 2$.

Conclusion. D'après le théorème « sphère et droite », D et S ont un seul point commun : D est tangente à S en $T(3, 2, 2)$.

2.

Montre que la droite D est orthogonale à la droite (ΩT).

INDICE

Calcule $\overrightarrow{\Omega T}$ et un vecteur directeur de D, puis leur produit scalaire.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{\Omega T}(2, 1, 2)$, et D est dirigée par $\vec{u}(1, 0, -1)$. D'après l'expression analytique du produit scalaire (repère orthonormé) :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\Omega T} \cdot \vec{u} \\ &= 2 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times (-1) \\ &= 2 + 0 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Les droites D et (ΩT) sont orthogonales. Elles passent toutes deux par T.

Conclusion. La droite D est orthogonale à (ΩT) ; comme elles se coupent en T, elles sont même perpendiculaires.

3.

Écris une équation du plan tangent à S en T, puis montre que la droite D est contenue dans ce plan.

INDICE

Le plan tangent en T admet $\overrightarrow{\Omega T}$ pour vecteur normal. Pour la droite, remplace la représentation paramétrique dans l'équation : le résultat doit être nul pour tout t.

CORRIGÉ

Plan tangent. D'après la propriété du plan tangent, ce plan passe par T et admet $\overrightarrow{\Omega T}(2, 1, 2)$ pour vecteur normal. Son équation s'écrit $2(x-3)+(y-2)+2(z-2)=0$, soit :

$$2x + y + 2z - 12 = 0.$$

La droite D. Soit t un réel. En remplaçant les coordonnées du point de D de paramètre t, les termes en t se compensent : $2(1+t)+2+2(4-t)-12=0$.

Conclusion. Tous les points de D vérifient l'équation $2x+y+2z-12=0$: la droite D est contenue dans le plan tangent à S en T.