BURHAN

Produit scalaire dans l'espace et applications : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-scalaire-dans-l-espace/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Produit scalaire dans l'espace et applications	Application	10

Exercice 1

Orthogonalité en coordonnées

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les vecteurs $\vec{u}(3, -1, 2)$, $\vec{v}(1, 5, 1)$ et $\vec{w}(2, 2, -1)$.

1.

Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

INDICE

Le repère est orthonormé : tu peux employer l'expression analytique du produit scalaire. Multiplie les coordonnées de même rang, puis additionne les trois produits. Garde les parenthèses autour de -1.

2.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ?

INDICE

Même outil qu'à la question précédente. Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul : il suffit donc de regarder si la somme obtenue vaut 0.

3.

Soit m un réel et $\vec{t}(m, 1, 4)$. Détermine m pour que $\vec{u}$ et $\vec{t}$ soient orthogonaux.

INDICE

Écris la condition $\vec{u} \cdot \vec{t} = 0$ avec l'expression analytique : c'est une équation du premier degré en m. Calcule séparément les deux termes qui ne contiennent pas m.

Exercice 2

Longueurs et nature d'un triangle

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1, 2, -1)$, $B(3, 3, 1)$ et $C(-1, 4, 0)$.

1.

Calcule les longueurs AB et AC.

INDICE

Calcule d'abord les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$. Le repère est orthonormé : la distance est la racine de la somme des carrés des coordonnées.

2.

Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Utilise l'expression analytique avec les coordonnées trouvées à la question précédente. Écris les trois produits avant de les additionner.

3.

Déduis-en la nature du triangle ABC, puis la longueur BC.

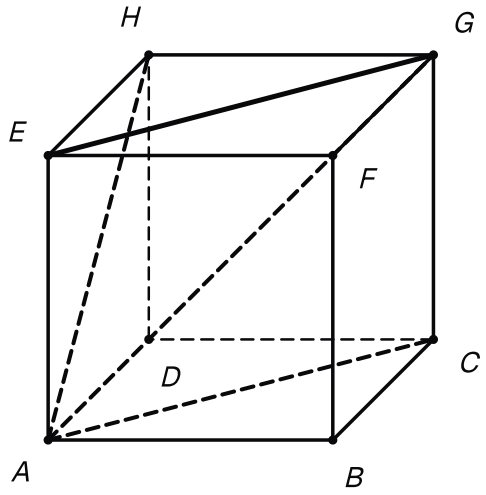
INDICE

Un produit scalaire nul traduit une orthogonalité. Combine-la avec les deux longueurs de la première question. Pour BC, deux voies : le théorème de Pythagore, ou un calcul direct de contrôle.

Exercice 3

Produits scalaires dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 : faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$. Trace une figure à main levée ; aucune propriété ne se lit sur elle.



Le cube d'arête 1 et les segments de l'exercice : [AG], [AH], [AC] et [EG].

1.

Montre que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = 1$.

INDICE

Cherche le projeté orthogonal de G sur la droite (AE). La droite (AE) est orthogonale à deux droites sécantes de la face du dessus : lesquelles ?

2.

Montre que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

INDICE

Montre que la droite (AB) est orthogonale au plan de la face $ADHE$. Il suffit de trouver deux droites sécantes de cette face orthogonales à (AB).

3.

Compare les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis calcule $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont égaux : que peux-tu dire du quadrilatère $ACGE$? Ensuite, AC est la diagonale d'un carré de côté 1.

4.

On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Justifie qu'il est orthonormé, puis retrouve $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = 1$ par l'expression analytique.

INDICE

Les arêtes ont pour longueur 1 et sont deux à deux orthogonales. Pour les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$, décompose ce vecteur sur la base : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$.

Exercice 4

Lire un vecteur normal

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les plans $P : 3x - 2y + z - 4 = 0$ et $P' : -6x + 4y - 2z + 1 = 0$.

1.

Donne un vecteur normal $\vec{n}$ au plan P.

INDICE

Le repère est orthonormé : les coefficients de x, y et z dans l'équation fournissent un vecteur normal. Attention au coefficient de z, qui n'est pas écrit.

2.

Montre que $\vec{u}(1, 2, 1)$ est orthogonal à $\vec{n}$. Que représente $\vec{u}$ pour le plan P ?

INDICE

Calcule $\vec{n} \cdot \vec{u}$ par l'expression analytique. Rappelle-toi ensuite le critère du chapitre précédent : $\vec{w}(\alpha, \beta, \gamma)$ dirige le plan si $3\alpha - 2\beta + \gamma = 0$.

3.

Montre que les plans P et P' sont parallèles. Sont-ils confondus ?

INDICE

Lis un vecteur normal à P' et compare-le à $\vec{n}$. Pour savoir si les plans sont confondus, choisis un point simple de P (annule deux coordonnées) et teste-le dans l'équation de P'.

Exercice 5

Un plan par un point et un vecteur normal

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le point $A(2, -1, 1)$ et le vecteur $\vec{n}(1, -3, 2)$.

1.

Détermine une équation cartésienne du plan P qui passe par A et admet $\vec{n}$ pour vecteur normal.

INDICE

Un point $M(x, y, z)$ est dans P si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Écris $\overrightarrow{AM}$, puis l'expression analytique. Attention : $y - (-1) = y + 1$.

2.

Le point $B(3, 0, 2)$ appartient-il au plan P ?

INDICE

Remplace x, y et z par les coordonnées de B dans l'équation trouvée. Le point est dans le plan si et seulement si on obtient 0.

3.

Détermine une équation du plan P' parallèle à P qui passe par $C(0, 1, -2)$.

INDICE

Deux plans parallèles ont des vecteurs normaux colinéaires : $\vec{n}$ convient encore. Il reste à trouver le nombre d grâce au point C.

Exercice 6

Droite orthogonale à un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le plan $P : x - 2y + 2z + 1 = 0$ et le point $A(1, 0, 3)$.

1.

Détermine une représentation paramétrique de la droite D qui passe par A et qui est orthogonale à P.

INDICE

Une droite orthogonale à P est dirigée par un vecteur colinéaire au vecteur normal. Lis ce vecteur normal sur l'équation de P.

2.

La droite D' dirigée par $\vec{v}(-2, 4, -4)$ est-elle orthogonale à P ?

INDICE

Cherche un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{n}$. Commence par la première coordonnée, puis vérifie les deux autres.

3.

Montre que la droite Δ dirigée par $\vec{w}(2, 1, 0)$ est parallèle à P.

INDICE

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si son vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal. Calcule $\vec{w} \cdot \vec{n}$.

Exercice 7

Distance d'un point à un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le plan P : $2x + 3y + 6z - 5 = 0$.

1.

Calcule la distance du point $M(1, 2, 3)$ au plan P.

INDICE

Utilise la formule de la distance à un plan. Calcule séparément le numérateur, avec sa valeur absolue, et la norme du vecteur normal.

2.

Calcule $d(N, P)$ pour $N(1, 1, 0)$. Interprète le résultat.

INDICE

Même formule. Regarde le numérateur : que dit une valeur nulle sur la position de N par rapport au plan ?

3.

Calcule la distance de l'origine O au plan P.

INDICE

Toutes les coordonnées de O sont nulles : seul le terme constant reste au numérateur. N'oublie pas la valeur absolue.

Exercice 8

Équation d'une sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note S la sphère de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon 4.

1.

Écris une équation cartésienne de S.

INDICE

Utilise l'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Attention au signe : $y - (-1) = y + 1$, et le second membre est R^2, pas R.

2.

Les points $A(2, 3, 0)$ et $B(4, 1, 2)$ appartiennent-ils à S ?

INDICE

Un point est sur S si et seulement si sa distance au centre vaut 4. Calcule ΩA et ΩB ; pour B, compare des carrés.

3.

Développe l'équation de S sous la forme $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$.

INDICE

Développe chaque carré avec $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$. Regroupe ensuite tous les nombres constants dans le premier membre.

Exercice 9

Centre et rayon d'une sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On admet que S est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 2 = 0$.

1.

Détermine le centre Ω et le rayon R de S.

INDICE

Regroupe les termes en x, en y, puis en z, et complète chaque carré : $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$. Passe ensuite les constantes dans le second membre.

2.

Vérifie de deux façons que le point $A(-1, 3, 2)$ appartient à S.

INDICE

Première façon : remplace dans l'équation développée. Seconde façon : calcule la distance ΩA.

3.

Écris une représentation paramétrique de S.

INDICE

Utilise le théorème de la représentation paramétrique d'une sphère, avec deux réels θ et φ. Remplace a, b, c et R par les valeurs trouvées.

Exercice 10

Une sphère et une droite

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne la sphère S de centre O et de rayon 3, et la droite D de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = 5 - 3t \\ z = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.

Écris une équation de S, puis l'équation en t qui traduit qu'un point de D est sur S.

INDICE

Le centre est l'origine : l'équation de S n'a pas de terme du premier degré. Remplace ensuite x, y, z par leurs expressions en t, développe et réduis.

2.

Résous cette équation et déduis-en les points communs à S et à D.

INDICE

Si tous les coefficients ont un facteur commun, divise l'équation par ce facteur avant le discriminant. Le signe du discriminant donne le nombre de points communs ; chaque solution t donne un point par la représentation de D.

3.

Vérifie que ces deux points sont bien sur S.

INDICE

Calcule $x^2 + y^2 + z^2$ pour chacun des deux points et compare au carré du rayon.