BURHAN

Résumé : Notions de logique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/notions-de-logique/resume

Chapitre	Semestre
Notions de logique	Semestre 1

Propositions et connecteurs

> **À retenir : Le réflexe : vrai ou faux, sans ambiguïté**
>
> Une proposition a une seule valeur de vérité : V ou F. « $2+3=5$ » est vraie ; « 7 est pair » est fausse.
>
> En revanche, « $x>3$ » n'est pas une proposition tant que x n'est pas fixé : sa valeur dépend de x.

Définition : Proposition ; négation

Une **proposition** est un énoncé mathématique qui est soit vrai, soit faux, jamais les deux à la fois. Sa **valeur de vérité** est V (vraie) ou F (fausse).

La **négation** d'une proposition P est la proposition notée $\overline{P}$, lue « non P ». Elle est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.

Définition : Conjonction et disjonction

Soit P et Q deux propositions.

- La **conjonction** $(P \text{ et } Q)$ est vraie lorsque P et Q sont vraies toutes les deux ; elle est fausse dans les trois autres cas.
- La **disjonction** $(P \text{ ou } Q)$ est vraie lorsque l'une au moins des propositions P, Q est vraie ; elle est fausse seulement lorsque P et Q sont fausses toutes les deux. Le « ou » mathématique est **inclusif**.

Définition : Implication et équivalence

Soit P et Q deux propositions.

- L'**implication** $(P \Rightarrow Q)$, lue « P implique Q », est fausse seulement lorsque P est vraie et Q est fausse ; elle est vraie dans les trois autres cas. L'implication $(Q \Rightarrow P)$ est sa **réciproque**.
- L'**équivalence** $(P \Leftrightarrow Q)$, lue « P si et seulement si Q », est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

En particulier, si P est vraie et si $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, alors Q est vraie.

Une **loi logique** est une proposition composée qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent.

À retenir : Table de vérité des connecteurs

Chaque connecteur se lit sur ses valeurs de vérité. Une ligne par cas, dans l'ordre VV, VF, FV, FF.

P	Q	$\overline{P}$	$(P \text{ et } Q)$	$(P \text{ ou } Q)$	$(P \Rightarrow Q)$	$(P \Leftrightarrow Q)$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque

Deux points surprennent au début.

- Le « ou » est inclusif : $(P \text{ ou } Q)$ reste vraie quand P et Q sont vraies toutes les deux.
- L'implication $(P \Rightarrow Q)$ n'est fausse que sur la ligne VF ; si P est fausse, elle est vraie.

Exemple

Énoncé. On pose P : « 12 est un multiple de 4 » et Q : « 15 est pair ». Donne la valeur de vérité de $(P \text{ et } Q)$, $(P \text{ ou } Q)$, $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.

Valeurs. $12 = 4 \times 3$, donc P est vraie. $15 = 2 \times 7 + 1$ est impair, donc Q est fausse.

Lecture. On lit la ligne VF de la table :

- $(P \text{ et } Q)$ est fausse ;
- $(P \text{ ou } Q)$ est vraie ;
- $(P \Rightarrow Q)$ est fausse.

Enfin Q est fausse, donc $(Q \Rightarrow P)$ est vraie.

Lois logiques : négation, contraposée, double implication

Propriété : Double négation et lois de Morgan

Pour toutes propositions P et Q, les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$;

- $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$;
- $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$.

Propriété : Implication : écriture, négation et contraposée

Pour toutes propositions P et Q, les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } Q)$;
- $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \text{ et } \overline{Q})$;
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

L'implication $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ est la **contraposée** de l'implication $(P \Rightarrow Q)$.

Propriété : Double implication et transitivité

Pour toutes propositions P, Q et R, les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\big)$;
- $\big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$;
- $\big((P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$.

Double négation

$$\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$$

Négation de « et »

$$\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$$

Négation de « ou »

$$\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$$

Implication réécrite

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } Q)$$

Négation d'une implication

$$\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \text{ et } \overline{Q})$$

Contraposée

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

Double implication

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\big)$$

Attention : Nier « et » donne « ou »

La négation de $(P \text{ et } Q)$ est $(\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$. Écrire $(\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$ est faux.

Avec P vraie et Q fausse, $(P \text{ et } Q)$ est fausse, donc sa négation est vraie ; or $(\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$ est fausse.

De même, nier « pour tout » donne « il existe », jamais « pour aucun ».

Attention : La réciproque n'est pas la contraposée

La contraposée $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ a toujours la même valeur que $(P \Rightarrow Q)$.

La réciproque $(Q \Rightarrow P)$, non : sur la ligne FV, $(P \Rightarrow Q)$ est vraie et $(Q \Rightarrow P)$ est fausse. Démontrer la réciproque ne démontre donc pas l'implication.

Exemple

Énoncé. Soit x un réel. On considère l'implication « si $x < -1$, alors $x^2 > 1$ ». Écris sa négation, sa contraposée et sa réciproque.

Négation (négation d'une implication, F05) : « $x < -1$ et $x^2 \leq 1$ ».

Contraposée (F05) : « si $x^2 \leq 1$, alors $x \geq -1$ ».

Réciproque : « si $x^2 > 1$, alors $x < -1$ ». Elle est fausse pour $x = 2$: $2^2 = 4 > 1$, mais $2 \geq -1$.

À retenir : Vérifier une loi logique

Une loi logique est vraie dans tous les cas. Pour la vérifier, examine les quatre lignes VV, VF, FV, FF ; il y en a huit avec trois propositions.

Une seule ligne fausse suffit : ce n'est alors pas une loi logique.

Quantificateurs et négation

À retenir : Lire et écrire une proposition quantifiée

Écris dans l'ordre le quantificateur, la variable, l'ensemble, une virgule, puis la propriété : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$.

La variable est muette : $\forall t \in \mathbb{R},\ t^2 + 1 > 0$ dit la même chose.

L'ensemble compte : $\exists n \in \mathbb{Z},\ 3n = 7$ est fausse, mais $\exists x \in \mathbb{Q},\ 3x = 7$ est vraie.

Définition : Fonction propositionnelle ; quantificateurs

Soit E un ensemble. Une **fonction propositionnelle** $P(x)$ de la variable x de E est un énoncé qui devient une proposition chaque fois que l'on remplace x par un élément de E.

- La proposition $(\forall x \in E,\ P(x))$, lue « pour tout x de E, $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour chaque élément x de E. Le symbole $\forall$ est le **quantificateur universel**.
- La proposition $(\exists x \in E,\ P(x))$, lue « il existe au moins un x de E tel que $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E. Le symbole $\exists$ est le **quantificateur existentiel**.

- La proposition $(\exists! x \in E,\ P(x))$, lue « il existe un unique x de E tel que $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour exactement un élément x de E.

Propriété : Négation d'une proposition quantifiée

Soit E un ensemble et $P(x)$ une fonction propositionnelle de la variable x de E. Les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $\overline{(\forall x \in E,\ P(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in E,\ \overline{P(x)})$;
- $\overline{(\exists x \in E,\ P(x))} \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ \overline{P(x)})$.

En particulier, s'il existe un élément x_0 de E tel que $P(x_0)$ soit fausse, alors la proposition $(\forall x \in E,\ P(x))$ est fausse : l'élément x_0 est un **contre-exemple**.

Nier « pour tout »

$$\overline{(\forall x \in E,\ P(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in E,\ \overline{P(x)})$$

Nier « il existe »

$$\overline{(\exists x \in E,\ P(x))} \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ \overline{P(x)})$$

Nier une implication quantifiée

$$\overline{\big(\forall x \in E,\ (P(x) \Rightarrow Q(x))\big)} \Leftrightarrow \big(\exists x \in E,\ (P(x) \text{ et } \overline{Q(x)})\big)$$

Nier deux quantificateurs

$$\overline{(\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ P(x,y))} \Leftrightarrow (\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ \overline{P(x,y)})$$

Méthode : nier une proposition

1. **Lis** la structure : d'abord les quantificateurs, dans l'ordre, puis les connecteurs.
2. **Remplace** chaque $\forall$ par $\exists$ et chaque $\exists$ par $\forall$; garde l'ordre et les ensembles (négation d'une proposition quantifiée, F08).
3. **Nie** la propriété finale : « et » devient « ou », « ou » devient « et » (lois de Morgan, F04), et $(P \Rightarrow Q)$ devient $(P \text{ et } \overline{Q})$ (négation d'une implication, F05).
4. **Contrôle** : si l'une est vraie, l'autre est fausse, et inversement.

Exemple

Énoncé. Nie la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n > x.$$

Quantificateurs. $\forall x$ devient $\exists x$, puis $\exists n$ devient $\forall n$, dans le même ordre.

Propriété. La négation de $n > x$ est $n \leq x$.

Résultat. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leq x$.

Méthode : réfuter par un contre-exemple

1. **Écris** ce qu'il faut montrer : $\exists x_0 \in E,\ \overline{P(x_0)}$ (négation d'une proposition quantifiée, F08).
2. **Cherche** x_0 parmi des valeurs simples : 0, 1, -1, un entier négatif, une fraction.
3. **Calcule** pour établir que $P(x_0)$ est fausse, puis conclus : la proposition universelle est fausse.

Exemple

Énoncé. La proposition « pour tout entier naturel n, si n est un multiple de 4, alors n est un multiple de 8 » est-elle vraie ?

Contre-exemple. Prenons $n = 12$.

- C'est un multiple de 4, car $12 = 4 \times 3$.
- Ce n'est pas un multiple de 8, car $8 \times 1 < 12 < 8 \times 2$.

Conclusion. La proposition est fausse.

Attention : Des exemples ne prouvent pas un « pour tout »

Tester $P(x)$ pour cinq valeurs, ou pour mille, ne démontre pas $\forall x \in E,\ P(x)$. Il faut un argument valable pour un x quelconque, introduit par « Soit $x \in E$ ».

À l'inverse, un seul contre-exemple suffit pour réfuter.

L'ordre des quantificateurs

Propriété : Ordre des quantificateurs

Soit E un ensemble et $P(x, y)$ une fonction propositionnelle des variables x et y de E : elle devient une proposition chaque fois que l'on remplace x et y par des éléments de E.

- Deux quantificateurs de même nature s'échangent : $(\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y \in E,\ \forall x \in E,\ P(x,y))$, et de même avec deux quantificateurs $\exists$.
- $(\exists y \in E,\ \forall x \in E,\ P(x,y)) \Rightarrow (\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ P(x,y))$.
- La réciproque de cette dernière implication est fausse en général : on n'échange pas un quantificateur $\forall$ et un quantificateur $\exists$.

Exemple

Énoncé. Compare les propositions

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + 2y = 1$$

et

$$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + 2y = 1.$$

Première. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel $y = \dfrac{1 - x}{2}$ convient : elle est vraie. Ici, y dépend de x.

Seconde. Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour $x = -2y$, on a $x + 2y = 0 \neq 1$. Aucun y ne convient pour tous les x : elle est fausse.

Attention : Ne permute pas un pour tout et un il existe

Dans $\forall x,\ \exists y$, tu choisis y après x : il peut changer avec x. Dans $\exists y,\ \forall x$, un seul y doit servir pour tous les x.

Échanger deux quantificateurs de natures différentes change le sens (ordre des quantificateurs, F09).

Démontrer une implication : directement ou par contraposée

Méthode : raisonnement direct

1. **Introduis** les objets et l'hypothèse : « Soit $x \in E$. Supposons $P(x)$. »
2. **Déduis** pas à pas ; chaque pas cite une hypothèse, un calcul ou un résultat.
3. **Termine** par « donc $Q(x)$ » : l'implication est démontrée pour tout x de E.

Exemple

Énoncé. Montre que, pour tout réel x, si $x > 3$, alors $x^2 - 3x > 0$.

Rédaction. Soit x un réel tel que $x > 3$. On écrit $x^2 - 3x = x(x - 3)$.

Par hypothèse, $x > 3 > 0$ et $x - 3 > 0$. Un produit de deux réels strictement positifs est strictement positif.

Conclusion. Pour tout réel $x > 3$, $x^2 - 3x > 0$.

Méthode : raisonnement par contraposée

1. **Annonce** : « Raisonnons par contraposée » (contraposée, F05).
2. **Écris** $\overline{Q}$ et $\overline{P}$ en clair, sans barre.
3. **Démontre** directement $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

4. **Conclus** : par contraposée, $(P \Rightarrow Q)$ est vraie.

Exemple

Énoncé. Soit n un entier. Montre que si $3n+1$ est impair, alors n est pair.

Annonce. Raisonnons par contraposée : montrons que si n est impair, alors $3n+1$ est pair.

Rédaction. Supposons n impair : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$. Alors

$$\begin{aligned} 3n+1 &= 6k+4 \\ &= 2(3k+2), \end{aligned}$$

avec $3k+2 \in \mathbb{Z}$: $3n+1$ est pair.

Conclusion. Par contraposée, si $3n+1$ est impair, alors n est pair.

À retenir : Quand choisir la contraposée

Pense à la contraposée quand la conclusion est une négation : « n n'est pas… », « $x \neq a$ ».

Alors $\overline{Q}$ devient une égalité ou une écriture explicite. C'est une hypothèse plus facile à utiliser.

Démontrer une équivalence

Méthode : démontrer une équivalence

1. **Double implication** : démontre $(P \Rightarrow Q)$, puis $(Q \Rightarrow P)$, en deux parties titrées (double implication, F06).
2. **Équivalences successives** : enchaîne $P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow Q$. À chaque pas, vérifie que l'on peut revenir en arrière.
3. **Conclus** par transitivité de l'équivalence (F06).

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x-3| \leq 5$.

Équivalences. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & |2x-3| \leq 5 \\ \Leftrightarrow\ & -5 \leq 2x-3 \leq 5 \\ \Leftrightarrow\ & -2 \leq 2x \leq 8 \\ \Leftrightarrow\ & -1 \leq x \leq 4. \end{aligned}$$

Justification.

- Le premier pas traduit $|a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq a \leq r$, valable pour $r \geq 0$.

- Ajouter 3, puis diviser par $2 > 0$, sont des opérations réversibles.

Conclusion. Les solutions sont les réels x tels que $-1 \leq x \leq 4$.

Attention : Chaque équivalence se justifie dans les deux sens

Élever au carré ne donne qu'une implication : $x = 2$ entraîne $x^2 = 4$, mais $x^2 = 4$ est vraie aussi pour $x = -2$.

Multiplier par un nombre qui peut être nul fait aussi perdre la réversibilité. Avant d'écrire $\Leftrightarrow$, vérifie les deux sens.

Disjonction des cas, raisonnement par l'absurde

Propriété : Principe du raisonnement par disjonction des cas

Pour toutes propositions P, Q et R, la proposition suivante est une loi logique :

$$\big((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\big) \\ \Leftrightarrow \big((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R\big).$$

En particulier, si $(P \Rightarrow R)$ et $(\overline{P} \Rightarrow R)$ sont vraies, alors R est vraie.

Méthode : disjonction des cas

1. **Annonce** des cas qui n'oublient rien : n pair ou n impair ; $x \geq 0$ ou $x < 0$.
2. **Traite** chaque cas sous un titre, avec sa propre hypothèse.
3. **Conclus** : la propriété est vraie dans chaque cas, donc toujours (principe de la disjonction des cas, F10).

Exemple

Énoncé. Montre que, pour tout réel x, $|x| \geq x$.

Soit x un réel. Les deux cas suivants couvrent toutes les possibilités.

Premier cas : $x \geq 0$**.** Alors $|x| = x$, donc $|x| \geq x$.

Second cas : $x < 0$**.** Alors $|x| = -x > 0$ et $0 > x$, donc $|x| > x$.

Conclusion. Dans les deux cas, $|x| \geq x$.

Propriété : Principe du raisonnement par l'absurde

Soit P et Q deux propositions. Si l'implication $(\overline{P} \Rightarrow Q)$ est vraie et si Q est fausse, alors P est vraie.

En particulier, s'il existe une proposition S telle que l'implication $\left(\overline{P} \Rightarrow (S \text{ et } \overline{S})\right)$ soit vraie, c'est-à-dire si l'on déduit de $\overline{P}$ une **contradiction** $(S \text{ et } \overline{S})$, alors P est vraie.

Méthode : raisonnement par l'absurde

1. **Annonce** : « Supposons par l'absurde que $\overline{P}$ », et écris $\overline{P}$ en clair.
2. **Déduis** jusqu'à heurter un fait établi ou une hypothèse ; nomme cette contradiction.
3. **Conclus** : $\overline{P}$ est impossible, donc P est vraie (principe du raisonnement par l'absurde, F11).

Exemple

Énoncé. Montre qu'il n'existe pas de plus petit réel strictement positif.

Hypothèse absurde. Supposons par l'absurde qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x > 0 \Rightarrow a \leq x).$$

Contradiction. Le réel $\frac{a}{2}$ est strictement positif, donc $a \leq \frac{a}{2}$, c'est-à-dire $a \leq 0$. Cela contredit $a > 0$.

Conclusion. Il n'existe pas de plus petit réel strictement positif.

Raisonnement par récurrence

Théorème : Principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel et $P(n)$ une fonction propositionnelle de la variable entière $n \geq n_0$. On suppose :

- **initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
- **hérédité** : pour tout entier $n \geq n_0$, l'implication $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie.

Alors, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Remarque

Au cours, le principe de récurrence (F12) est démontré à partir d'une propriété de $\mathbb{N}$: si une propriété est vérifiée par au moins un entier naturel, il existe un plus petit entier naturel qui la vérifie. Cette propriété de $\mathbb{N}$ est admise.

Méthode : rédiger une récurrence

1. **Nomme** la propriété $P(n)$ et le rang de départ n_0.
2. **Initialisation** : vérifie $P(n_0)$ par un calcul.

3. **Hérédité** : « Soit $n \geq n_0$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie ; montrons que $P(n+1)$ est vraie. » Utilise $P(n)$ à un endroit précis, et dis-le.
4. **Conclusion** : par le principe de récurrence (F12), $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple

Énoncé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $5^n - 1$ est un multiple de 4 ». Montre que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, $5^0 - 1 = 0 = 4 \times 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $5^n - 1 = 4k$, soit $5^n = 4k + 1$. Alors

$$\begin{aligned} 5^{n+1} - 1 &= 5(4k+1) - 1 \\ &= 4(5k+1), \end{aligned}$$

avec $5k + 1 \in \mathbb{Z}$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence (F12), $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Attention : L'initialisation est obligatoire

Sans initialisation, une hérédité vraie ne prouve rien. Exemple : « $n + 1 = n$ » entraîne « $n + 2 = n + 1$ », et pourtant aucun entier ne vérifie $n + 1 = n$.

Dans l'hérédité, $P(n)$ est supposée pour un seul entier n, fixé, jamais pour tous.

Choisir son raisonnement

Méthode : Quel raisonnement pour quel énoncé ?

Repère la forme de ce qu'on te demande, puis choisis.

Forme de l'énoncé	Raisonnement à essayer
$(P \Rightarrow Q)$	direct ; contraposée si $\overline{Q}$ est plus maniable
$(P \Leftrightarrow Q)$	double implication ou équivalences successives
$\forall x \in E,\ P(x)$ à démontrer	« Soit $x \in E$ », puis raisonnement direct
$\forall x \in E,\ P(x)$ à réfuter	un contre-exemple x_0 vérifié par le calcul
$\exists x \in E,\ P(x)$	exhiber un x et vérifier $P(x)$
« il n'existe pas », « n'est pas »	raisonnement par l'absurde
propriété selon la parité ou le signe	disjonction des cas
« pour tout entier $n \geq n_0$ »	récurrence, si $P(n+1)$ se relie à $P(n)$

À retenir : Rédiger en devoir

- Introduis chaque objet avant de t'en servir : « Soit… ».
- Annonce le raisonnement : « Raisonnons par contraposée », « Supposons par l'absurde ».
- Cite l'hypothèse ou le résultat utilisé à chaque pas.
- Termine par une phrase qui reprend la conclusion demandée.