BURHAN

Produit scalaire dans l'espace et applications : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-scalaire-dans-l-espace/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Produit scalaire dans l'espace et applications	Application	10

Exercice 1

Orthogonalité en coordonnées

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les vecteurs $\vec{u}(3, -1, 2)$, $\vec{v}(1, 5, 1)$ et $\vec{w}(2, 2, -1)$.

1.

Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

INDICE

Le repère est orthonormé : tu peux employer l'expression analytique du produit scalaire. Multiplie les coordonnées de même rang, puis additionne les trois produits. Garde les parenthèses autour de -1.

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 3 \times 1 + (-1) \times 5 \\ &\quad + 2 \times 1 \\ &= 3 - 5 + 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Conclusion. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$: les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ?

INDICE

Même outil qu'à la question précédente. Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul : il suffit donc de regarder si la somme obtenue vaut 0.

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{w} &= 3 \times 2 + (-1) \times 2 \\ &\quad + 2 \times (-1) \\ &= 6 - 2 - 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Conclusion. $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \neq 0$: les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux.

3.

Soit m un réel et $\vec{t}(m, 1, 4)$. Détermine m pour que $\vec{u}$ et $\vec{t}$ soient orthogonaux.

INDICE

Écris la condition $\vec{u} \cdot \vec{t} = 0$ avec l'expression analytique : c'est une équation du premier degré en m. Calcule séparément les deux termes qui ne contiennent pas m.

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{t} &= 3 \times m + (-1) \times 1 \\ &\quad + 2 \times 4 \\ &= 3m + 7. \end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{t} = 0$, c'est-à-dire $3m + 7 = 0$, soit $m = -\dfrac{7}{3}$.

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont orthogonaux pour $m = -\dfrac{7}{3}$, et pour cette seule valeur.

Exercice 2

Longueurs et nature d'un triangle

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1, 2, -1)$, $B(3, 3, 1)$ et $C(-1, 4, 0)$.

1.

Calcule les longueurs AB et AC.

INDICE

Calcule d'abord les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$. Le repère est orthonormé : la distance est la racine de la somme des carrés des coordonnées.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{AB}(2, 1, 2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2, 2, 1)$. Le repère est orthonormé : d'après la formule de la distance,

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{9} = 3, \\ AC &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $AB = 3$ et $AC = 3$.

2.

Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Utilise l'expression analytique avec les coordonnées trouvées à la question précédente. Écris les trois produits avant de les additionner.

CORRIGÉ

D'après l'expression analytique du produit scalaire (repère orthonormé), avec les coordonnées de la question 1 :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 2 \times (-2) + 1 \times 2 + 2 \times 1 \\ &= -4 + 2 + 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

3.

Déduis-en la nature du triangle ABC, puis la longueur BC.

INDICE

Un produit scalaire nul traduit une orthogonalité. Combine-la avec les deux longueurs de la première question. Pour BC, deux voies : le théorème de Pythagore, ou un calcul direct de contrôle.

CORRIGÉ

Nature du triangle. Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux : les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires en A. De plus, $AB = AC = 3$ d'après la question 1.

Longueur BC. Le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 9 = 18$, donc $BC = 3\sqrt{2}$.

Contrôle. On a $\overrightarrow{BC}(-4, 1, -1)$, donc :

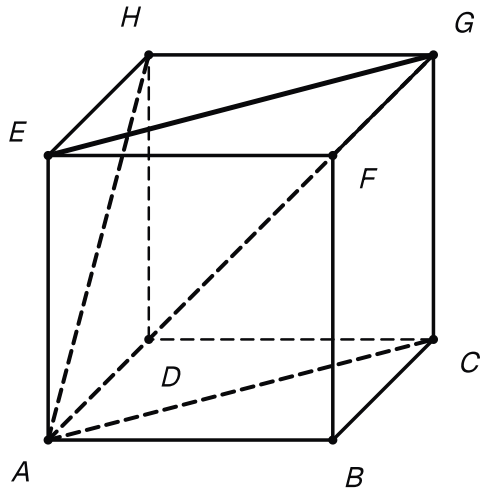
$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A, et $BC = 3\sqrt{2}$.

Exercice 3

Produits scalaires dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 : faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$. Trace une figure à main levée ; aucune propriété ne se lit sur elle.



Le cube d'arête 1 et les segments de l'exercice : [AG], [AH], [AC] et [EG].

1.

Montre que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = 1$.

INDICE

Cherche le projeté orthogonal de G sur la droite (AE). La droite (AE) est orthogonale à deux droites sécantes de la face du dessus : lesquelles ?

CORRIGÉ

Projeté de G sur (AE). Les faces $ABFE$ et $ADHE$ sont des carrés, donc $(AE) \perp (EF)$ et $(AE) \perp (EH)$.

Les droites (EF) et (EH) sont sécantes en E et contenues dans le plan (EFG). D'après le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, (AE) est donc orthogonale au plan (EFG), qui contient G.

Ainsi la droite (EG) est perpendiculaire à (AE) en E : le projeté orthogonal de G sur (AE) est E.

Calcul. D'après l'expression du produit scalaire par un projeté :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} \\ &= AE^2 = 1.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = 1$.

2.

Montre que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

INDICE

Montre que la droite (AB) est orthogonale au plan de la face $ADHE$. Il suffit de trouver deux droites sécantes de cette face orthogonales à (AB).

CORRIGÉ

Les faces $ABCD$ et $ABFE$ sont des carrés, donc $(AB) \perp (AD)$ et $(AB) \perp (AE)$.

Les droites (AD) et (AE) sont sécantes en A et contenues dans le plan (ADH). D'après le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, (AB) est donc orthogonale au plan (ADH).

Ce plan contient la droite (AH), donc (AB) et (AH) sont orthogonales : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

3.

Compare les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis calcule $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont égaux : que peux-tu dire du quadrilatère $ACGE$? Ensuite, AC est la diagonale d'un carré de côté 1.

CORRIGÉ

Comparaison. Les arêtes verticales donnent $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$, donc $ACGE$ est un parallélogramme et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$.

Calcul. On en déduit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AC^2. \end{aligned}$$

Dans le triangle ABC rectangle en B, le théorème de Pythagore donne $AC^2 = 1 + 1 = 2$. Donc $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$.

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux, et leur produit scalaire vaut 2.

4.

On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Justifie qu'il est orthonormé, puis retrouve $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = 1$ par l'expression analytique.

INDICE

Les arêtes ont pour longueur 1 et sont deux à deux orthogonales. Pour les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$, décompose ce vecteur sur la base : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$.

CORRIGÉ

Repère. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ont pour norme 1 et sont deux à deux orthogonaux : le repère est orthonormé.

Coordonnées. On a $\overrightarrow{AE}(0, 0, 1)$. Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$, la relation de Chasles donne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}, \end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{AG}(1, 1, 1)$.

Calcul. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} \\ &= 0 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1 \\ &= 0 + 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Conclusion. Le repère est orthonormé, et l'on retrouve $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = 1$, comme à la question 1.

Exercice 4

Lire un vecteur normal

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les plans P : $3x - 2y + z - 4 = 0$ et P' : $-6x + 4y - 2z + 1 = 0$.

1.

Donne un vecteur normal $\vec{n}$ au plan P.

INDICE

Le repère est orthonormé : les coefficients de x, y et z dans l'équation fournissent un vecteur normal. Attention au coefficient de z, qui n'est pas écrit.

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé. D'après la lecture d'un vecteur normal sur une équation, les coefficients de x, y et z dans l'équation de P sont les coordonnées d'un vecteur normal. Le coefficient de z vaut 1.

Conclusion. Le vecteur $\vec{n}(3, -2, 1)$ est normal au plan P.

2.

Montre que $\vec{u}(1, 2, 1)$ est orthogonal à $\vec{n}$. Que représente $\vec{u}$ pour le plan P ?

INDICE

Calcule $\vec{n} \cdot \vec{u}$ par l'expression analytique. Rappelle-toi ensuite le critère du chapitre précédent : $\vec{w}(\alpha, \beta, \gamma)$ dirige le plan si $3\alpha - 2\beta + \gamma = 0$.

CORRIGÉ

Orthogonalité. D'après l'expression analytique du produit scalaire (repère orthonormé) :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{u} &= 3 \times 1 + (-2) \times 2 \\ &\quad + 1 \times 1 \\ &= 3 - 4 + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

Rôle de $\vec{u}$. Ce calcul est exactement $3\alpha - 2\beta + \gamma$ pour $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 1)$. D'après le critère du chapitre précédent, $\vec{u}$ est un vecteur de direction du plan P.

Conclusion. Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$: c'est un vecteur de direction du plan P.

3.

Montre que les plans P et P' sont parallèles. Sont-ils confondus ?

INDICE

Lis un vecteur normal à P' et compare-le à $\vec{n}$. Pour savoir si les plans sont confondus, choisis un point simple de P (annule deux coordonnées) et teste-le dans l'équation de P'.

CORRIGÉ

Parallélisme. Un vecteur normal à P' est $\vec{n}'(-6, 4, -2)$, et $\vec{n}' = -2\vec{n}$. Les vecteurs normaux sont colinéaires : d'après la propriété des plans parallèles, P et P' sont parallèles.

Un point de P. Le point $K(0, 0, 4)$ est dans P, car $3 \times 0 - 2 \times 0 + 4 - 4 = 0$.

Ce point n'est pas dans P'. On a $-6 \times 0 + 4 \times 0 - 2 \times 4 + 1 = -7 \neq 0$, donc $K \notin P'$.

Conclusion. Les plans P et P' sont parallèles et ne sont pas confondus : ils sont strictement parallèles.

Exercice 5

Un plan par un point et un vecteur normal

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le point $A(2, -1, 1)$ et le vecteur $\vec{n}(1, -3, 2)$.

1.

Détermine une équation cartésienne du plan P qui passe par A et admet $\vec{n}$ pour vecteur normal.

INDICE

Un point $M(x, y, z)$ est dans P si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Écris $\overrightarrow{AM}$, puis l'expression analytique. Attention : $y - (-1) = y + 1$.

CORRIGÉ

D'après le théorème « plan, point et vecteur normal », un point $M(x, y, z)$ appartient à P si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

On a $\overrightarrow{AM}(x - 2, y + 1, z - 1)$. Le repère est orthonormé, donc d'après l'expression analytique :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} \\ &= (x - 2) - 3(y + 1) \\ &\quad + 2(z - 1) \\ &= x - 3y + 2z - 7. \end{aligned}$$

Conclusion. Une équation cartésienne de P est $x - 3y + 2z - 7 = 0$.

2.

Le point $B(3, 0, 2)$ appartient-il au plan P ?

INDICE

Remplace x, y et z par les coordonnées de B dans l'équation trouvée. Le point est dans le plan si et seulement si on obtient 0.

CORRIGÉ

On remplace x, y et z par les coordonnées de B dans l'équation de P : $3 - 3 \times 0 + 2 \times 2 - 7 = 0$.

Conclusion. Les coordonnées de B vérifient l'équation de P, donc $B \in P$.

3.

Détermine une équation du plan P' parallèle à P qui passe par $C(0, 1, -2)$.

INDICE

Deux plans parallèles ont des vecteurs normaux colinéaires : $\vec{n}$ convient encore. Il reste à trouver le nombre d grâce au point C.

CORRIGÉ

Vecteur normal. Le plan P' est parallèle à P : un vecteur normal de P' est colinéaire à $\vec{n}$ (plans parallèles et vecteurs normaux). Donc $\vec{n}$, non nul, est normal à P' (vecteur normal lu sur une équation), et P' a une équation de la forme $x - 3y + 2z + d = 0$.

Calcul de d. Comme $C \in P'$, on a $0 - 3 \times 1 + 2 \times (-2) + d = 0$, soit $-7 + d = 0$, donc $d = 7$.

Conclusion. Le plan parallèle à P passant par C a pour équation P' : $x - 3y + 2z + 7 = 0$.

Exercice 6

Droite orthogonale à un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le plan P : $x - 2y + 2z + 1 = 0$ et le point $A(1, 0, 3)$.

1.

Détermine une représentation paramétrique de la droite D qui passe par A et qui est orthogonale à P.

INDICE

Une droite orthogonale à P est dirigée par un vecteur colinéaire au vecteur normal. Lis ce vecteur normal sur l'équation de P.

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé, donc $\vec{n}(1, -2, 2)$ est normal à P. D'après le théorème de la droite orthogonale, D est dirigée par $\vec{n}$. Elle passe par $A(1, 0, 3)$.

Conclusion. Une représentation paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2.

La droite D' dirigée par $\vec{v}(-2, 4, -4)$ est-elle orthogonale à P ?

INDICE

Cherche un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{n}$. Commence par la première coordonnée, puis vérifie les deux autres.

CORRIGÉ

On a $\vec{v} = -2\vec{n}$, car $-2 \times 1 = -2$, $-2 \times (-2) = 4$ et $-2 \times 2 = -4$. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont donc colinéaires.

Conclusion. D'après le théorème de la droite orthogonale, la droite D' est orthogonale au plan P.

3.

Montre que la droite Δ dirigée par $\vec{w}(2,1,0)$ est parallèle à P.

INDICE

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si son vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal. Calcule $\vec{w}\cdot\vec{n}$.

CORRIGÉ

D'après l'expression analytique du produit scalaire (repère orthonormé) :

$$\begin{aligned}\vec{w}\cdot\vec{n} &= 2\times 1 + 1\times(-2)\\ &\quad + 0\times 2\\ &= 2-2+0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Le vecteur directeur $\vec{w}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$.

Conclusion. D'après la propriété « parallélisme et orthogonalité », la droite Δ est parallèle au plan P.

Exercice 7

Distance d'un point à un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le plan P : $2x + 3y + 6z - 5 = 0$.

1.

Calcule la distance du point $M(1, 2, 3)$ au plan P.

INDICE

Utilise la formule de la distance à un plan. Calcule séparément le numérateur, avec sa valeur absolue, et la norme du vecteur normal.

CORRIGÉ

Vecteur normal. Le repère est orthonormé et $\vec{n}(2, 3, 6)$ est normal à P, de norme :

$$\begin{aligned} \|\vec{n}\| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{49} = 7. \end{aligned}$$

Distance. D'après la formule de la distance à un plan, le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} &|2 \times 1 + 3 \times 2 + 6 \times 3 - 5| \\ &= 21, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} &d(M, P) \\ &= \frac{21}{7} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. La distance du point M au plan P vaut 3.

2.

Calcule $d(N, P)$ pour $N(1, 1, 0)$. Interprète le résultat.

INDICE

Même formule. Regarde le numérateur : que dit une valeur nulle sur la position de N par rapport au plan ?

CORRIGÉ

Au numérateur de la formule, on trouve $2 \times 1 + 3 \times 1 + 6 \times 0 - 5 = 0$, donc $d(N, P) = 0$.

Conclusion. $d(N, P) = 0$: les coordonnées de N vérifient l'équation de P, et le point N appartient au plan P.

3.

Calcule la distance de l'origine O au plan P.

INDICE

Toutes les coordonnées de O sont nulles : seul le terme constant reste au numérateur. N'oublie pas la valeur absolue.

CORRIGÉ

D'après la formule de la distance à un plan, avec $\|\vec{n}\| = 7$:

$$\begin{aligned} d(O, P) &= \frac{|0 + 0 + 0 - 5|}{7} \\ &= \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

Conclusion. La distance de l'origine au plan P vaut $\frac{5}{7}$.

Exercice 8

Équation d'une sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note S la sphère de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon 4.

1.

Écris une équation cartésienne de S.

INDICE

Utilise l'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Attention au signe : $y - (-1) = y + 1$, et le second membre est R^2, pas R.

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé. D'après le théorème de l'équation cartésienne d'une sphère, avec $\Omega(2, -1, 0)$ et $R^2 = 16$, une équation de S est :

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16.$$

2.

Les points $A(2, 3, 0)$ et $B(4, 1, 2)$ appartiennent-ils à S ?

INDICE

Un point est sur S si et seulement si sa distance au centre vaut 4. Calcule ΩA et ΩB ; pour B, compare des carrés.

CORRIGÉ

Un point appartient à S si et seulement si sa distance au centre Ω vaut 4.

Point A. On a $\overrightarrow{\Omega A}(0, 4, 0)$, donc :

$$\Omega A = \sqrt{0^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Point B. On a $\overrightarrow{\Omega B}(2, 2, 2)$, donc $\Omega B^2 = 12 \neq 16$ et $\Omega B \neq 4$.

Conclusion. Le point A appartient à S ; le point B n'appartient pas à S.

3.

Développe l'équation de S sous la forme $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$.

INDICE

Développe chaque carré avec $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$. Regroupe ensuite tous les nombres constants dans le premier membre.

CORRIGÉ

On développe les deux carrés :

$$(x-2)^2=x^2-4x+4,$$
$$(y+1)^2=y^2+2y+1.$$

On reporte dans l'équation de S, puis on passe 16 dans le premier membre ($4+1-16=-11$).

Conclusion. Une équation développée de S est :

$$x^2+y^2+z^2 \\ -4x+2y-11=0.$$

Exercice 9

Centre et rayon d'une sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On admet que S est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 2 = 0$.

1.

Détermine le centre Ω et le rayon R de S.

INDICE

Regroupe les termes en x, en y, puis en z, et complète chaque carré : $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$. Passe ensuite les constantes dans le second membre.

CORRIGÉ

Complétion des carrés. On regroupe les termes en x, en y et en z :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= (x+1)^2 - 1, \\ y^2 - 6y &= (y-3)^2 - 9, \\ z^2 + 4z &= (z+2)^2 - 4. \end{aligned}$$

Équation réduite. L'équation de S devient :

$$\begin{aligned} &(x+1)^2 + (y-3)^2 \\ &\quad + (z+2)^2 - 14 - 2 = 0, \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} &(x+1)^2 + (y-3)^2 \\ &\quad + (z+2)^2 = 16. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après l'équation cartésienne d'une sphère, S a pour centre $\Omega(-1, 3, -2)$ et pour rayon $R = 4$.

2.

Vérifie de deux façons que le point $A(-1, 3, 2)$ appartient à S.

INDICE

Première façon : remplace dans l'équation développée. Seconde façon : calcule la distance ΩA.

CORRIGÉ

Par l'équation développée. On remplace : $1 + 9 + 4 + 2 \times (-1) - 6 \times 3 + 4 \times 2 - 2 = 0$. Les coordonnées de A vérifient l'équation, donc $A \in S$.

Par la distance au centre. On a $\overrightarrow{\Omega A}(0, 0, 4)$, donc :

$$\begin{aligned} \Omega A &= \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{16} = 4 = R. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux méthodes montrent que le point A appartient à S.

3.

Écris une représentation paramétrique de S.

INDICE

Utilise le théorème de la représentation paramétrique d'une sphère, avec deux réels θ et φ. Remplace a, b, c et R par les valeurs trouvées.

CORRIGÉ

D'après le théorème de la représentation paramétrique d'une sphère (repère orthonormé), avec $\Omega(-1, 3, -2)$ et $R = 4$, la sphère S est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :

$$\begin{cases} x = -1 + 4\cos\varphi\cos\theta \\ y = 3 + 4\cos\varphi\sin\theta \\ z = -2 + 4\sin\varphi \end{cases}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

Une sphère et une droite

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne la sphère S de centre O et de rayon 3 , et la droite D de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = 5 - 3t \\ z = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.

Écris une équation de S, puis l'équation en t qui traduit qu'un point de D est sur S.

INDICE

Le centre est l'origine : l'équation de S n'a pas de terme du premier degré. Remplace ensuite x, y, z par leurs expressions en t, développe et réduis.

CORRIGÉ

Équation de S. D'après l'équation cartésienne d'une sphère (repère orthonormé), de centre O et de rayon 3 :

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

Équation en t. Le point de D de paramètre t a pour coordonnées $(t, 5 - 3t, 2)$. Il appartient à S si et seulement si :

$$t^2 + (5 - 3t)^2 + 2^2 = 9.$$

En développant, $t^2 + 25 - 30t + 9t^2 + 4 = 9$.

Conclusion. Un point de D est sur S si et seulement si son paramètre vérifie :

$$10t^2 - 30t + 20 = 0.$$

2.

Résous cette équation et déduis-en les points communs à S et à D.

INDICE

Si tous les coefficients ont un facteur commun, divise l'équation par ce facteur avant le discriminant. Le signe du discriminant donne le nombre de points communs ; chaque solution t donne un point par la représentation de D.

CORRIGÉ

Résolution. On divise par 10 : $t^2 - 3t + 2 = 0$. Le discriminant vaut :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 \\ &= 1 > 0.\end{aligned}$$

L'équation a deux solutions :

$$\begin{aligned}t_1 &= \frac{3 - 1}{2} = 1, \\ t_2 &= \frac{3 + 1}{2} = 2.\end{aligned}$$

Points communs. D'après le théorème « sphère et droite », D et S ont deux points communs. On les obtient en reportant $t = 1$ puis $t = 2$ dans la représentation de D.

Conclusion. La droite D et la sphère S ont deux points communs : $E(1, 2, 2)$ et $F(2, -1, 2)$.

3.

Vérifie que ces deux points sont bien sur S.

INDICE

Calcule $x^2 + y^2 + z^2$ pour chacun des deux points et compare au carré du rayon.

CORRIGÉ

On calcule $x^2 + y^2 + z^2$ pour chaque point.

- Pour E : $1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$.
- Pour F : $2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 9$.

Conclusion. Les coordonnées de E et de F vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 9$: les deux points sont bien sur S.