BURHAN

Produit scalaire dans l'espace et applications

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

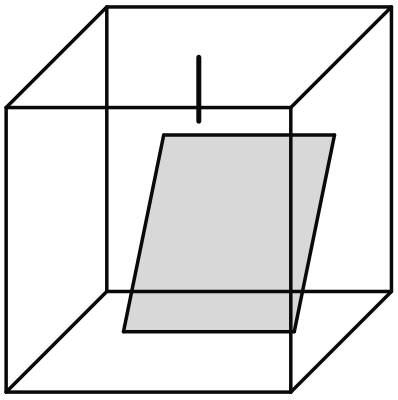
Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/produit-scalaire-dans-l-espace/cours

Chapitre	Semestre
Produit scalaire dans l'espace et applications	Semestre 2

Mesurer et viser dans l'espace

Imagine une pièce en forme de cube. Une lampe pend au milieu du plafond. Un panneau de bois est posé en biais contre un mur. À quelle distance la lampe est-elle du panneau ?

Une balle roule ensuite et vient toucher le panneau en un seul point. Où est ce point ? Trace la pièce à main levée : ta figure t'aide à suivre, mais elle ne prouve rien.



La pièce cubique : une lampe pend au milieu du plafond, un panneau est appuyé en biais contre le mur du fond.

Devine : Le point le plus proche

Tu cherches la distance de la lampe au panneau. Quel point du panneau dois-tu viser ?

A. N'importe quel point : toutes les distances sont égales.

Faux.

Faux. Les points du panneau ne sont pas tous à la même distance de la lampe.

B. Le point tel que le segment depuis la lampe soit orthogonal au panneau.

Juste.

C'est juste. Tout autre point du panneau est plus loin : tu le démontreras avec le projeté orthogonal.

C. Le point du panneau situé juste à la verticale sous la lampe.

Faux.

Faux. Le panneau est incliné : le segment vertical ne lui est pas orthogonal, et un autre point est plus proche.

D. Le coin du panneau qui est le plus proche du sol.

Faux.

Faux. Le sol ne joue aucun rôle dans la distance de la lampe au panneau.

Correction

Le point visé est le **projeté orthogonal** de la lampe sur le plan du panneau. Le segment qui les joint est orthogonal au panneau. Tu démontreras que c'est le point le plus proche, puis tu calculeras cette distance par une formule.

Dans ce chapitre, tu transportes le **produit scalaire** du plan à l'espace. Tu le calcules en coordonnées, dans un repère orthonormé.

Tu en tires le **vecteur normal** d'un plan et la distance d'un point à un plan. Tu étudies enfin la **sphère**.

Chaque résultat est démontré : tu apprends à rédiger chaque « montrer que » comme une preuve.

Le produit scalaire, du plan à l'espace

Trois points, un plan

Devine : Trois points de l'espace

Prends trois points A, B, C de l'espace. Existe-t-il toujours un plan qui les contient ?

A. Non, seulement s'ils sont sur une même face d'un cube.

Faux.

Faux. Une face de cube n'a rien de spécial : trois points sont toujours coplanaires.

B. Non, jamais : trois points de l'espace ne sont pas coplanaires.

Faux.

Faux. C'est avec quatre points que la coplanarité peut échouer, pas avec trois.

C. Oui, toujours : un seul s'ils ne sont pas alignés, une infinité sinon.

Juste.

C'est juste. Trois points non alignés définissent un plan. S'ils sont alignés, tout plan qui contient leur droite convient.

D. Oui, mais seulement si les trois points ne sont pas alignés.

Faux.

Faux. Trois points alignés sont aussi dans un plan : il y en a même une infinité.

Correction

> Il existe **toujours** un plan qui contient trois points donnés. On peut donc calculer avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans ce plan, où tu connais déjà le produit scalaire.

Petit rappel du tronc commun. Dans un plan, pour trois points A, B et C :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right).\end{aligned}$$

Si $A\neq B$ et $A\neq C$, on a aussi :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}.$$

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

Enfin, un produit scalaire nul caractérise l'orthogonalité.

Définition et expressions

Définition : Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, A un point, et B, C les points tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. Il existe au moins un plan P qui contient A, B et C.

- Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan P, comme en géométrie plane. On montre ci-dessous qu'il ne dépend ni du point A, ni du plan P.
- La **norme** de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la longueur AB ; elle ne dépend pas de A, car deux représentants d'un même vecteur sont les côtés opposés d'un parallélogramme, éventuellement aplati (tronc commun). On a $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si l'un d'eux est nul, ou si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

L'idée, avant l'énoncé. Le plan P n'est pas toujours unique, et le point A est choisi librement. Il faut donc vérifier que le résultat ne dépend pas de ces choix. L'idée : écrire le produit scalaire avec trois longueurs qui ne dépendent que de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

Propriété : Expressions du produit scalaire ; orthogonalité

Avec les notations de la définition du produit scalaire :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{v}-\vec{u}\|^2\right)$; en particulier, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ne dépend ni de A, ni de P.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\widehat{BAC}$.
3. Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

4. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration

Étape 1. Dans le plan P, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$ (tronc commun). Or $AB = \|\vec{u}\|$, $AC = \|\vec{v}\|$ et, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u}$, donc $BC = \|\vec{v} - \vec{u}\|$. Ces trois longueurs ne dépendent que de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$: le produit scalaire ne dépend ni de A, ni de P.

Étape 2. La droite (AB) est contenue dans P, donc le projeté H appartient à P. Les points A, B, C, H sont dans le plan P : les formules du produit scalaire dans le plan, par le cosinus et par le projeté orthogonal, et la caractérisation de l'orthogonalité (tronc commun) donnent les points 2, 3 et 4.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On se ramène à un plan qui contient les points utiles. La formule des trois longueurs fait le reste : $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{v} - \vec{u}\|$ ne dépendent ni de A, ni de P. Les formules du plan restent donc vraies dans l'espace.

Vérifie : L'argument clé

Quel argument montre que $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ne dépend pas du plan P choisi ?

A. Le plan P qui contient A, B et C est toujours unique.

Faux.

Faux. Si A, B, C sont alignés, une infinité de plans les contiennent.

B. On prend toujours pour A l'origine d'un repère fixé.

Faux.

Faux. La définition laisse le point A libre, et elle ne parle d'aucun repère.

C. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont toujours orthogonaux.

Faux.

Faux. Ils peuvent faire n'importe quel angle.

D. Il s'écrit avec trois longueurs qui ne dépendent que de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

Juste.

C'est juste. C'est la formule des trois longueurs, à l'étape 1 de la preuve.

Correction

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$. La formule du plan donne alors :

$$\begin{aligned} &\vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2\right). \end{aligned}$$

Ces trois longueurs ne dépendent que des vecteurs : le choix de A et de P ne change rien.

Dans le cube

Exemple : un produit scalaire dans le cube

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1 : face $ABCD$ en dessous, face $EFGH$ au-dessus, arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$. Trace-le à main levée. Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$.

Le projeté. La droite (AB) est orthogonale à (BC) et à (BF), sécantes en B. Elle est donc orthogonale au plan (BCG), et à la droite (BG). Le projeté orthogonal de G sur (AB) est B.

Le calcul. D'après l'expression par le projeté orthogonal :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= AB^2 = 1.\end{aligned}$$

Le cosinus. $[BG]$ est la diagonale d'une face carrée, donc $BG^2 = 2$. Le triangle ABG est rectangle en B ; par le théorème de Pythagore :

$$AG^2 = AB^2 + BG^2 = 1 + 2 = 3.$$

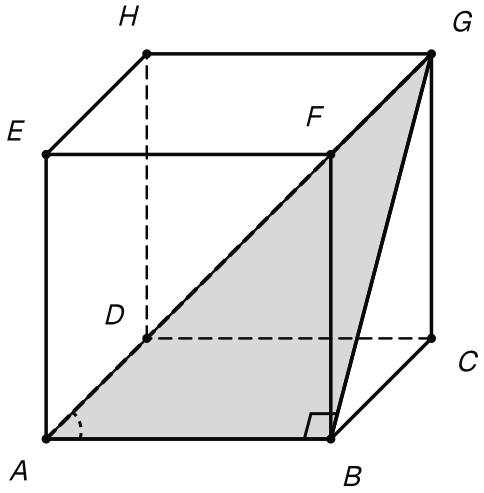
L'expression par le cosinus donne alors :

$$1 = 1 \times \sqrt{3} \times \cos\widehat{BAG},$$

d'où $\cos\widehat{BAG} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Les trois longueurs. On retrouve le même résultat avec $AB^2 = 1$, $AG^2 = 3$ et $BG^2 = 2$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AG^2 - BG^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(1 + 3 - 2) = 1.\end{aligned}$$



Le triangle ABG, rectangle en B : B est le projeté orthogonal de G sur la droite (AB).

Exemple : deux droites orthogonales qui ne se coupent pas

Dans le même cube, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, car $ABCD$ est un carré. Donc :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Or (AE) et (AD) sont perpendiculaires, car la face $ADHE$ est un carré : ce produit scalaire vaut 0.

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc orthogonaux. Pourtant, les droites (AE) et (BC) ne sont pas coplanaires : elles ne se coupent pas.

À toi : Le produit scalaire de deux diagonales

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, les segments $[AF]$, $[AC]$ et $[FC]$ sont des diagonales de faces. Rédige le calcul de $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AC}$ par la formule des trois longueurs. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Une diagonale d'une face carrée d'arête 1 mesure $\sqrt{2}$, par le théorème de Pythagore.

Indice 2

Écris $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AF^2 + AC^2 - FC^2\right)$.

Indice 3

Remplace chaque carré par sa valeur, sans oublier le facteur $\dfrac{1}{2}$.

Réponse

Les trois segments sont des diagonales de faces carrées d'arête 1. Par le théorème de Pythagore, $AF^2 = AC^2 = FC^2 = 2$.

D'après les expressions du produit scalaire :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\frac{AF^2+AC^2-FC^2}{2}\\&=\frac{1}{2}(2+2-2)=1.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}=1$.

Base orthonormée, norme et distance

Le cube comme repère

Devine : Les arêtes issues de A

Reprends le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 : face $ABCD$ en dessous, face $EFGH$ au-dessus, arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$. Regarde les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Que peux-tu dire d'eux ?

A. Ils ont pour norme 1 et sont deux à deux orthogonaux.

Juste.

C'est juste. Les arêtes mesurent 1, et deux arêtes issues de A sont perpendiculaires, car les faces sont des carrés.

B. Ils ont pour norme 1, mais deux d'entre eux sont colinéaires.

Faux.

Faux. Ils forment une base de l'espace : aucun n'est colinéaire à un autre.

C. Ils sont orthogonaux, mais leurs normes sont différentes.

Faux.

Faux. Les trois arêtes du cube ont la même longueur, 1.

D. Ils sont deux à deux orthogonaux et de norme $\sqrt{2}$.

Faux.

Faux. $\sqrt{2}$ est la longueur d'une diagonale de face, pas celle d'une arête.

Correction

Les trois arêtes mesurent 1 et sont deux à deux perpendiculaires. Une telle base porte un nom : c'est une **base orthonormée**. Le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est un **repère orthonormé**.

Dans ce repère, A est l'origine. Comme $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, on lit $G(1,1,1)$; de même $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$ et $E(0,0,1)$.

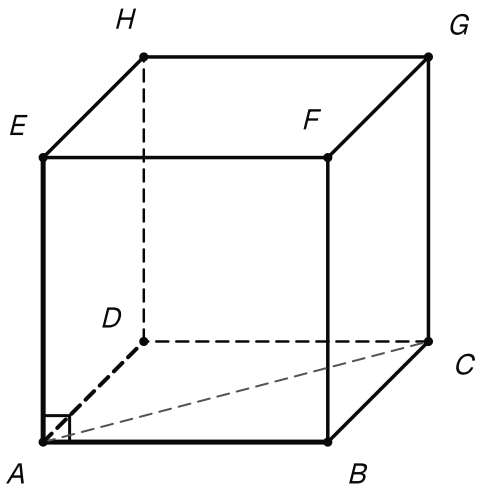
Définition : Base orthonormée, repère orthonormé

- Une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** si $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$ et si les trois vecteurs sont deux à deux orthogonaux : $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$.
- Un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace est **orthonormé** si sa base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormée.

Exemple : deux bases du cube

La base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ du cube est orthonormée : trois arêtes de longueur 1, deux à deux perpendiculaires.

La base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$ ne l'est pas. D'abord, $AC=\sqrt{2}$, car $[AC]$ est la diagonale d'une face carrée. Ensuite, B est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB^2=1$: ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.



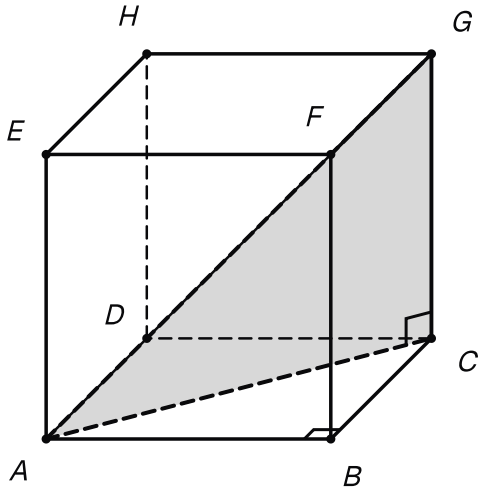
Trois arêtes issues de A, de longueur 1 et deux à deux perpendiculaires ; la diagonale [AC] n'en fait pas partie.

La norme en coordonnées

L'idée, avant l'énoncé. Dans le cube, on va de A à G en deux temps : d'abord de A à C dans la face du dessous, puis de C à G à la verticale.

Le théorème de Pythagore sert deux fois : $AC^2=1+1$, puis $AG^2=AC^2+1=3$. La preuve suit ce chemin pour tout vecteur.

Rappel des notations : $D(O,\vec{k})$ est la droite qui passe par O et que dirige $\vec{k}$; $P(O,\vec{i},\vec{j})$ est le plan qui passe par O et que dirigent $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



De A à G en deux temps : la diagonale [AC] dans la face du dessous, puis l'arête verticale [CG].

Théorème : Norme et distance dans un repère orthonormé

Dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, tout vecteur $\vec{u}(x,y,z)$ vérifie

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Dans un repère orthonormé, pour tous points A et B,

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

Démonstration

Étape 1. Fixons un point O, et soit M et M' les points tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i}+y\vec{j}$. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$.

Étape 2. Comme $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$, les droites $D(O,\vec{i})$ et $D(O,\vec{j})$ sont perpendiculaires en O (expressions du produit scalaire) : $x\vec{i}$ et $y\vec{j}$, nuls ou directeurs de ces droites, sont orthogonaux. Leurs normes sont $|x|$ et $|y|$ (longueur d'un produit par un réel, tronc commun). Par le théorème de Pythagore dans le plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$, $OM'^2 = x^2+y^2$.

Étape 3. De même, la droite $D(O,\vec{k})$ est orthogonale aux droites sécantes $D(O,\vec{i})$ et $D(O,\vec{j})$, donc au plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$ (tronc commun). Le vecteur $\overrightarrow{OM'}$, nul ou directeur d'une droite de ce plan, est orthogonal à $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$, de norme $|z|$. Par le théorème de Pythagore, $OM^2 = OM'^2 + M'M^2 = x^2+y^2+z^2$.

Étape 4. On l'applique au vecteur $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$ (chapitre précédent).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On applique le théorème de Pythagore **deux fois** : dans le plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$, puis avec la verticale $z\vec{k}$.

Le second angle droit vient du tronc commun : la droite $D(O,\vec{k})$, orthogonale aux deux droites sécantes $D(O,\vec{i})$ et $D(O,\vec{j})$, est orthogonale au plan qu'elles engendrent.

Vérifie : Le second angle droit

À l'étape 3 de la preuve, pourquoi $\overrightarrow{OM'}$ est-il orthogonal à $z\vec{k}$?

A. Tout vecteur de l'espace est orthogonal à $\vec{k}$.

Faux.

Faux. Le vecteur $\vec{k}$ n'est pas orthogonal à lui-même.

B. La droite $D(O,\vec{k})$ est orthogonale au plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$.

Juste.

C'est juste. Elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan, donc à toute droite du plan.

C. Les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires.

Faux.

Faux. Deux vecteurs colinéaires non nuls ne sont jamais orthogonaux.

D. On a $OM'^2 = x^2 + y^2$, d'après l'étape 2.

Faux.

Faux. Cette égalité donne une longueur, pas un angle droit.

Correction

La base est orthonormée : $D(O,\vec{k})$ est orthogonale aux droites sécantes $D(O,\vec{i})$ et $D(O,\vec{j})$. Elle est donc orthogonale au plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$, qui contient M'. Ainsi $\overrightarrow{OM'}$ est orthogonal à $z\vec{k}$, et Pythagore s'applique dans le triangle $OM'M$.

En pratique

Exemple : diagonale d'un pavé et distance de deux points

Dans un repère orthonormé, un pavé droit a pour sommets opposés O et $S(2,3,6)$, ses arêtes étant parallèles aux axes. Sa grande diagonale mesure :

$$\begin{aligned} OS &= \sqrt{2^2+3^2+6^2} \\ &= \sqrt{49} = 7. \end{aligned}$$

Pour $A(1,-2,3)$ et $B(3,2,-1)$, on a $\overrightarrow{AB}(2,4,-4)$, donc :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{2^2+4^2+(-4)^2} \\ &= \sqrt{36} = 6. \end{aligned}$$

Attention : L'expression en coordonnées exige un repère orthonormé

La formule $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ne vaut que dans une base **orthonormée**. Reprends le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ du cube : il n'est pas orthonormé.

✗ Dans ce repère, $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(0,1,0)$, donc $AC = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1$.

✓ AC est la diagonale d'une face carrée d'arête 1 : $AC = \sqrt{2}$.

Écris toujours « dans le repère orthonormé… » avant d'employer une formule en coordonnées.

À toi : Un triangle particulier

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Soit $A(2,1,-1)$, $B(4,-1,0)$ et $C(3,3,1)$. Rédige la preuve que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
Indice 2
Applique la distance dans un repère orthonormé : AB^2, AC^2, puis BC^2.
Indice 3
Compare BC^2 et $AB^2 + AC^2$: c'est la réciproque du théorème de Pythagore.

Réponse
Le repère est orthonormé. On a $\overrightarrow{AB}(2,-2,1)$, $\overrightarrow{AC}(1,2,2)$ et $\overrightarrow{BC}(-1,4,1)$. Par la norme dans un repère orthonormé :

$$\begin{aligned} AB^2 &= 2^2 + (-2)^2 + 1^2 \\ &= 9, \\ AC^2 &= 1^2 + 2^2 + 2^2 \\ &= 9, \\ BC^2 &= (-1)^2 + 4^2 + 1^2 \\ &= 18. \end{aligned}$$

Isocèle. Donc $AB = AC = 3$: le triangle est isocèle en A.

Rectangle. De plus, $AB^2 + AC^2 = 18 = BC^2$. Par la réciproque du théorème de Pythagore, il est rectangle en A.

Conclusion. Le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

Expression analytique et règles de calcul

Deviner avant de calculer

Devine : Les diagonales d'une face

Même cube que plus haut (face $ABCD$ en dessous, $[AE]$ vertical). Dans son repère orthonormé, soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$: ce sont les diagonales du carré $ABCD$ (l'une est $\overrightarrow{AC}$). À ton avis, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vaut-il 0, 1, 2 ou -1 ?

A. 2

Faux.

Faux. Ce serait AC^2 : tu as pris deux fois la même diagonale.

B. -1

Faux.

Faux. Un produit scalaire négatif signale un angle obtus ; ici, l'angle est droit.

C. 0

Juste.

C'est juste. Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires. En coordonnées, $\vec{u}(1,1,0)$ et $\vec{v}(1,-1,0)$; tu vas voir comment on calcule d'un coup.

D. 1

Faux.

Faux. Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires : leur produit scalaire est nul.

Correction

On a $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DB}$: ce sont les deux diagonales du carré $ABCD$. Elles sont perpendiculaires, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. En coordonnées, $\vec{u}(1,1,0)$ et $\vec{v}(1,-1,0)$: le calcul direct arrive avec l'énoncé suivant.

L'idée, avant l'énoncé. La formule des trois longueurs s'écrit avec des normes. Or, dans une base orthonormée, chaque norme se calcule avec les coordonnées. En développant, les carrés se simplifient : il ne reste que $xx' + yy' + zz'$.

Théorème : Expression analytique du produit scalaire

Dans une base orthonormée, pour tous vecteurs $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

En particulier, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$.

Démonstration

Étape 1. D'après les expressions du produit scalaire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2\right)$.

Étape 2. Le vecteur $\vec{v} - \vec{u}$ a pour coordonnées $(x' - x, y' - y, z' - z)$ (chapitre précédent). La norme dans une base orthonormée donne

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(xx' + yy' + zz').$$

Étape 3. En reportant dans l'étape 1, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$. La caractérisation de l'orthogonalité par un produit scalaire nul donne la dernière phrase.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On combine deux résultats déjà démontrés : la formule des trois longueurs, puis la norme en coordonnées. Le développement de $(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$ fait apparaître $-2(xx' + yy' + zz')$. Tout le reste se simplifie.

Vérifie : D'où vient le double produit

Dans la preuve, d'où vient le terme $-2(xx' + yy' + zz')$?

A. De la formule du produit scalaire avec le cosinus.
Faux.
Faux. La preuve n'utilise aucun angle.

B. De la relation de Chasles appliquée aux trois points.
Faux.
Faux. Chasles donne $\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$, pas ce terme.

C. De la symétrie du produit scalaire.
Faux.
Faux. Les règles de calcul sont démontrées après ce théorème : on ne peut pas s'en servir ici.

D. Du développement des trois carrés de $\|\vec{v} - \vec{u}\|^2$.
Juste.
C'est juste. Par exemple, $(x' - x)^2 = x'^2 - 2xx' + x^2$.

Correction
On développe $(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$. On obtient $x^2 + y^2 + z^2$, puis $x'^2 + y'^2 + z'^2$, puis $-2(xx' + yy' + zz')$. Les deux premiers groupes sont $\|\vec{u}\|^2$ et $\|\vec{v}\|^2$: ils se simplifient dans la formule des trois longueurs.

Prouver une orthogonalité

Méthode : Montrer que deux vecteurs ou deux droites sont orthogonaux

1. **Choisir des vecteurs directeurs** : un pour chaque droite, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. **Annoncer le repère orthonormé**, puis écrire le produit terme à terme : $xx' + yy' + zz'$.
3. **Conclure** : un produit nul donne des vecteurs orthogonaux, donc des droites orthogonales.

4. **Rester prudent** : deux droites orthogonales de l'espace ne se coupent pas forcément. Si elles se coupent, elles sont perpendiculaires.

Exemple : orthogonalité et angle

Dans un repère orthonormé, soit $A(1,0,2)$, $B(2,2,4)$, $C(3,-2,3)$ et $D(2,1,2)$. On a $\overrightarrow{AB}(1,2,2)$, $\overrightarrow{AC}(2,-2,1)$ et $\overrightarrow{AD}(1,1,0)$.

Orthogonalité. Par l'expression analytique :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=1\times 2+2\times(-2)+2\times 1\\&=0.\end{aligned}$$

Les droites (AB) et (AC) sont donc perpendiculaires en A.

Angle. De même :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}&=1\times 1+2\times 1+2\times 0\\&=3,\end{aligned}$$

avec $AB=3$ et $AD=\sqrt{2}$. L'expression par le cosinus donne :

$$3=3\sqrt{2}\cos\widehat{BAD},$$

d'où $\cos\widehat{BAD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{BAD}=\dfrac{\pi}{4}$.

Les règles de calcul

L'idée, avant l'énoncé. Avec l'expression analytique, un produit scalaire devient une somme de produits de réels. Les règles de calcul des réels donnent alors celles du produit scalaire. Il suffit qu'une base orthonormée existe : le cube en fournit une.

Propriété : Propriétés de calcul du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace et tout réel α :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$;
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})=\alpha\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$;
3. $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$, et $\vec{u}\cdot\vec{u}=0$ si et seulement si $\vec{u}=\vec{0}$;
4. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$;
5. $\|\alpha\vec{u}\|=|\alpha|\,\|\vec{u}\|$.

Démonstration

Étape 1. Fixons une base orthonormée : il en existe, par exemple les vecteurs portés par les trois arêtes issues d'un sommet d'un cube d'arête 1 (tronc commun). Écrivons $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(x', y', z')$ et $\vec{w}(x'', y'', z'')$.

Étape 2. Par l'expression analytique, les points 1 et 2 deviennent des égalités entre réels : $xx' + yy' + zz' = x'x + y'y + z'z$, puis $x(x' + x'') + y(y' + y'') + z(z' + z'') = (xx' + yy' + zz') + (xx'' + yy'' + zz'')$, et de même pour $\alpha\vec{v}$. Pour le point 3, $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$, positif, nul si et seulement si $x = y = z = 0$.

Étape 3. Le point 4 s'obtient en développant avec les points 1 et 2. Pour le point 5, $\|\alpha\vec{u}\|^2 = \alpha^2(x^2 + y^2 + z^2)$ (norme dans une base orthonormée).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On fixe une base orthonormée, puis chaque propriété devient une égalité entre réels. Le seul point délicat est l'existence d'une telle base : les trois arêtes issues d'un sommet d'un cube d'arête 1 la donnent.

Vérifie : Pourquoi une base orthonormée

Dans la preuve des propriétés de calcul, pourquoi fixe-t-on d'abord une base orthonormée ?

A. Pour écrire chaque produit scalaire comme une somme de produits de réels.
Juste.
C'est juste. L'expression analytique transforme chaque propriété en égalité entre réels.

B. Parce que le produit scalaire n'est défini que dans une base orthonormée.
Faux.
Faux. Il est défini sans repère, par un plan qui contient les points.

C. Pour que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux.
Faux.
Faux. Les trois vecteurs sont quelconques ; seule la base est orthonormée.

D. Pour que tous les produits scalaires calculés soient positifs.
Faux.
Faux. Un produit scalaire peut être négatif dans n'importe quelle base.

Correction
À l'étape 1, on fixe une base orthonormée : le cube en fournit une. L'expression analytique écrit alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$. Chaque propriété devient une égalité entre réels, démontrée par les règles de calcul des réels.

Exemple : développer sans coordonnées

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. Par les propriétés de calcul :

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ &= 9 - 2 + 4 = 11.\end{aligned}$$

Donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{11}$. De la même façon :

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \\ &= 9 - 4 = 5.\end{aligned}$$

Enfin, les mêmes propriétés de calcul donnent :

$$\begin{aligned}&\|2\vec{u} - \vec{v}\|^2 \\ &= 4\|\vec{u}\|^2 - 4\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ &= 4 \times 9 - 4 \times (-1) + 4 = 44,\end{aligned}$$

donc $\|2\vec{u} - \vec{v}\| = 2\sqrt{11}$, car $\sqrt{44} = 2\sqrt{11}$.

Choisir et rédiger

Méthode : Calculer un produit scalaire dans l'espace

1. **Lire les données** : des longueurs seulement, la formule des trois longueurs ; un angle connu, le cosinus ; un projeté orthogonal facile, le projeté ; des coordonnées dans un repère **orthonormé**, l'expression analytique.
2. **Se placer dans un plan** qui contient les points utiles, si tu raisonnes sans coordonnées.
3. **Calculer**, en t'aidant au besoin de la linéarité et des identités.
4. **Conclure** : un produit scalaire nul prouve une orthogonalité.

À toi : Un paramètre pour l'orthogonalité

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Soit $\vec{u}(2, -1, 3)$ et, pour un réel m, $\vec{v}(m, 4, 2)$. Rédige la recherche de m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux, puis calcule $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ pour cette valeur. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le repère est orthonormé : emploie l'expression analytique.
Indice 2
Écris $\vec{u} \cdot \vec{v}$ terme à terme, puis résous l'équation obtenue.
Indice 3
Pour la norme, calcule d'abord les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$.

Réponse
Le repère est orthonormé, donc, par l'expression analytique :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=2\times m+(-1)\times 4\\&\quad+3\times 2\\&=2m+2.\end{aligned}$$

Valeur de m. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $2m+2=0$, c'est-à-dire $m=-1$.

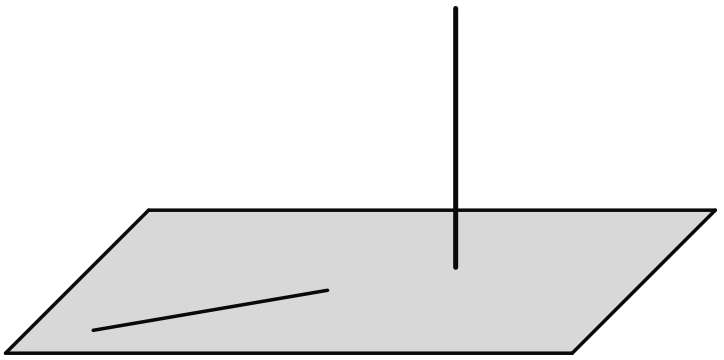
Norme. Pour $m=-1$, le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(1,3,5)$, et :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|&=\sqrt{1^2+3^2+5^2}\\&=\sqrt{35}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux pour $m=-1$ seulement, et alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{35}$.

Vecteur normal à un plan

Une tige plantée droite



Une tige plantée droite dans une table, et un trait tracé sur la table dans une direction quelconque.

Devine : La tige et la table

Une tige est plantée bien droite dans une table. Une fourmi trace sur la table un trait, dans une direction quelconque. Que peux-tu dire de la tige et du trait ?

A. La tige et le trait ne sont jamais orthogonaux.

Faux.

Faux. Ils le sont toujours, puisque la tige est orthogonale à la table.

B. La tige est orthogonale au trait, quelle que soit sa direction.

Juste.

C'est juste. Une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

C. La tige est orthogonale au trait seulement s'il passe par son pied.
Faux.
Faux. Deux droites orthogonales n'ont pas besoin de se couper.

D. La tige est orthogonale au trait pour une seule direction.
Faux.
Faux. La tige est orthogonale au plan de la table, donc à toutes ses droites.

Correction
La tige est orthogonale au plan de la table, donc à toute droite de ce plan. Un vecteur porté par la tige est orthogonal à **tous** les vecteurs de direction du plan : c'est l'idée du vecteur normal.

Petit rappel du chapitre précédent. Les **vecteurs de direction** du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ sont les vecteurs $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, où α et β sont réels.

Si P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, le vecteur $\vec{w}(\alpha, \beta, \gamma)$ dirige P si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

Définition et caractérisation

Définition : Vecteur normal à un plan

Soit P un plan de l'espace. Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** au plan P si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et si $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de direction de P.

L'idée, avant l'énoncé. Un plan a une infinité de vecteurs de direction : on ne peut pas tous les tester. Mais chacun s'écrit $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. La linéarité du produit scalaire permet alors de passer de deux vecteurs à tous.

Propriété : Vecteur normal et deux vecteurs de direction

Soit $P = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ un plan, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **non colinéaires**, et $\vec{n}$ un vecteur **non nul**. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan P si et seulement si

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0.$$

Démonstration
Étape 1. Si $\vec{n}$ est normal à P, il est orthogonal aux vecteurs de direction $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ (expressions du produit scalaire, point 4).

Étape 2. Réciproquement, supposons $\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, et soit $\vec{w}$ un vecteur de direction de P. Il est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non colinéaires : il existe des réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ (chapitre sur les vecteurs de l'espace). Par les propriétés de calcul du produit scalaire, $\vec{n} \cdot \vec{w} = \alpha\,(\vec{n} \cdot \vec{u}) + \beta\,(\vec{n} \cdot$

$\vec{v}) = 0$. Donc $\vec{n}$, non nul, est orthogonal à tout vecteur de direction de P : il est normal à P.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La réciproque repose sur deux outils. D'abord, tout vecteur de direction s'écrit $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Ensuite, la linéarité donne :

$$\begin{aligned}&\vec{n} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \\ &= \alpha\,(\vec{n} \cdot \vec{u}) + \beta\,(\vec{n} \cdot \vec{v}).\end{aligned}$$

Deux tests suffisent donc, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Vérifie : Une hypothèse indispensable

Dans cette propriété, pourquoi faut-il $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires ?

A. Pour que le plan P passe bien par le point A.

Faux.

Faux. Le plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ passe toujours par A.

B. Pour que le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ soit nul.

Faux.

Faux. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas à être orthogonaux.

C. Pour écrire tout vecteur de direction sous la forme $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Juste.

C'est juste. Avec deux vecteurs colinéaires, on n'obtient que les vecteurs d'une seule direction.

D. Pour être sûr que le vecteur $\vec{n}$ n'est pas le vecteur nul.

Faux.

Faux. La non-nullité de $\vec{n}$ est une hypothèse à part.

Correction

Avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires, la condition $\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ ne teste qu'une direction.

Dans le cube, $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $2\overrightarrow{AB}$. Pourtant, il n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{AF}$, qui dirige aussi le plan (ABF) : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = AE^2 = 1$.

Trouver un vecteur normal

Exemple : un vecteur normal au plan (ABC)

Dans un repère orthonormé, soit $A(1, 0, 1)$, $B(2, 2, 1)$ et $C(2, 0, 0)$. On a $\overrightarrow{AB}(1, 2, 0)$ et $\overrightarrow{AC}(1, 0, -1)$.

Non-colinéarité. Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, la deuxième coordonnée donne $k = 0$, puis la première $1 = 0$: c'est impossible.

Recherche de $\vec{n}$. On cherche $\vec{n}(a,b,c)$ non nul tel que :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=a+2b=0,$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=a-c=0.$$

Ce système a une infinité de solutions, toutes colinéaires entre elles : un vecteur normal se choisit à un coefficient près. On en fixe donc une coordonnée, $a=2$ pour éviter les fractions : alors $b=-1$ et $c=2$.

Vérification.

$$2\times1+(-1)\times2+2\times0=0,$$
$$2\times1+(-1)\times0+2\times(-1)=0.$$

Donc $\vec{n}(2,-1,2)$ est normal au plan (ABC).

Attention : Vecteur normal et vecteur de direction ne se confondent pas

Dans un repère orthonormé, soit le plan Q d'équation $x+2y+2z-3=0$. Ses vecteurs de direction $\vec{w}(\alpha,\beta,\gamma)$ vérifient $\alpha+2\beta+2\gamma=0$, c'est-à-dire $(1,2,2)\cdot\vec{w}=0$.

✗ « Le vecteur $(1,2,2)$ dirige le plan Q. »

✓ Il est orthogonal à chaque vecteur de direction, par exemple à $\vec{w}(2,-1,0)$: $1\times2+2\times(-1)+2\times0=0$.

Il ne dirige pas Q, car $1\times1+2\times2+2\times2=9\neq0$.

À toi : Vérifier un vecteur normal

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Soit $A(0,1,2)$, $B(2,0,2)$, $C(0,2,1)$ et $\vec{n}(1,2,2)$. Rédige la preuve que $\vec{n}$ est normal au plan (ABC). Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis vérifie qu'ils ne sont pas colinéaires.
Indice 2
Calcule $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}$ terme à terme.
Indice 3
Nomme la propriété utilisée, et n'oublie pas que $\vec{n}$ est non nul.

Réponse
On a $\overrightarrow{AB}(2,-1,0)$ et $\overrightarrow{AC}(0,1,-1)$.

Non-colinéarité. Si $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$, la première coordonnée donne $2=0$: c'est impossible.

Produits scalaires. Le repère est orthonormé :

$$\begin{aligned}&\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=1\times 2+2\times(-1)\\&\quad+2\times 0=0,\\&\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=1\times 0+2\times 1\\&\quad+2\times(-1)=0.\end{aligned}$$

Conclusion. Le vecteur $\vec{n}$ est non nul et orthogonal à deux vecteurs de direction non colinéaires du plan (ABC). D'après la propriété du vecteur normal et de deux vecteurs de direction, il est normal à (ABC).

Équation d'un plan par un vecteur normal

Un point et une direction

Devine : Le plan horizontal

Dans un repère orthonormé, un plan passe par l'origine O et admet $\vec{k}(0,0,1)$ pour vecteur normal. Quelle est, à ton avis, son équation ?

A. $z=1$

Faux.

Faux. Ce plan ne passe pas par l'origine.

B. $x+y=0$

Faux.

Faux. Ce plan contient la droite $D(O,\vec{k})$: $\vec{k}$ le dirige au lieu de lui être normal.

C. $x=0$

Faux.

Faux. Ce plan contient lui aussi la droite verticale $D(O,\vec{k})$.

D. $z=0$

Juste.

C'est juste. Ses vecteurs de direction sont orthogonaux à $\vec{k}$: leur troisième coordonnée est nulle.

Correction

Un point $M(x,y,z)$ convient si et seulement si $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{k}=0$, c'est-à-dire :

$$x\times 0+y\times 0+z\times 1=0,$$

soit $z=0$. C'est le plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$.

Petit rappel du chapitre précédent. Si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan. Tout plan admet une telle **équation cartésienne**. Tu l'obtenais avec un déterminant ; le vecteur normal offre un chemin plus court.

L'idée, avant l'énoncé. Un point M est dans le plan cherché quand $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur de direction. Il est alors orthogonal à $\vec{n}$: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. En coordonnées, cette condition est une équation du premier degré en x, y, z.

Équation et vecteur normal

Théorème : Plan défini par un point et un vecteur normal

Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur **non nul**.

1. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est un plan. C'est l'**unique** plan qui passe par A et admet $\vec{n}$ pour vecteur normal.
2. Dans un repère orthonormé, si $\vec{n}(a,b,c)$ et $A(x_A,y_A,z_A)$, ce plan a pour équation cartésienne

$$ax+by+cz+d=0, \quad \text{avec } d=-(ax_A+by_A+cz_A).$$

Démonstration

Étape 1. Fixons un repère orthonormé, avec $\vec{n}(a,b,c)$. Pour $M(x,y,z)$, l'expression analytique donne $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) = ax+by+cz+d$. Comme $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, l'ensemble P de ces points est un plan (chapitre précédent) ; il contient A.

Étape 2. Un vecteur $\vec{w}(\alpha,\beta,\gamma)$ est un vecteur de direction de P si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ (chapitre précédent), c'est-à-dire $\vec{n}\cdot\vec{w}=0$. Donc $\vec{n}$ est normal à P.

Étape 3. Soit Q un plan passant par A, de vecteur normal $\vec{n}$. Pour tout $M \in Q$, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur de direction de Q, donc $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ et $M \in P$. Ainsi $Q \subset P$; deux plans dont l'un contient l'autre sont égaux (tronc commun) : $Q=P$.

Et dans l'autre sens ? Une équation cartésienne étant donnée, ses trois premiers coefficients forment-ils un vecteur normal ? La preuve emploie encore la condition des vecteurs de direction du chapitre précédent.

Propriété : Vecteur normal lu sur une équation cartésienne

Dans un repère orthonormé, soit P un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$. Alors :

- le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est normal au plan P ;
- tout plan admet un vecteur normal ; deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires et, réciproquement, tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal de P est normal à P.

Démonstration

Étape 1. Le triplet (a, b, c) est non nul (chapitre précédent), donc $\vec{n} \neq \vec{0}$. Un vecteur de direction $\vec{w}(\alpha, \beta, \gamma)$ de P vérifie $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ (chapitre précédent), c'est-à-dire $\vec{n} \cdot \vec{w} = 0$ (expression analytique) : $\vec{n}$ est normal à P. Tout plan admet une équation cartésienne (chapitre précédent), donc un vecteur normal.

Étape 2. Soit $\vec{n}'(a', b', c')$ normal à P et $A \in P$. Par le plan défini par un point et un vecteur normal, P a aussi pour équation $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Les triplets (a, b, c) et (a', b', c') sont donc proportionnels (plans parallèles en coordonnées, chapitre précédent) : $\vec{n}'$ est colinéaire à $\vec{n}$, non nul. Deux vecteurs normaux à P sont donc colinéaires entre eux.

Étape 3. Si $\vec{m} = \lambda\vec{n}$ est non nul, alors, pour tout vecteur de direction $\vec{w}$ de P, $\vec{m} \cdot \vec{w} = \lambda\,(\vec{n} \cdot \vec{w}) = 0$ (propriétés de calcul) : $\vec{m}$ est normal à P.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les deux preuves reposent sur une même équivalence du chapitre précédent : $\vec{w}(\alpha, \beta, \gamma)$ dirige le plan si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$. Dans un repère orthonormé, cette somme est le produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{w}$. L'unicité vient ensuite d'une inclusion entre deux plans.

Vérifie : Un multiple du vecteur normal

Dans un repère orthonormé, le plan P : $3x - z + 5 = 0$ admet $\vec{n}(3, 0, -1)$ pour vecteur normal. À l'étape 3 de la preuve, pourquoi $\vec{m}(-6, 0, 2)$ est-il aussi normal à P ?

A. Il est non nul, et $\vec{m} \cdot \vec{w} = -2\,(\vec{n} \cdot \vec{w}) = 0$ pour tout vecteur de direction $\vec{w}$.
Juste.
C'est juste. On a $\vec{m} = -2\vec{n}$, et les propriétés de calcul font le reste.

B. Parce que ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan P.
Faux.
Faux. Un vecteur ne se teste pas comme un point ; d'ailleurs $3 \times (-6) - 2 + 5 = -15 \neq 0$.

C. Parce que le vecteur $\vec{m}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$.
Faux.
Faux. $(-6) \times 3 + 0 \times 0 + 2 \times (-1) = -20 \neq 0$, et un vecteur orthogonal à $\vec{n}$ dirigerait P.

D. Parce que tout vecteur non nul de l'espace est normal au plan P.
Faux.
Faux. Le vecteur $(1, 0, 3)$ dirige P, car $3 \times 1 + 0 \times 0 + (-1) \times 3 = 0$: il ne lui est pas normal.

Correction

Le repère est orthonormé : d'après le vecteur normal lu sur une équation, $\vec{n}(3, 0, -1)$ est normal à P. On a $\vec{m} = -2\vec{n}$, non nul.

> Pour tout vecteur de direction $\vec{w}$ de P, les propriétés de calcul donnent $\vec{m} \cdot \vec{w} = -2\,(\vec{n} \cdot \vec{w}) = 0$.
>
> C'est l'étape 3 de la preuve : $\vec{m}$ est normal à P, comme tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$.

Écrire une équation

Méthode : Écrire une équation d'un plan par un vecteur normal

1. **Trouver** un point A du plan et un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$. Pour le plan (ABC), cherche $\vec{n}$ non nul orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, en fixant une coordonnée.
2. **Traduire** $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ dans le repère orthonormé : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.
3. **Développer** pour obtenir $ax + by + cz + d = 0$.
4. **Vérifier** que chaque point donné satisfait l'équation.

Exemple : un point et un vecteur normal

Dans un repère orthonormé, cherchons le plan P qui passe par $A(1, -2, 3)$ et admet $\vec{n}(1, -2, 2)$ pour vecteur normal. Un point $M(x, y, z)$ est dans P si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &1(x - 1) - 2(y + 2) \\ &\quad + 2(z - 3) = 0 \\ &x - 2y + 2z - 11 = 0. \end{aligned}$$

Vérification. $1 - 2 \times (-2) + 2 \times 3 - 11 = 0$: le point A est bien dans P.

Le plan par trois points

Exemple : l'équation du plan (ABC)

Reprends $A(1, 0, 1)$, $B(2, 2, 1)$, $C(2, 0, 0)$ et le vecteur normal $\vec{n}(2, -1, 2)$ trouvé à la section précédente.

Dans le repère orthonormé, le plan (ABC) a une équation de la forme $2x - y + 2z + d = 0$. Il passe par A : $2 \times 1 - 0 + 2 \times 1 + d = 0$, donc $d = -4$.

Vérification. On obtient (ABC) : $2x - y + 2z - 4 = 0$.

- Pour B : $2 \times 2 - 2 + 2 \times 1 - 4 = 0$.
- Pour C : $2 \times 2 - 0 + 2 \times 0 - 4 = 0$.

> **À toi : Un plan orthogonal à une droite**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Soit $A(2,1,-1)$, $B(1,0,3)$ et $C(2,2,1)$. Rédige la recherche d'une équation cartésienne du plan P qui passe par A et admet $\overrightarrow{BC}$ pour vecteur normal. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ et vérifie qu'il est non nul.
Indice 2
Écris $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ avec $M(x,y,z)$, dans le repère orthonormé.
Indice 3
Développe, puis vérifie que A satisfait l'équation obtenue.

Réponse
On a $\overrightarrow{BC}(1,2,-2)$, non nul. D'après le plan défini par un point et un vecteur normal, $M(x,y,z)$ appartient à P si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$:

$$\begin{aligned}1(x-2)+2(y-1)&\\ -2(z+1)&=0\\ x+2y-2z-6&=0.\end{aligned}$$

Vérification. $2+2\times1-2\times(-1)-6=0$.

Conclusion. Le plan P a pour équation cartésienne $x+2y-2z-6=0$.

Plans parallèles

Deux équations, deux plans

Devine : Parallèles ou non

Dans un repère orthonormé, soit $P : x-2y+2z-11=0$ et $P' : -2x+4y-4z+3=0$. À ton avis, ces deux plans sont-ils parallèles ?

A. Oui, et ils sont même confondus.
Faux.
Faux. Le point $A(1,-2,3)$ de P ne vérifie pas l'équation de P'.

B. Oui, car leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
Juste.
C'est juste. $(-2,4,-4)=-2(1,-2,2)$.

C. Non, car leurs termes constants sont différents.
Faux.
Faux. Les termes constants disent seulement si les plans sont confondus ou distincts.

D. Non, car leurs coefficients n'ont pas les mêmes signes.
Faux.
Faux. Des coefficients proportionnels peuvent changer de signe ensemble : le facteur est -2.

Correction
Les vecteurs $\vec{n}(1,-2,2)$ et $\vec{n}'(-2,4,-4)$ sont normaux à P et à P'. On a $\vec{n}' = -2\vec{n}$: ils sont colinéaires, et les plans sont parallèles.

Ils sont distincts, car $A(1,-2,3)$ est dans P mais pas dans P' : $-2 \times 1 + 4 \times (-2) - 4 \times 3 + 3 = -19$.

L'idée, avant l'énoncé. Au chapitre précédent, deux plans sont parallèles si et seulement si les triplets (a,b,c) de leurs équations sont proportionnels. Or ces triplets sont des vecteurs normaux. Il reste à passer d'un vecteur normal quelconque à celui qu'on lit sur l'équation.

La propriété

Propriété : Plans parallèles et vecteurs normaux

Soit P et P' deux plans, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Les plans P et P' sont **parallèles** si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.

Démonstration
Étape 1. Fixons un repère orthonormé, et des équations cartésiennes $ax+by+cz+d=0$ de P et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ de P' (chapitre précédent). D'après le vecteur normal lu sur une équation, $\vec{n}_0(a,b,c)$ est normal à P, et $\vec{n}$ lui est colinéaire ; de même, $\vec{n}'$ est colinéaire à $\vec{n}'_0(a',b',c')$. Ces quatre vecteurs sont non nuls.

Étape 2. Les plans P et P' sont parallèles si et seulement si les triplets (a,b,c) et (a',b',c') sont proportionnels (plans parallèles en coordonnées, chapitre précédent), c'est-à-dire si et seulement si $\vec{n}_0$ et $\vec{n}'_0$ sont colinéaires.

Étape 3. Des vecteurs non nuls colinéaires respectivement à $\vec{n}_0$ et à $\vec{n}'_0$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{n}_0$ et $\vec{n}'_0$ le sont. Donc P et P' sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On se ramène aux vecteurs normaux lus sur les équations. Deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires : la colinéarité passe de l'un à l'autre. La proportionnalité des triplets, vue au chapitre précédent, fait le reste.

Vérifie : La colinéarité se transmet

À l'étape 3 de la preuve, pourquoi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont-ils colinéaires dès que $\vec{n}_0$ et $\vec{n}'_0$ le sont ?

A. Parce que $\vec{n}$ est toujours égal au vecteur $\vec{n}_0$ lu sur l'équation.
Faux.

Faux. $\vec{n}$ est seulement colinéaire à $\vec{n}_0$: il peut valoir $2\vec{n}_0$.

B. Parce que les termes constants d et d' des deux équations sont égaux.

Faux.

Faux. Les termes constants ne jouent aucun rôle dans la colinéarité.

C. Ils sont non nuls et colinéaires l'un à $\vec{n}_0$, l'autre à $\vec{n}'_0$: la colinéarité se transmet.

Juste.

C'est juste. Des multiples non nuls de vecteurs colinéaires restent colinéaires.

D. Parce que deux plans parallèles sont toujours confondus.

Faux.

Faux. Deux plans parallèles peuvent être distincts.

Correction

À l'étape 1, $\vec{n} = \lambda\vec{n}_0$ et $\vec{n}' = \mu\vec{n}'_0$, avec λ et μ non nuls (vecteur normal lu sur une équation). Si $\vec{n}'_0 = k\vec{n}_0$, alors $\vec{n}' = \dfrac{\mu k}{\lambda}\vec{n}$: les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.

Exemple : un plan parallèle passant par un point

Dans un repère orthonormé, soit $P : 2x - y + 2z - 4 = 0$ et $M(3, 0, 1)$.

Le plan P' parallèle à P passant par M a un vecteur normal colinéaire à $\vec{n}(2, -1, 2)$ (plans parallèles et vecteurs normaux). Donc $\vec{n}$, non nul, est normal à P' (vecteur normal lu sur une équation).

Son équation s'écrit $2x - y + 2z + d = 0$, avec $2 \times 3 - 0 + 2 \times 1 + d = 0$. Donc $d = -8$.

Ainsi $P' : 2x - y + 2z - 8 = 0$.

Quand ça ne marche pas

Exemple : Contre-exemple : des vecteurs normaux non colinéaires

Dans un repère orthonormé, soit $Q : x + y - z = 0$ et $Q' : x + y + z - 2 = 0$. Leurs vecteurs normaux $(1, 1, -1)$ et $(1, 1, 1)$ ne sont pas colinéaires. Le rapport vaut 1 pour la première coordonnée, et -1 pour la troisième.

Les plans ne sont donc pas parallèles, malgré deux coefficients égaux. Ils sont sécants : le point $(1, 0, 1)$ vérifie les deux équations.

À toi : Parallèles et distincts

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Soit $P : 3x - 6y + 2z + 4 = 0$ et $P' : -6x + 12y - 4z + 1 = 0$. Rédige la preuve que P et P' sont parallèles et distincts. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Lis un vecteur normal de chaque plan sur son équation.
Indice 2
Cherche le réel k tel que $\vec{n}' = k\vec{n}$, puis nomme la propriété des plans parallèles.
Indice 3
Pour « distincts », trouve un point de P qui ne vérifie pas l'équation de P'.

Réponse
Parallélisme. Le repère est orthonormé : $\vec{n}(3, -6, 2)$ est normal à P et $\vec{n}'(-6, 12, -4)$ est normal à P'. Comme $\vec{n}' = -2\vec{n}$, ils sont colinéaires. D'après la propriété des plans parallèles et vecteurs normaux, P et P' sont parallèles.

Plans distincts. Le point $A(0, 0, -2)$ est dans P, car $3 \times 0 - 6 \times 0 + 2 \times (-2) + 4 = 0$. Il n'est pas dans P', car $-6 \times 0 + 12 \times 0 - 4 \times (-2) + 1 = 9 \neq 0$.

Conclusion. Les plans P et P' sont parallèles et distincts.

Droite orthogonale à un plan

Du tronc commun aux coordonnées

Petit rappel du tronc commun. Une droite est **orthogonale** à un plan si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan. Il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes du plan.

Petit rappel : la droite et son paramètre. La droite $D(A, \vec{u})$ passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{u}$, non nul. Ses points sont les M_t tels que $\overrightarrow{AM_t} = t\vec{u}$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Dans un repère de l'espace, si $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, cela s'écrit $x = x_A + \alpha t$, $y = y_A + \beta t$, $z = z_A + \gamma t$.

Devine : Une droite verticale

Même cube que plus haut (face $ABCD$ en dessous, $[AE]$ vertical). Dans son repère orthonormé, la droite (AE) est dirigée par $\overrightarrow{AE}(0, 0, 1)$. Le plan (ABC) a pour équation $z = 0$. À ton avis, (AE) est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

A. Non : la droite (AE) coupe le plan (ABC) au point A.
Faux.
Faux. Une droite orthogonale à un plan le coupe toujours en un point.

B. Oui, mais seulement parce qu'elle passe par le sommet A du cube.
Faux.
Faux. Toute droite dirigée par $\overrightarrow{AE}$ est orthogonale à ce plan, où qu'elle passe.

C. Non : il faudrait $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$.
Faux.
Faux. Il faut au contraire des produits scalaires nuls avec les vecteurs de direction.

D. Oui : $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AD}$, deux vecteurs de direction de (ABC).

Juste.

C'est juste. Une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan est orthogonale au plan. Reste à voir ce que cela donne avec un vecteur normal.

Correction

La droite (AE) est orthogonale à (AB) et à (AD), sécantes en A : elle est orthogonale au plan (ABC). De plus, $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$, et $\vec{k}(0, 0, 1)$ est normal au plan d'équation $z = 0$.

L'idée, avant l'énoncé. Une droite orthogonale au plan a un vecteur directeur orthogonal à tous les vecteurs de direction : c'est un vecteur normal. Or deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires. Tout se joue donc sur une colinéarité.

Le critère de colinéarité

Théorème : Droite orthogonale à un plan

Soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}$, et $D = D(A, \vec{u})$ une droite, avec $\vec{u} \neq \vec{0}$. La droite D est **orthogonale** au plan P si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Démonstration

Étape 1. Par définition (tronc commun), D est orthogonale à P si et seulement si elle est orthogonale à toute droite de P, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur de direction de P. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, cela signifie que $\vec{u}$ est normal à P.

Étape 2. Si $\vec{u}$ est normal à P, il est colinéaire à $\vec{n}$, car deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires (vecteur normal lu sur une équation).

Étape 3. Réciproquement, si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{n}$. Pour tout vecteur de direction $\vec{w}$ de P, les propriétés de calcul donnent $\vec{u} \cdot \vec{w} = \lambda\,(\vec{n} \cdot \vec{w}) = 0$. Donc $\vec{u}$ est normal à P, et D est orthogonale à P par l'étape 1.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour la droite, être orthogonale au plan, c'est avoir un vecteur directeur **normal** au plan. Ensuite, deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires. Le test se réduit donc à une colinéarité avec $\vec{n}$.

Vérifie : Le résultat utilisé

À l'étape 2 de la preuve, quel résultat montre que $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{n}$?

A. Deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires.

Juste.
C'est juste. C'est la seconde partie du vecteur normal lu sur une équation.

B. Deux plans parallèles ont des vecteurs normaux colinéaires.
Faux.
Faux. La preuve ne compare pas deux plans.

C. L'expression analytique du produit scalaire.
Faux.
Faux. Aucune coordonnée n'est utilisée à cette étape.

D. La norme d'un vecteur dans un repère orthonormé.
Faux.
Faux. Une colinéarité ne se prouve pas par une longueur.

Correction
À l'étape 1, $\vec{u}$ est normal au plan P, comme $\vec{n}$. D'après le vecteur normal lu sur une équation, deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires. Donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Droite orthogonale en pratique

Méthode : Montrer qu'une droite est orthogonale à un plan

1. **Trouver un vecteur normal** $\vec{n}$ du plan : le lire sur une équation, dans un repère orthonormé, ou le calculer.
2. **Écrire un vecteur directeur** $\vec{u}$ de la droite.
3. **Tester la colinéarité** : cherche un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{n}$.
4. **Autre voie** : montre que $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs de direction non colinéaires du plan.

Exemple : une droite orthogonale et sa représentation

Dans un repère orthonormé, soit P : $2x + 3y + 6z - 5 = 0$, de vecteur normal $\vec{n}(2, 3, 6)$.

Une droite donnée. La droite Δ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 - 6t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -12t \end{cases}$$

est dirigée par $\vec{u}(-4, -6, -12)$. Or $\vec{u} = -2\vec{n}$: la droite Δ est orthogonale à P.

Une droite à construire. La droite orthogonale à P passant par $A(1, -1, 2)$ est $D(A, \vec{n})$:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 2 + 6t \end{cases}$$

Droite parallèle à un plan

L'idée, avant l'énoncé. Le parallélisme d'une droite et d'un plan se lit sur le vecteur directeur : il doit diriger le plan. Dans un repère orthonormé, cette condition s'écrit $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Les autres points découlent du critère de colinéarité.

Propriété : Parallélisme et orthogonalité

Soit P et P' deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, et $D = D(A, \vec{u})$, $D' = D(A', \vec{u}')$ deux droites, avec $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ non nuls.

1. La droite D est parallèle au plan P si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.
2. Si D et D' sont orthogonales à P, elles sont parallèles.
3. Si P et P' sont orthogonaux à D, ils sont parallèles.
4. Si D est orthogonale à P et si P' est parallèle à P, alors D est orthogonale à P'.

Démonstration

Étape 1. La droite D est parallèle à P si et seulement si $\vec{u}$ dirige P (chapitre sur les vecteurs de l'espace). Dans un repère orthonormé où P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, cela équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{n}_0 = 0$, avec $\vec{n}_0(a, b, c)$ (chapitre précédent, expression analytique). Or $\vec{n} = \mu\vec{n}_0$, $\mu \neq 0$ (vecteur normal lu sur une équation), et $\vec{u} \cdot \vec{n} = \mu\,(\vec{u} \cdot \vec{n}_0)$ (propriétés de calcul) : c'est $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

Étape 2. Par la droite orthogonale à un plan, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, colinéaires à $\vec{n}$ non nul, sont colinéaires : D et D' sont parallèles.

Étape 3. De même, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, colinéaires à $\vec{u}$, sont colinéaires : P et P' sont parallèles (plans parallèles et vecteurs normaux).

Étape 4. Le vecteur $\vec{u}$, colinéaire à $\vec{n}$, est colinéaire à $\vec{n}'$ (plans parallèles et vecteurs normaux) : D est orthogonale à P' (droite orthogonale à un plan).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque point se ramène à des vecteurs. Le parallélisme utilise la condition des vecteurs de direction ; l'orthogonalité, la colinéarité avec un vecteur normal. La colinéarité se transmet : deux vecteurs colinéaires à un même vecteur non nul sont colinéaires entre eux.

Vérifie : Deux droites orthogonales au même plan

À l'étape 2 de la preuve, pourquoi deux droites orthogonales à un même plan sont-elles parallèles ?

A. Elles sont toutes les deux contenues dans le plan P.

Faux.

Faux. Une droite orthogonale à un plan n'y est jamais contenue.

B. Leurs vecteurs directeurs sont colinéaires au même vecteur non nul $\vec{n}$, donc entre eux.

Juste.

C'est juste. La colinéarité se transmet par $\vec{n}$, non nul.

C. Elles passent toutes les deux par un même point du plan.

Faux.

Faux. Les deux droites peuvent couper le plan en des points différents.

D. Leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux l'un à l'autre.

Faux.

Faux. Des vecteurs directeurs orthogonaux donneraient des droites orthogonales.

Correction

Par la droite orthogonale à un plan, $\vec{u} = \lambda\vec{n}$ et $\vec{u}' = \mu\vec{n}$, avec λ et μ non nuls. Alors $\vec{u}' = \dfrac{\mu}{\lambda}\vec{u}$: les vecteurs directeurs sont colinéaires, et D et D' sont parallèles.

Exemple : une droite parallèle au plan

Avec le même plan P : $2x + 3y + 6z - 5 = 0$, soit D' la droite passant par $B(0, 0, 1)$ et dirigée par $\vec{u}'(3, 0, -1)$.

Parallélisme. Dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned}\vec{u}' \cdot \vec{n} &= 3 \times 2 + 0 \times 3 + (-1) \times 6 \\ &= 0.\end{aligned}$$

La droite D' est donc parallèle à P.

Pas contenue. Elle n'est pas contenue dans P, car $2 \times 0 + 3 \times 0 + 6 \times 1 - 5 = 1 \neq 0$.

Une confusion à éviter

Attention : Orthogonales ne veut pas dire sécantes

Dans l'espace, un produit scalaire nul des vecteurs directeurs ne donne aucun point commun.

✗ « $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, donc (AE) et (BC) se coupent. »

✓ Dans le repère orthonormé du cube, les points de (AE) ont $x = 0$, ceux de (BC) ont $x = 1$: aucun point commun. Ces droites sont **orthogonales** sans être **perpendiculaires**, mot réservé à deux droites orthogonales et sécantes. Pour une intersection, résous un système.

À toi : Orthogonale, puis le point commun

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Soit P : $x - 2y + 2z - 1 = 0$ et la droite D de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Rédige la preuve que D est orthogonale à P, puis détermine leur point commun. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Lis un vecteur directeur de D et un vecteur normal de P.
Indice 2
Compare-les : le critère de la droite orthogonale à un plan demande une colinéarité.
Indice 3
Pour le point commun, remplace x, y, z dans l'équation de P : tu obtiens une équation en t.

Réponse
Orthogonalité. La droite D est dirigée par $\vec{u}(1, -2, 2)$. Le repère est orthonormé : $\vec{n}(1, -2, 2)$ est normal à P. Comme $\vec{u} = \vec{n}$, la droite D est orthogonale à P, d'après la droite orthogonale à un plan.

Point commun. En remplaçant x, y, z dans l'équation de P :

$$\begin{aligned} &(2 + t) - 2(-1 - 2t) \\ &\quad + 2(3 + 2t) - 1 \\ &= 9t + 9, \end{aligned}$$

qui s'annule pour $t = -1$. Le point commun est $(1, 1, 1)$; il vérifie $1 - 2 \times 1 + 2 \times 1 - 1 = 0$.

Conclusion. D est orthogonale à P et la coupe au point $(1, 1, 1)$.

Plans perpendiculaires

Deux faces du cube

Devine : Deux faces voisines

Même cube que plus haut (face $ABCD$ en dessous, $[AE]$ vertical). Dans son repère orthonormé, la face $ABCD$ est dans le plan $z = 0$ et la face $ABFE$ dans le plan $y = 0$. Que vaut le produit scalaire de leurs vecteurs normaux $\vec{k}(0, 0, 1)$ et $\vec{j}(0, 1, 0)$?

A. 0

Juste.
C'est juste. Et ces deux faces voisines sont perpendiculaires : est-ce une coïncidence ?

B. 1

Faux.
Faux. Le produit terme à terme vaut $0 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$.

C. -1

Faux.
Faux. Aucun des trois produits n'est négatif : ils sont tous nuls.

Correction
$\vec{k} \cdot \vec{j} = 0 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$. Les deux faces sont perpendiculaires : la droite (AE), contenue dans la face $ABFE$, est orthogonale à la face $ABCD$.

Petit rappel du tronc commun. Deux plans sont **perpendiculaires** si l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre. Avec les vecteurs normaux, cette définition devient un calcul.

Le critère

L'idée, avant l'énoncé. Si P contient une droite orthogonale à P', cette droite est dirigée par un multiple de $\vec{n}'$. Comme elle est dans P, ce multiple est orthogonal à $\vec{n}$. Réciproquement, on construit cette droite à partir de $\vec{n}'$.

Propriété : Plans perpendiculaires

Soit P et P' deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Les plans P et P' sont **perpendiculaires** si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.

Démonstration

Étape 1. Par définition (tronc commun), P et P' sont perpendiculaires si P contient une droite orthogonale à P'. Supposons-le, et soit $D(B, \vec{u})$ une telle droite. Par la droite orthogonale à un plan, $\vec{u} = \lambda \vec{n}'$ avec $\lambda \neq 0$. Comme $\vec{u}$ est un vecteur de direction de P, $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, d'où $\lambda\,(\vec{n} \cdot \vec{n}') = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.

Étape 2. Réciproquement, supposons $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$, et soit B un point de P. La droite $D(B, \vec{n}')$ est parallèle à P (parallélisme et orthogonalité, point 1) et passe par un point de P : elle est contenue dans P (chapitre précédent). Elle est orthogonale à P' (droite orthogonale à un plan). Donc P et P' sont perpendiculaires.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Dans les deux sens, on utilise une droite dirigée par $\vec{n}'$. Elle est orthogonale à P', par la droite orthogonale à un plan. Elle est parallèle à P dès que $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$; si elle passe par un point de P, elle y est contenue.

Vérifie : Une droite contenue dans le plan

Dans le sens réciproque, pourquoi la droite $D(B, \vec{n}')$ est-elle contenue dans P ?

A. Elle est orthogonale au plan P', car elle est dirigée par $\vec{n}'$.

Faux.

Faux. C'est vrai, mais cela ne dit rien de sa position par rapport à P.

B. Le vecteur $\vec{n}'$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$ de P.

Faux.

Faux. On a $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$: des vecteurs non nuls colinéaires ne sont jamais orthogonaux.

C. Toute droite qui passe par un point de P est contenue dans P.

Faux.

Faux. Une droite qui coupe P en un seul point passe par un point de P sans y être contenue.

D. Elle est parallèle à P, car $\vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$, et elle passe par le point B de P.

Juste.

C'est juste. Une droite parallèle à un plan, qui a un point dans ce plan, y est contenue.

Correction

D'après le parallélisme et l'orthogonalité (point 1), la droite $D(B, \vec{n}')$ est parallèle à P, car $\vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$. Elle passe par le point B de P. Une droite parallèle à un plan qui a un point dans ce plan y est contenue (chapitre précédent).

Perpendiculaires en pratique

Exemple : un paramètre pour deux plans perpendiculaires

Dans un repère orthonormé, soit P : $x + 2y - z + 3 = 0$ et, pour un réel m, P_m : $2x + my + 4z - 1 = 0$. Leurs vecteurs normaux sont $\vec{n}(1, 2, -1)$ et $\vec{n}_m(2, m, 4)$. On a :

$$\begin{aligned} &\vec{n} \cdot \vec{n}_m \\ &= 1 \times 2 + 2 \times m + (-1) \times 4 \\ &= 2m - 2. \end{aligned}$$

Les plans sont perpendiculaires si et seulement si $2m - 2 = 0$, c'est-à-dire $m = 1$.

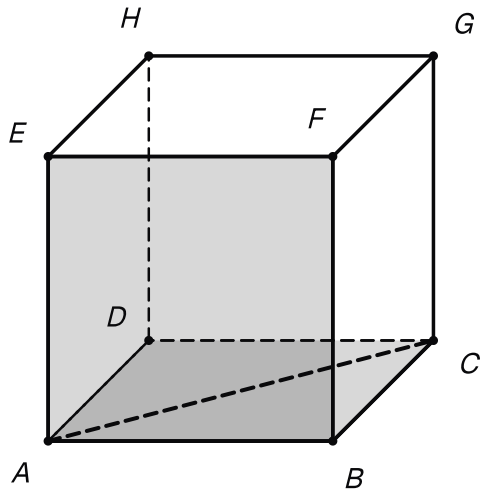
Attention : Plans perpendiculaires : pas toutes les droites

Les faces $ABCD$ et $ABFE$ du cube sont perpendiculaires. Pourtant, la droite (AC) de la face $ABCD$ n'est pas orthogonale à la face $ABFE$.

✗ « Toute droite de P est orthogonale à P'. »

✓ Dans le repère orthonormé du cube, $\overrightarrow{AC}(1,1,0)$ n'est pas colinéaire au vecteur normal $\vec{j}(0,1,0)$ de $ABFE$.

Seules les droites de P dirigées par un vecteur colinéaire à $\vec{n}'$ sont orthogonales à P'. La perpendicularité se prouve par $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$.



Les faces ABCD et ABFE sont perpendiculaires, mais la droite (AC) de la première n'est pas orthogonale à la seconde.

À toi : Deux plans perpendiculaires

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Soit $P : x+y+z-3=0$, $P' : x-2y+z+4=0$, $\vec{n}'(1,-2,1)$ et $A(1,1,1)$. Rédige la preuve que P et P' sont perpendiculaires, puis que la droite $D(A,\vec{n}')$ est contenue dans P. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Lis les vecteurs normaux sur les équations, puis calcule leur produit scalaire terme à terme.
Indice 2
Vérifie que A est dans P : la droite passe alors par un point de P.
Indice 3
Une droite parallèle à un plan, qui a un point dans ce plan, y est contenue.

Réponse
Plans perpendiculaires. Le repère est orthonormé : $\vec{n}(1,1,1)$ est normal à P et $\vec{n}'(1,-2,1)$ à P'.
On a :

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{n}' &= 1 \times 1 + 1 \times (-2) \\ &\quad + 1 \times 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'après les plans perpendiculaires, P et P' sont perpendiculaires.

La droite. On a $1 + 1 + 1 - 3 = 0$, donc le point A est dans P. La droite $D(A, \vec{n}')$ est parallèle à P, car $\vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$. Elle passe par le point A de P : elle est contenue dans P. De plus, elle est orthogonale à P', car elle est dirigée par $\vec{n}'$.

Conclusion. P et P' sont perpendiculaires, et $D(A, \vec{n}')$ est une droite de P orthogonale à P'.

Projeté orthogonal et distance d'un point à un plan

Le point le plus proche

Devine : Au-dessus d'un plan horizontal

Dans un repère orthonormé, soit le plan $z = 1$ et le point $M(2, -1, 5)$. Quel point du plan est, à ton avis, le plus proche de M ?

A. $(2, -1, 1)$

Juste.

C'est juste. On descend à la verticale : le segment est orthogonal au plan, et sa longueur est 4.

B. $(0, 0, 1)$

Faux.

Faux. Ce point est dans le plan, mais à la distance $\sqrt{21}$ de M, plus grande que 4.

C. $(2, -1, 0)$

Faux.

Faux. Ce point n'est pas dans le plan : sa cote est 0, pas 1.

D. $(0, 0, 0)$

Faux.

Faux. L'origine n'est pas dans le plan $z = 1$.

Correction

Le point $(2, -1, 1)$ est dans le plan, et le vecteur qui va de M à ce point est $(0, 0, -4)$, normal au plan.

Pour tout point $N(x, y, 1)$ du plan, dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned}MN^2 &= (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + 16 \\ &\geq 16.\end{aligned}$$

Le minimum 4 est atteint en $(2, -1, 1)$ seulement.

L'idée, avant l'énoncé. On part de M dans la direction du vecteur normal : on suit la droite $D(M, \vec{n})$. Elle coupe le plan en un seul point, car elle lui est orthogonale. Le paramètre de ce point se lit sur une équation du premier degré.

Projeté et distance

Propriété : Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Dans un repère orthonormé, soit P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, $\vec{n}(a, b, c)$, et $M(x_0, y_0, z_0)$ un point. La droite $D(M, \vec{n})$, orthogonale à P, coupe P en un **seul** point H, appelé **projeté orthogonal** de M sur P, et

$$\overrightarrow{MH} = t_0\,\vec{n}, \quad \text{avec } t_0 = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Le point H est l'unique point de P tel que $\overrightarrow{MH}$ soit colinéaire à $\vec{n}$.

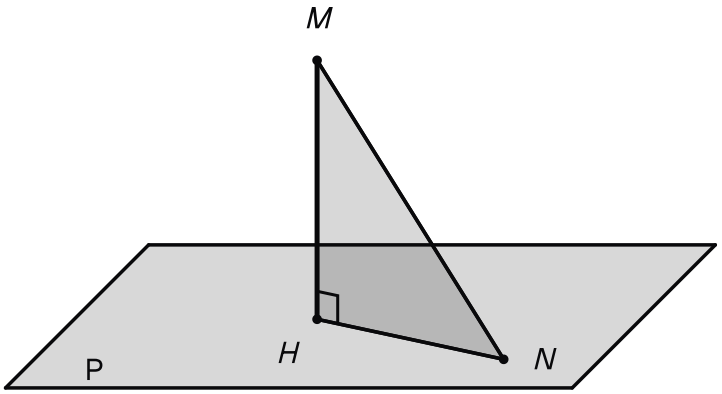
Démonstration

Étape 1. Le vecteur $\vec{n}$ est normal à P (vecteur normal lu sur une équation), donc $D(M, \vec{n})$ est orthogonale à P (droite orthogonale à un plan). Ses points sont les $M_t(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$, pour $t \in \mathbb{R}$ (chapitre précédent).

Étape 2. Le point M_t appartient à P si et seulement si $(a^2 + b^2 + c^2)\,t + (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0$. Comme $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, on a $a^2 + b^2 + c^2 > 0$: cette équation a une seule solution, t_0. Le point $H = M_{t_0}$ vérifie $\overrightarrow{MH} = t_0\,\vec{n}$.

Étape 3. Si $H' \in P$ et $\overrightarrow{MH'} = t\,\vec{n}$ pour un réel t, alors $H' = M_t$ appartient à P, donc $t = t_0$ et $H' = H$.

Pourquoi est-ce le plus court ? Pour un point N du plan, le triangle MHN a un angle droit en H. Le théorème de Pythagore, écrit avec le produit scalaire, compare alors MN et MH.



Le projeté orthogonal H de M sur le plan P et un point N du plan : le triangle MHN est rectangle en H.

Théorème : Distance d'un point à un plan

Avec les notations du projeté orthogonal, pour tout point N du plan P,

$$MN^2 = MH^2 + HN^2;$$

en particulier $MN \geq MH$, avec égalité si et seulement si $N = H$. La **distance** du point M au plan P est $d(M, P) = MH$, et

$$d(M, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Démonstration

Étape 1. Soit $N \in P$. Les points H et N sont dans P, donc $\overrightarrow{HN}$ est un vecteur de direction de P, ou le vecteur nul. Comme $\overrightarrow{MH} = t_0\,\vec{n}$ et que $\vec{n}$ est normal à P (vecteur normal lu sur une équation), on a $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HN} = t_0\,(\vec{n} \cdot \overrightarrow{HN}) = 0$.

Étape 2. Par la relation de Chasles et les propriétés de calcul du produit scalaire, $MN^2 = \|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HN}\|^2 = MH^2 + 2\,\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HN} + HN^2 = MH^2 + HN^2$. Donc $MN^2 \geq MH^2$, avec égalité si et seulement si $HN = 0$, c'est-à-dire $N = H$.

Étape 3. Par les propriétés de calcul et la norme en repère orthonormé, $MH = |t_0|\,\|\vec{n}\| = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, ce qui donne la formule annoncée.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées portent ces preuves. D'abord, H est le point de paramètre t_0 de la droite $D(M, \vec{n})$: une équation du premier degré le donne.

Ensuite, $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{HN}$, donc $MN^2 = MH^2 + HN^2$. La formule de la distance est $MH = |t_0|\,\|\vec{n}\|$.

Vérifie : L'angle droit en H

Pour un point N du plan P, pourquoi a-t-on $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HN} = 0$?

A. Le point N est toujours confondu avec le point H.

Faux.

Faux. N est un point quelconque du plan.

B. $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à $\vec{n}$, et $\overrightarrow{HN}$ dirige le plan P ou est nul.

Juste.

C'est juste. Le vecteur normal est orthogonal à tout vecteur de direction du plan.

C. $\overrightarrow{HN}$ est colinéaire à $\vec{n}$, tout comme le vecteur $\overrightarrow{MH}$.

Faux.

Faux. H et N sont dans P : $\overrightarrow{HN}$ dirige le plan, il ne lui est pas normal.

D. Les longueurs MH et HN sont toujours égales entre elles.

Faux.

Faux. Elles n'ont aucune raison d'être égales, et l'égalité ne donnerait pas un angle droit.

Correction

On a $\overrightarrow{MH} = t_0\,\vec{n}$. Les points H et N sont dans P : $\overrightarrow{HN}$ est un vecteur de direction de P, ou le vecteur nul. Donc $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HN} = t_0\,(\vec{n} \cdot \overrightarrow{HN}) = 0$.

Calculer un projeté et une distance

Méthode : Projeté orthogonal et distance d'un point à un plan

1. **Paramétrer** la droite qui passe par M et qui est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.
2. **Remplacer** dans l'équation du plan : une équation du premier degré en t donne t_0, puis le projeté H.
3. **Calculer** la distance MH, ou directement $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
4. **Contrôler** : H vérifie l'équation du plan, et les deux calculs donnent la même distance.

Exemple : un projeté et une distance, par deux voies

Dans un repère orthonormé, soit $P : x + 2y + 2z - 3 = 0$, $\vec{n}(1, 2, 2)$ et $M(3, 5, 4)$.

Projeté. Le point $M_t(3 + t, 5 + 2t, 4 + 2t)$ est dans P si et seulement si :

$$(3+t)+2(5+2t) \\ +2(4+2t)-3=0,$$

soit $9t+18=0$. Donc $t_0=-2$ et $H(1,1,0)$. Contrôle : $1+2\times1+2\times0-3=0$.

Première voie. On a $\overrightarrow{MH}(-2,-4,-4)$, donc :

$$\begin{aligned} MH &= \sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-4)^2} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Seconde voie. Par la distance d'un point à un plan :

$$\begin{aligned} &d(M,P) \\ &= \frac{|3+2\times5+2\times4-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \\ &= \frac{18}{3}=6. \end{aligned}$$

Rédiger sans erreur

Attention : Distance d'un point à un plan : la valeur absolue et la racine

Dans le même repère orthonormé, reprends le plan $P : x+2y+2z-3=0$ et le point $M(3,5,4)$.

✗ « $d(M,P)=\dfrac{18}{1^2+2^2+2^2}=2.$ » La racine du dénominateur est oubliée.

✓ Le dénominateur est la norme $\|\vec{n}\|=\sqrt{9}=3$, donc $d(M,P)=6$.

✗ Pour $K(-1,-1,0)$: « $d(K,P)=\dfrac{-6}{3}=-2.$ » Une distance n'est jamais négative.

✓ On garde la valeur absolue :

$$\begin{aligned} &d(K,P) \\ &= \frac{|(-1)+2\times(-1)+2\times0-3|}{3} \\ &= \frac{6}{3}=2. \end{aligned}$$

Le mot du prof. Cette formule te servira jusqu'à la fin du chapitre, pour la sphère aussi. Si le calcul te paraît long, refais l'exemple en cachant la solution.

À toi : Projeté et distance

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Soit $P : 2x-y+2z+1=0$ et $A(1,0,3)$. Rédige le calcul du projeté orthogonal H de A sur P, puis de la distance $d(A,P)$ par les deux voies. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris le point A_t de la droite $D(A,\vec{n})$, avec $\vec{n}(2,-1,2)$.
Indice 2

Remplace ses coordonnées dans l'équation de P : tu obtiens une équation du premier degré en t.

Indice 3

Calcule AH, puis la formule de la distance, avec la valeur absolue et la racine.

Réponse

Projeté. Le repère est orthonormé : $\vec{n}(2,-1,2)$ est normal à P. Le point $A_t(1+2t,-t,3+2t)$ est dans P si et seulement si :

$$\begin{aligned}&2(1+2t)-(-t)\\&\quad+2(3+2t)+1=0,\end{aligned}$$

soit $9t+9=0$. Donc $t_0=-1$ et $H(-1,1,1)$. Contrôle : $2\times(-1)-1+2\times1+1=0$.

Première voie. On a $\overrightarrow{AH}(-2,1,-2)$ et $AH=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}=3$.

Seconde voie. On a $|2\times1-0+2\times3+1|=9$; la distance d'un point à un plan donne :

$$\begin{aligned}&d(A,P)\\&=\frac{9}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}\\&=\frac{9}{3}=3.\end{aligned}$$

Conclusion. Le projeté de A sur P est $H(-1,1,1)$, et $d(A,P)=3$.

Remarque : Coin devoir : « Calcule la distance du point M au plan P »

Dans un devoir surveillé, cette question se rédige en trois temps, chacun justifié.

D'abord, annonce le cadre : « Le repère est orthonormé, et $\vec{n}(a,b,c)$ est normal à P. »

Ensuite, écris la formule et nomme le résultat : « $d(M,P)=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, d'après la distance d'un point à un plan. »

Enfin, calcule et conclus par une valeur exacte. Si l'énoncé demande aussi le projeté, donne t_0, puis H, et vérifie que H est dans P.

Sphère : définition et équation

Tous à la même distance

Devine : À la distance 5 de l'origine

Dans un repère orthonormé, lequel de ces points est à la distance 5 de l'origine O ?

A. $(2,3,0)$

Faux.

Faux. $2^2+3^2+0^2=13$: la distance est $\sqrt{13}$.

B. $(5, 5, 5)$

Faux.

Faux. La distance vaut $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$, pas 5.

C. $(3, 0, 4)$

Juste.

C'est juste. $3^2 + 0^2 + 4^2 = 25$, et $\sqrt{25} = 5$.

D. $(1, 2, 2)$

Faux.

Faux. $1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$: ce point est à la distance 3.

Correction

On calcule le carré de la distance à O : $3^2 + 0^2 + 4^2 = 25 = 5^2$. Les points à la distance 5 de O sont nombreux : $(5, 0, 0)$, $(0, -3, 4)$… Ils forment une **sphère**.

Définition : Sphère

Soit Ω un point et R un réel **strictement positif**.

- La **sphère** de centre Ω et de rayon R, notée $S(\Omega, R)$, est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.
- Si A et B sont deux points distincts, la **sphère de diamètre** $[AB]$ est la sphère de centre le milieu de $[AB]$ et de rayon $\dfrac{AB}{2}$.

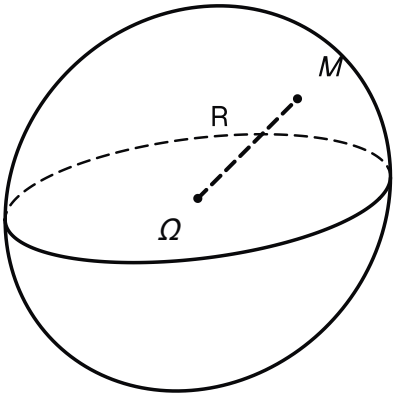
Exemple : des points d'une sphère

Dans un repère orthonormé, soit S la sphère de centre $\Omega(1, -2, 3)$ qui passe par $A(3, -1, 1)$. On a $\overrightarrow{\Omega A}(2, 1, -2)$, donc $R^2 = \Omega A^2 = 2^2 + 1^2 + (-2)^2 = 9$ et $R = 3$.

Le point $C(1, 1, 3)$ est sur S : $\Omega C^2 = 0^2 + 3^2 + 0^2 = 9$.

Le point $K(2, -1, 4)$ n'y est pas : $\Omega K^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \neq 9$.

L'équation d'une sphère



La sphère de centre Ω et de rayon R : chacun de ses points M est à la distance R de Ω.

L'idée, avant l'énoncé. Chaque test compare ΩM^2 à R^2, en coordonnées. Comparer les carrés suffit, car les longueurs sont positives : c'est l'équation qui suit.

Théorème : Équation cartésienne d'une sphère

Dans un repère orthonormé, soit $\Omega(a, b, c)$ un point et $R > 0$. Un point $M(x, y, z)$ appartient à la sphère $S(\Omega, R)$ si et seulement si

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

En développant, la sphère $S(\Omega, R)$ a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + e = 0$, avec $e = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Démonstration

Étape 1. Par définition, $M \in S(\Omega, R)$ si et seulement si $\Omega M = R$, c'est-à-dire, les deux membres étant positifs, si et seulement si $\Omega M^2 = R^2$.

Étape 2. Dans un repère orthonormé, $\Omega M^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ (norme et distance dans un repère orthonormé), d'où la première équation.

Étape 3. Le développement des trois carrés donne $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0$, c'est-à-dire la seconde forme.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On remplace $\Omega M = R$ par $\Omega M^2 = R^2$: c'est permis, car les deux membres sont positifs. La distance dans un repère orthonormé donne alors l'équation. Le développement donne la seconde forme.

Exemple : l'équation d'une sphère

Reprends la sphère S de centre $\Omega(1, -2, 3)$ et de rayon 3. D'après l'équation cartésienne d'une sphère, dans le repère orthonormé, S a pour équation :

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

En développant, on obtient $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$, car $1^2 + (-2)^2 + 3^2 - 9 = 5$.

Vérifie : Le passage aux carrés

À l'étape 1 de la preuve, pourquoi peut-on remplacer $\Omega M = R$ par $\Omega M^2 = R^2$?

A. Parce qu'un point de l'espace vérifie toujours $\Omega M = \Omega M^2$, quel que soit M.
Faux.
Faux. Par exemple, $\Omega M = 2$ donne $\Omega M^2 = 4$.

B. Parce que le repère est orthonormé, ce qui autorise à élever au carré.
Faux.
Faux. L'étape 1 n'utilise aucun repère : il ne sert qu'à l'étape 2.

C. Parce que le rayon R est un entier, donc son carré aussi.
Faux.
Faux. Le rayon peut valoir $\sqrt{2}$: la preuve vaut pour tout $R > 0$.

D. Deux nombres positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux.
Juste.
C'est juste. ΩM est une longueur et $R > 0$: les deux membres sont positifs.

Correction
Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $a = b$ si et seulement si $a^2 = b^2$. Ici $\Omega M \geq 0$ et $R > 0$: $M \in S$ équivaut à $\Omega M^2 = R^2$. Le repère orthonormé ne sert qu'à l'étape 2, pour écrire ΩM^2 en coordonnées.

Une sphère par son diamètre

L'idée, avant l'énoncé. Le milieu I de $[AB]$ est le centre de la sphère de diamètre $[AB]$. En passant par I avec la relation de Chasles, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ devient une différence de deux carrés : $MI^2 - IA^2$.

Propriété : Sphère de diamètre [AB]

Soit A et B deux points **distincts**. Un point M appartient à la sphère de diamètre $[AB]$ si et seulement si

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Démonstration

Étape 1. Soit I le milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$ et $IA = \dfrac{AB}{2}$. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$.

Étape 2. Par les propriétés de calcul du produit scalaire (point 4), $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$.

Étape 3. Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si $MI^2 = IA^2$, c'est-à-dire, les longueurs étant positives, $MI = \dfrac{AB}{2}$: le point M appartient à la sphère de centre I et de rayon $\dfrac{AB}{2}$, qui est la sphère de diamètre $[AB]$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On fait apparaître le milieu I : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$. L'identité $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ fait le reste.

Exemple : la sphère de diamètre [AB]

Dans un repère orthonormé, soit $A(-1, 2, 0)$ et $B(3, 0, 4)$. Pour $M(x, y, z)$, on a $\overrightarrow{MA}(-1 - x, 2 - y, -z)$ et $\overrightarrow{MB}(3 - x, -y, 4 - z)$.

La condition $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ s'écrit :

$$\begin{aligned}(x + 1)(x - 3) + (y - 2)y \\ + z(z - 4) = 0,\end{aligned}$$

soit $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$.

Contrôle. Le milieu $I(1, 1, 2)$ et $AB = 6$ donnent $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$, qui se développe en la même équation.

Lire un centre et un rayon

Méthode : Écrire l'équation d'une sphère et lire son centre et son rayon

1. **Centre et rayon donnés** : écris $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, dans le repère orthonormé.
2. **Diamètre donné** : écris $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ en coordonnées, ou prends le milieu de $[AB]$ pour centre et $\dfrac{AB}{2}$ pour rayon.

3. **Sphère annoncée par une équation développée** : regroupe les termes en x, en y, en z, et complète chaque carré, par exemple $x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$.
4. **Lire** le centre (a, b, c) et le rayon R, racine du second membre.

À toi : Centre, rayon et un point

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. On admet que S est une sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$. Rédige la recherche de son centre Ω et de son rayon R, puis vérifie que $A(1, 1, 3)$ appartient à S. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Regroupe les termes en x, en y et en z.
Indice 2
Complète chaque carré, comme $x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$.
Indice 3
Pour A, calcule ΩA^2 et compare-le à R^2.

Réponse
Centre et rayon. On complète les carrés :

$$\begin{aligned} x^2 - 6x &= (x-3)^2 - 9, \\ y^2 + 2y &= (y+1)^2 - 1, \\ z^2 - 4z &= (z-2)^2 - 4. \end{aligned}$$

L'équation devient :

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y+1)^2 \\ + (z-2)^2 = 9. \end{aligned}$$

Donc $\Omega(3, -1, 2)$ et $R = 3$.

Le point A. On a $\overrightarrow{\Omega A}(-2, 2, 1)$ et $\Omega A^2 = (-2)^2 + 2^2 + 1^2 = 9 = R^2$: le point A est sur S.

Conclusion. S a pour centre $\Omega(3, -1, 2)$ et pour rayon 3, et A appartient à S.

Représentation paramétrique d'une sphère

Du cercle à la sphère

Devine : Un point du cercle

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, soit $R > 0$ et le point $N(R\cos\theta, R\sin\theta)$. À quelle distance de l'origine est-il ?

A. R, pour tout réel θ
Juste.
C'est juste. $R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta = R^2$.

B. R^2, pour tout réel θ

Faux.

Faux. R^2 est le carré de la distance, pas la distance.

C. 1, pour tout réel θ

Faux.

Faux. Ce serait vrai seulement pour $R = 1$.

D. Cela dépend du réel θ

Faux.

Faux. La relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ fait disparaître θ.

Correction

Le carré de la distance vaut :

$$\begin{aligned} &R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta \\ &= R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = R^2. \end{aligned}$$

Le point décrit le cercle de centre l'origine et de rayon R. Sur une sphère, on ajoute un second angle, comme la latitude ajoutée à la longitude.

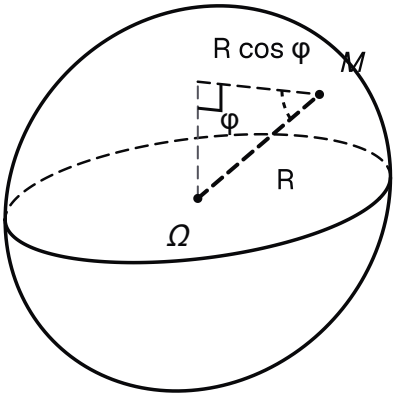
Petit rappel de trigonométrie. Pour tout réel θ, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Réciproquement, si $X^2 + Y^2 = 1$, il existe un réel θ tel que $X = \cos\theta$ et $Y = \sin\theta$: c'est le cercle trigonométrique.

Enfin, pour tout $s \in [-1, 1]$, il existe $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\varphi = s$.

La représentation paramétrique

L'idée, avant l'énoncé. Sur la Terre, un lieu se repère par sa longitude θ et sa latitude φ. La latitude fixe la hauteur z. La longitude fixe la position sur le cercle de cette hauteur, dont le rayon est $R\cos\varphi$.



La latitude fixe la hauteur de M ; le cercle horizontal qui passe par M a pour rayon R cos φ.

Théorème : Représentation paramétrique d'une sphère

Dans un repère orthonormé, soit $\Omega(a,b,c)$ un point et $R>0$. Un point $M(x,y,z)$ appartient à la sphère $S(\Omega,R)$ si et seulement s'il existe deux réels θ et φ tels que

$$\begin{cases} x = a + R\cos\varphi\cos\theta \\ y = b + R\cos\varphi\sin\theta \\ z = c + R\sin\varphi \end{cases}$$

Ce système, où θ et φ parcourent $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** de la sphère $S(\Omega,R)$.

Démonstration

Étape 1. Si M s'écrit ainsi, alors $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2\cos^2\varphi\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+R^2\sin^2\varphi = R^2$ (trigonométrie) : $M\in S(\Omega,R)$ par l'équation cartésienne d'une sphère.

Étape 2. Réciproquement, soit $M\in S(\Omega,R)$. Comme $(x-a)^2+(y-b)^2\geq 0$, on a $(z-c)^2\leq R^2$, donc $\dfrac{z-c}{R}\in[-1,1]$: il existe $\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $z=c+R\sin\varphi$ (trigonométrie). Alors $\cos\varphi\geq 0$ et $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\cos^2\varphi$.

Étape 3. Si $\cos\varphi=0$, alors $x=a$ et $y=b$: tout réel θ convient. Sinon, $X=\dfrac{x-a}{R\cos\varphi}$ et $Y=\dfrac{y-b}{R\cos\varphi}$ vérifient $X^2+Y^2=1$: il existe θ tel que $X=\cos\theta$ et $Y=\sin\theta$ (trigonométrie). Dans les deux cas, $x=a+R\cos\varphi\cos\theta$, $y=b+R\cos\varphi\sin\theta$ et $z=c+R\sin\varphi$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le sens direct est un calcul : $\cos^2 + \sin^2 = 1$, appliqué deux fois. La réciproque choisit d'abord φ par la hauteur $z - c$, puis θ sur le cercle trigonométrique. La trigonométrie sert une fois par paramètre.

Vérifie : La hauteur et le sinus

À l'étape 2 de la preuve, pourquoi existe-t-il φ tel que $\sin\varphi = \dfrac{z-c}{R}$?

A. Parce que $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ pour tout réel φ.

Faux.

Faux. Cette relation sert au sens direct, pas à trouver φ.

B. $(z-c)^2 \leq (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, donc $\dfrac{z-c}{R} \in [-1, 1]$.

Juste.

C'est juste. Tout nombre de $[-1, 1]$ est le sinus d'un angle de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

C. Parce que le point M est sur la sphère, donc sa cote vaut c.

Faux.

Faux. Un point de la sphère n'a pas forcément la cote du centre.

D. Parce que tout nombre réel est le sinus d'un certain angle.

Faux.

Faux. Un sinus est toujours compris entre -1 et 1.

Correction

Comme $(x-a)^2 + (y-b)^2 \geq 0$, l'équation de la sphère donne $(z-c)^2 \leq R^2$. Donc $\left|\dfrac{z-c}{R}\right| \leq 1$, et le rappel de trigonométrie fournit $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\varphi = \dfrac{z-c}{R}$.

Paramètres et points

Attention : Lire un centre : attention aux signes

Avant de paramétrer une sphère, lis son centre et son rayon sans erreur. Dans un repère orthonormé, considère la sphère d'équation $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 16$.

✗ Son centre est $(-3, 1, 2)$ et son rayon est 16.

✓ Son centre est $(3, -1, -2)$ et son rayon est 4, car $(y+1)^2 = (y-(-1))^2$ et $R^2 = 16$.

Une erreur de signe sur le centre fausse toute la représentation paramétrique : relis les signes un par un, et prends la racine du second membre.

Exemple : des paramètres au point, et retour

Dans un repère orthonormé, soit S la sphère de centre $\Omega(1,-1,2)$ et de rayon 2.

Point de paramètres donnés. Pour $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$:

- $x=1+2\times\dfrac{1}{2}\times 0=1$;
- $y=-1+2\times\dfrac{1}{2}\times 1=0$;
- $z=2+2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$.

Contrôle : $0^2+1^2+(\sqrt{3})^2=4$.

Paramètres d'un point. Le point $B(1,-3,2)$ est sur S : $\overrightarrow{\Omega B}(0,-2,0)$ et $\Omega B^2=0^2+(-2)^2+0^2=4=R^2$.

Ensuite, $z_B-2=0$, donc $\sin\varphi=0$, et on prend $\varphi=0$. Alors $2\cos\theta=0$ et $2\sin\theta=-2$: $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ convient.

À toi : Les paramètres d'un point de la sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Soit S la sphère de centre $\Omega(2,0,-1)$ et de rayon 4. Rédige la preuve que $A(2,4,-1)$ est sur S, et trouve des paramètres θ et φ de A. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule ΩA^2 et compare-le à R^2.
Indice 2
La hauteur $z_A-(-1)$ est nulle : choisis φ tel que $\sin\varphi=0$.
Indice 3
Les paramètres d'un point ne sont pas uniques : tout couple qui convient est accepté.

Réponse
Appartenance. On a $\overrightarrow{\Omega A}(0,4,0)$ et $\Omega A^2=16=R^2$: A est sur S.

Paramètres. Ensuite, $z_A-(-1)=0=4\sin\varphi$: on prend $\varphi=0$, donc $\cos\varphi=1$. Il reste $4\cos\theta=0$ et $4\sin\theta=4$: $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ convient.

Conclusion. A est sur S, de paramètres $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi=0$.

Sphère et plan ; plan tangent

Un plan qui approche une balle

Devine : Une tranche de sphère

Dans un repère orthonormé, la sphère de centre O et de rayon 5 est coupée par le plan $z=4$. À ton avis, quel est le rayon du cercle obtenu ?

A. 4

Faux.

Faux. 4 est la distance du centre au plan, pas le rayon du cercle.

B. 1

Faux.

Faux. Tu as calculé $5-4$; le rayon vient de $\sqrt{5^2-4^2}$.

C. 3

Juste.

C'est juste. Un point du cercle vérifie $x^2+y^2+16=25$, donc $x^2+y^2=9$.

D. 5

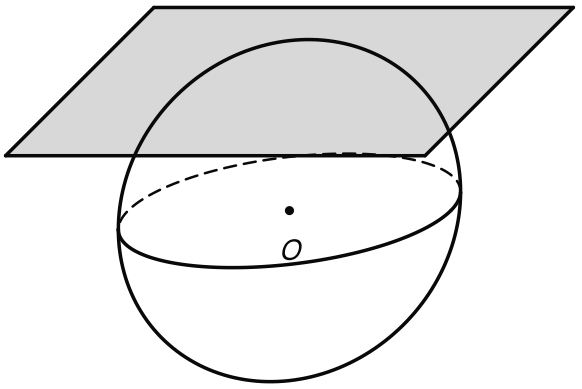
Faux.

Faux. Le cercle n'a le rayon de la sphère que si le plan passe par le centre.

Correction

Un point $M(x,y,4)$ du plan est sur la sphère si et seulement si $x^2+y^2+4^2=25$, c'est-à-dire $x^2+y^2=9$. C'est le cercle du plan $z=4$ de centre $(0,0,4)$ et de rayon $3=\sqrt{25-16}$.

L'idée, avant l'énoncé. Tout se joue sur la distance h du centre au plan. Pour un point M du plan, le triangle ΩHM est rectangle en H. L'égalité $\Omega M^2=h^2+HM^2$ décide si M est sur la sphère.



La sphère de centre O et de rayon 5, et le plan horizontal d'équation z = 4 qui la coupe.

Théorème : Position relative d'une sphère et d'un plan

Soit $S(\Omega,R)$ une sphère, P un plan, H le projeté orthogonal de Ω sur P, et $h=d(\Omega,P)=\Omega H$.

- Si $h>R$, le plan P et la sphère S n'ont **aucun** point commun.

- Si $h = R$, ils ont un **seul** point commun, le point H : on dit que le plan P est **tangent** à la sphère S en H.
- Si $h < R$, leur intersection est le **cercle** du plan P de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - h^2}$.

Démonstration

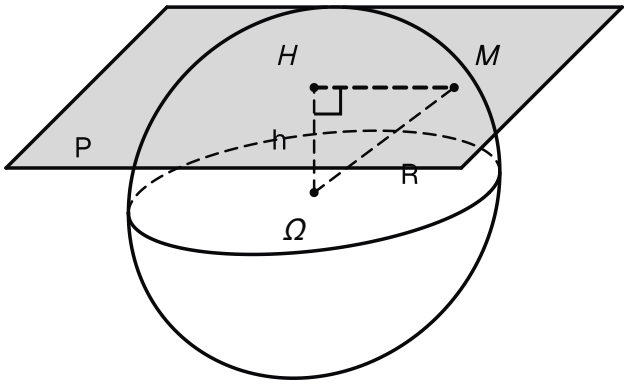
Étape 1. Pour tout point M du plan P, la distance d'un point à un plan donne $\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = h^2 + HM^2$.

Étape 2. Un point M de P appartient donc à S si et seulement si $h^2 + HM^2 = R^2$, c'est-à-dire $HM^2 = R^2 - h^2$.

Étape 3. Si $h > R$, alors $R^2 - h^2 < 0$ et aucun point ne convient. Si $h = R$, la condition s'écrit $HM = 0$, c'est-à-dire $M = H$; et H appartient bien à P et à S. Si $h < R$, la condition s'écrit $HM = \sqrt{R^2 - h^2}$: ce sont les points de P situés à la distance r de H, c'est-à-dire le cercle du plan P de centre H et de rayon r.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout repose sur l'égalité de la distance d'un point à un plan : $\Omega M^2 = h^2 + HM^2$ pour M dans P. La sphère impose $\Omega M^2 = R^2$, donc $HM^2 = R^2 - h^2$. Le signe de $R^2 - h^2$ donne les trois cas.



Le triangle ΩHM, rectangle en H : h est la distance du centre au plan, HM le rayon du cercle de section.

Vérifie : L'outil de la preuve

Dans la preuve, quel résultat donne $\Omega M^2 = h^2 + HM^2$ pour tout point M du plan P ?

A. La définition de la sphère.

Faux.

Faux. La définition donne $\Omega M = R$, pas cette égalité.

B. L'équation cartésienne d'une sphère.

Faux.

Faux. Aucune équation n'est utilisée à l'étape 1.

C. La sphère de diamètre $[AB]$.

Faux.

Faux. Aucun diamètre n'intervient dans cette preuve.

D. La distance d'un point à un plan.

Juste.

C'est juste. Il affirme $MN^2 = MH^2 + HN^2$ pour tout point N du plan.

Correction

Le point H est le projeté orthogonal de Ω sur P. La distance d'un point à un plan affirme $\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2$ pour tout point M de P, avec $\Omega H = h$.

Étudier une position

Méthode : Étudier la position relative d'une sphère et d'un plan

1. **Lire** le centre Ω et le rayon R de la sphère.
2. **Calculer** $h = d(\Omega, P)$, la distance du centre au plan, avec sa formule.
3. **Comparer** h et R : si $h > R$, aucun point commun ; si $h = R$, plan tangent ; si $h < R$, un cercle.
4. **Pour un cercle** : son centre est le projeté orthogonal H de Ω sur P, et son rayon est $r = \sqrt{R^2 - h^2}$.

Exemple : centre et rayon d'un cercle d'intersection

Dans un repère orthonormé, soit S la sphère de centre $\Omega(1, -2, 3)$ et de rayon 5, et P : $2x - y + 2z - 1 = 0$.

Distance. Par la distance d'un point à un plan :

$$\begin{aligned} h &= \frac{|2 \times 1 - (-2) + 2 \times 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Comme $3 < 5$, l'intersection est un cercle.

Centre. Le point $\Omega_t(1+2t,-2-t,3+2t)$ est dans P si et seulement si $9t+9=0$: $t_0=-1$ et $H(-1,-1,1)$.

Rayon. $r=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Attention : Le cercle d'intersection n'a ni le centre ni le rayon de la sphère

Dans un repère orthonormé, le plan $z=12$ coupe la sphère de centre O et de rayon 13.

✗ « Le cercle a pour centre O et pour rayon 13. »

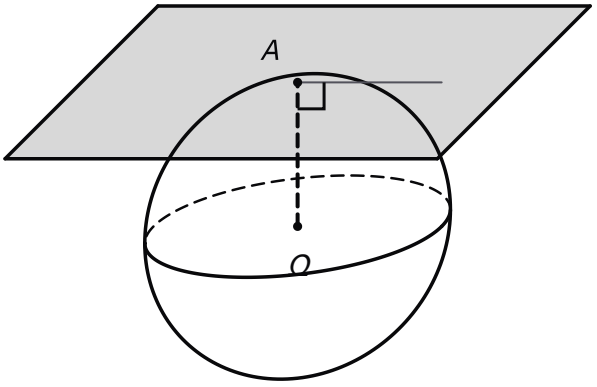
✓ Son centre est le projeté $(0,0,12)$ de O sur le plan, et son rayon est $\sqrt{13^2-12^2}=5$.

Le rayon r est plus petit que R dès que le plan ne passe pas par le centre.

Le mot du prof. Trois positions, une seule distance à calculer : h. Tu viens de ramener un problème de l'espace à un problème de nombres.

Le plan tangent

L'idée, avant l'énoncé. Un plan tangent en A touche la sphère en ce seul point. Le point A est alors le projeté orthogonal du centre. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ est donc normal au plan, et la distance du centre au plan vaut R.



Plan tangent en A : le rayon [ΩA] est orthogonal au plan.

Propriété : Plan tangent à une sphère en un point

Soit $S(\Omega, R)$ une sphère et A un point de S. Le plan qui passe par A et admet $\overrightarrow{\Omega A}$ pour vecteur normal est l'**unique** plan tangent à S en A. C'est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0.$$

Démonstration

Étape 1. On a $\Omega A = R > 0$. Le plan P passant par A, de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$, est l'ensemble annoncé (plan défini par un point et un vecteur normal).

Étape 2. Dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{\Omega A}$ est colinéaire au vecteur normal lu sur une équation de P, et $A \in P$: A est le projeté orthogonal de Ω sur P (projeté orthogonal d'un point sur un plan). Donc $d(\Omega, P) = R$, et P est tangent à S en A (position relative d'une sphère et d'un plan).

Étape 3. Réciproquement, si Q est tangent à S en A, alors A est le projeté orthogonal de Ω sur Q (même théorème). Par le projeté orthogonal, $\overrightarrow{\Omega A}$ est colinéaire à un vecteur normal de Q, donc normal à Q (vecteur normal lu sur une équation). Par unicité, $Q = P$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le point de contact A est le projeté orthogonal du centre sur le plan tangent. C'est pourquoi $\overrightarrow{\Omega A}$ en est un vecteur normal. L'unicité vient de l'unicité du projeté, puis du plan défini par un point et un vecteur normal.

Vérifie : Le vecteur normal du plan tangent

À l'étape 3 de la preuve, pourquoi $\overrightarrow{\Omega A}$ est-il normal au plan tangent Q ?

A. A est le projeté orthogonal de Ω sur Q : $\overrightarrow{\Omega A}$, non nul, est colinéaire à un vecteur normal de Q.
Juste.
C'est juste. Un vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal est normal.

B. Parce que $\Omega A = R$: le point A est à la distance R du centre.
Faux.
Faux. Cette égalité dit que A est sur la sphère, pas que $\overrightarrow{\Omega A}$ est normal à Q.

C. Parce que le point A appartient à la fois au plan Q et à la sphère.
Faux.
Faux. Un plan sécant contient aussi des points de la sphère, sans que $\overrightarrow{\Omega A}$ lui soit normal.

D. Parce que le plan tangent Q passe par le centre Ω de la sphère.
Faux.
Faux. Le plan tangent est à la distance R du centre : il ne passe jamais par Ω.

Correction

Le plan Q est tangent à S en A : d'après la position relative d'une sphère et d'un plan, A est le projeté orthogonal de Ω sur Q. D'après le projeté orthogonal d'un point sur un plan, $\overrightarrow{\Omega A}$ est colinéaire à un vecteur normal de Q. Il est non nul, car $\Omega A = R > 0$. D'après le vecteur normal lu sur une équation, il est normal à Q.

Écrire un plan tangent

Exemple : le plan tangent en un point

Dans un repère orthonormé, reprends la sphère de centre $\Omega(1, -2, 3)$ et de rayon 3, qui passe par $A(3, -1, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}(2, 1, -2)$ est normal au plan tangent T en A :

$$\begin{aligned} &2(x-3) + 1(y+1) \\ &\quad - 2(z-1) = 0 \\ &2x + y - 2z - 3 = 0. \end{aligned}$$

Contrôle.

$$\begin{aligned} &d(\Omega, T) \\ &= \frac{|2 \times 1 + (-2) - 2 \times 3 - 3|}{3} \\ &= \frac{9}{3} = 3 = R. \end{aligned}$$

Méthode : Écrire l'équation du plan tangent en un point

1. **Vérifier** que le point A est sur la sphère : $\Omega A = R$.
2. **Calculer** $\overrightarrow{\Omega A}$: c'est un vecteur normal au plan tangent.
3. **Écrire** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$ dans le repère orthonormé, puis développer.
4. **Contrôler** : la distance du centre à ce plan vaut R.

À toi : Un plan tangent à rédiger

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Soit S la sphère de centre $\Omega(0, 1, -1)$ et de rayon 3, et $A(2, 2, 1)$. Rédige la preuve que A est sur S, puis la recherche d'une équation du plan tangent à S en A. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $\overrightarrow{\Omega A}$ et ΩA^2.
Indice 2
Écris $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$ avec $M(x, y, z)$, puis développe.
Indice 3
Contrôle ton équation : la distance de Ω au plan doit valoir 3.

Réponse

Appartenance. On a $\overrightarrow{\Omega A}(2,1,2)$ et $\Omega A^2 = 2^2+1^2+2^2 = 9 = 3^2$: A est sur S.

Plan tangent. D'après le plan tangent à une sphère en un point, ce plan a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$:

$$\begin{aligned} &2(x-2)+1(y-2)\\ &\quad+2(z-1)=0\\ &2x+y+2z-8=0. \end{aligned}$$

Contrôle. On a $|2\times 0+1+2\times(-1)-8| = 9$, donc

$$\begin{aligned} &\frac{9}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}\\ &=\frac{9}{3}=3. \end{aligned}$$

Conclusion. Le plan tangent à S en A a pour équation $2x+y+2z-8=0$.

Sphère et droite

Combien de points communs

Devine : Une droite et une balle

Une droite passe près d'une sphère. Combien de points communs peuvent-elles avoir, au plus ?

A. Un seul

Faux.

Faux. Une droite qui passe par le centre coupe la sphère en deux points.

B. Deux

Juste.

C'est juste. Une droite qui entre dans la sphère en ressort en un second point, ou la touche en un seul.

C. Trois

Faux.

Faux. Les points communs viennent d'une équation du second degré : deux au plus.

D. Une infinité

Faux.

Faux. Deux points d'une sphère sont à une distance au plus égale à $2R$: elle ne contient aucune droite.

Correction

Au plus **deux**. Tu vas le démontrer : les points communs correspondent aux solutions d'une équation du second degré en t.

Petit rappel sur l'équation du second degré. Soit $pt^2+qt+s=0$, avec $p\neq 0$, et $\Delta=q^2-4ps$.

- Si $\Delta<0$, il n'y a aucune solution réelle.
- Si $\Delta=0$, il y en a une seule : $-\dfrac{q}{2p}$.
- Si $\Delta>0$, il y en a deux : $\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2p}$ et $\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2p}$.

L'équation en t

L'idée, avant l'énoncé. Le point M_t est sur la sphère quand $\Omega M_t^2=R^2$. Or $\overrightarrow{\Omega M_t}=\overrightarrow{\Omega A}+t\vec{u}$. Développer ce carré scalaire donne une équation du second degré en t.

Théorème : Intersection d'une sphère et d'une droite

Soit $S(\Omega,R)$ une sphère et $D=D(A,\vec{u})$ une droite, avec $\vec{u}\neq\vec{0}$. Pour tout réel t, notons M_t le point tel que $\overrightarrow{AM_t}=t\vec{u}$. Le point M_t appartient à S si et seulement si

$$\|\vec{u}\|^2\,t^2+2\left(\overrightarrow{\Omega A}\cdot\vec{u}\right)t+\Omega A^2-R^2=0.$$

Cette équation du second degré a zéro, une ou deux solutions : la droite D et la sphère S ont respectivement **aucun**, **un seul** ou **deux** points communs. Lorsqu'elles ont un seul point commun, on dit que la droite D est **tangente** à la sphère S.

Démonstration

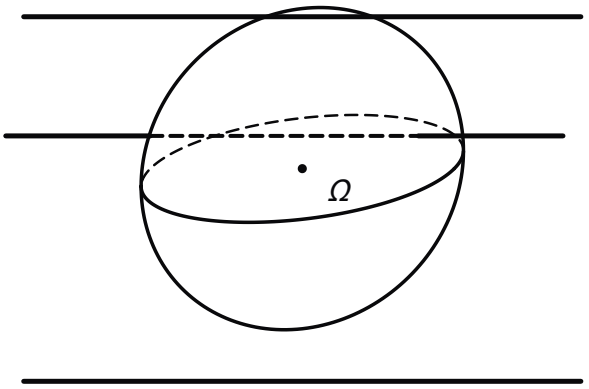
Étape 1. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{\Omega M_t}=\overrightarrow{\Omega A}+t\vec{u}$. Par les propriétés de calcul du produit scalaire, $\Omega M_t^2=\Omega A^2+2t\,(\overrightarrow{\Omega A}\cdot\vec{u})+t^2\|\vec{u}\|^2$. Donc $M_t\in S$, c'est-à-dire $\Omega M_t^2=R^2$, si et seulement si t vérifie l'équation annoncée.

Étape 2. Comme $\vec{u}\neq\vec{0}$, on a $\|\vec{u}\|^2>0$: c'est une équation du second degré, qui a zéro, une ou deux solutions réelles selon le signe de son discriminant (équation du second degré).

Étape 3. Les points de D sont les points M_t (chapitre précédent). Deux réels distincts t et t' donnent deux points distincts, car $\overrightarrow{M_tM_{t'}}=(t'-t)\vec{u}\neq\vec{0}$. Le nombre de points communs est donc le nombre de solutions.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On écrit $\overrightarrow{\Omega M_t}=\overrightarrow{\Omega A}+t\vec{u}$, puis on développe ΩM_t^2 avec les propriétés de calcul. Le coefficient de t^2 est $\|\vec{u}\|^2$, non nul : l'équation est du second degré, et son discriminant décide.



Trois droites face à une sphère : deux points communs, un seul, ou aucun.

Calculer les points communs

Vérifie : Vraiment du second degré

Pourquoi l'équation en t est-elle du second degré ?

A. Car $\overrightarrow{\Omega A}$ n'est jamais le vecteur nul.

Faux.

Faux. A peut être le centre ; l'équation reste du second degré.

B. Car son discriminant est toujours positif.

Faux.

Faux. Le discriminant peut être négatif : la droite évite alors la sphère.

C. Car $\|\vec{u}\|^2 > 0$, puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Juste.

C'est juste. Le coefficient de t^2 n'est donc jamais nul.

D. Car le rayon R est strictement positif.

Faux.

Faux. R intervient dans le terme constant, pas devant t^2.

Correction

Le coefficient de t^2 est $\|\vec{u}\|^2$. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, il est strictement positif. Le degré ne dépend ni de R, ni du point A.

Méthode : Étudier l'intersection d'une sphère et d'une droite

1. **Écrire** une représentation paramétrique de la droite et une équation de la sphère, dans un repère orthonormé.
2. **Remplacer** x, y, z dans l'équation de la sphère : tu obtiens une équation du second degré en t.
3. **Calculer** le discriminant : négatif, aucun point commun ; nul, droite tangente ; positif, deux points.
4. **Calculer** les points avec les valeurs de t, puis vérifier qu'ils sont sur la sphère.

Exemple : deux points communs

Dans un repère orthonormé, soit S : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ et la droite D :

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=2+t \\ z=1 \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

L'équation en t. En remplaçant : $(-3+t)^2+t^2+2^2=9$, soit $2t^2-6t+4=0$.

Le discriminant. Il vaut $(-6)^2-4\times 2\times 4=4>0$: deux solutions, $t=\dfrac{6-2}{4}=1$ et $t=\dfrac{6+2}{4}=2$.

Les points. Les points communs sont $(-1,3,1)$ et $(0,4,1)$. Contrôle : $(-2)^2+1^2+2^2=9$ et $(-1)^2+2^2+2^2=9$.

La droite tangente

Exemple : une droite tangente

Dans le même repère orthonormé, avec la même sphère S, soit D' la droite passant par $E(-1,2,2)$ et dirigée par $\vec{u}'(1,0,0)$:

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=2 \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

En remplaçant : $(-2+t)^2+0^2+3^2=9$, soit $t^2-4t+4=0$.

Le discriminant vaut $(-4)^2-4\times 1\times 4=0$: une seule solution, $t=2$. La droite D' est tangente à S au point $(1,2,2)$.

À toi : Une droite qui évite la sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Soit S la sphère de centre O et de rayon 3, et la droite D de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Rédige l'étude de l'intersection de D et de S. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris une équation de S dans le repère orthonormé.
Indice 2
Remplace x, y, z : tu obtiens une équation du second degré en t.
Indice 3
Calcule son discriminant, puis conclus sur le nombre de points communs.

Réponse
L'équation en t. Le repère est orthonormé : S a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. En remplaçant :

$$(1 + t)^2 + (1 - t)^2 + 4^2 = 9,$$

soit $2t^2 + 9 = 0$.

Le discriminant. Il vaut $0^2 - 4 \times 2 \times 9 = -72 < 0$: aucune solution réelle.

Conclusion. D'après l'intersection d'une sphère et d'une droite, D et S n'ont aucun point commun.

Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir

Dans un repère orthonormé, tout se calcule : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$, les normes et les distances.

Un point et un **vecteur normal** suffisent à décrire un plan. Le projeté orthogonal donne la distance d'un point à un plan.

Une sphère se compare à un plan par h et R, à une droite par un discriminant.

Chaque réponse se justifie par un calcul et un résultat nommé, jamais par une figure.

Le mot du prof. Tu sais maintenant mesurer, viser et toucher dans l'espace. Il te manque un raccourci : fabriquer d'un coup un vecteur orthogonal à deux vecteurs donnés. C'est l'outil du chapitre suivant.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Produit scalaire dans l'espace et applications » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)