BURHAN

Notions de logique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/notions-de-logique/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Sommes de deux carrés et raisonnements

Dans cet exercice, on dit qu'un entier naturel N est **somme de deux carrés** s'il existe deux entiers relatifs a et b tels que $N = a^2 + b^2$. Par exemple, $13 = 2^2 + 3^2$.

1. 1 pts

Soit n un entier relatif. Montrer que si n est pair, alors n^2 est un multiple de 4. Montrer que si n est impair, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 = 4q + 1$.

INDICE

Écris $n = 2m$, puis $n = 2m + 1$, et développe.

2. 1 pts

En déduire, par une disjonction des cas, que pour tous entiers a et b, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a^2 + b^2$ soit égal à $4q$, à $4q + 1$ ou à $4q + 2$.

INDICE

Trois cas suffisent : a et b pairs ; un seul des deux impair ; a et b impairs.

3. 0,5 pts

On considère la proposition (S) : « aucun entier de la forme $4k + 3$, avec $k \in \mathbb{N}$, n'est somme de deux carrés ». Écrire (S) avec des quantificateurs, puis écrire sa négation.

INDICE

Trois variables sont quantifiées : k, a et b. Pour la négation, applique à chacune la négation d'une proposition quantifiée (F08).

4. 1 pts

Démontrer (S) par l'absurde.

INDICE

Suppose qu'il existe k, a et b tels que $a^2 + b^2 = 4k + 3$, et utilise le résultat de la question 2.

5. 0,5 pts

L'entier 2027 est-il somme de deux carrés ?

6. 1 pts

Écrire la réciproque de l'implication « si N est de la forme $4k + 3$, alors N n'est pas somme de deux carrés ». Montrer qu'elle est fausse.

INDICE

Cherche un entier naturel inférieur à 10 qui n'est pas somme de deux carrés, et qui n'est pas de la forme $4k + 3$.

Exercice 2 5 pts

Puissances de 2 et cubes

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition « $2^n > n^3$ ».

1. 0,75 pts

Calculer 2^n et n^3 pour les entiers n de 0 à 10. Pour quelles de ces valeurs $P(n)$ est-elle vraie ? La proposition $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est-elle vraie ?

INDICE

Présente les valeurs dans un tableau, une ligne par entier n.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 4$, $n^3 > 3n^2 + 3n + 1$. En déduire que $2n^3 > (n+1)^3$.

INDICE

Comme $n \geq 4$, on a $n^3 \geq 4n^2$ et $n^2 \geq 4n$. Développe ensuite $(n+1)^3$.

3. 1,5 pts

Démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 10$.

INDICE

Dans l'hérédité, écris $2^{n+1} = 2 \times 2^n$, utilise $P(n)$, puis la question 2.

4. 0,75 pts

En déduire tous les entiers naturels n tels que $2^n \leq n^3$.

5. 0,5 pts

Écrire avec des quantificateurs la phrase « il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel $n \geq N$, 2^n est strictement supérieur à n^3 », puis justifier qu'elle est vraie.

INDICE

La condition « $n \geq N$ » se traduit par une implication placée après $\forall n \in \mathbb{N}$.

6. 0,5 pts

Écrire la négation de la proposition de la question 5.

Exercice 3 5 pts

Cubes et équivalences

Dans cet exercice, x et y désignent deux réels quelconques.

1. 0,75 pts

Vérifier que $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4}$.

INDICE

Développe le carré avec l'identité remarquable $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.

2. 1 pts

En déduire que $x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

INDICE

Pour le sens direct : une somme de deux nombres positifs ou nuls est nulle seulement si chacun est nul.

3. 0,75 pts

Vérifier que $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$.

4. 1 pts

Montrer par contraposée que si $x^3 = y^3$, alors $x = y$.

INDICE

Suppose $x \neq y$: les réels x et y ne sont pas nuls tous les deux. Utilise 2. et 3.

5. 1 pts

Montrer que si $x < y$, alors $x^3 < y^3$. En déduire que $x < y \Leftrightarrow x^3 < y^3$.

INDICE

Si $x < y$, le facteur $x^2 + xy + y^2$ est strictement positif d'après 1. et 2. Pour la réciproque, raisonne par contraposée.

6. 0,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x - 1)^3 < 27$.

Exercice 4 5 pts

Puissances de 1 + x et récurrence

On considère la proposition (B) : « pour tout réel $x \geq -1$ et pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1+nx$ ».

1. 0,5 pts

Écrire (B) avec des quantificateurs, la condition $x \geq -1$ étant traduite par une implication. Écrire ensuite la négation de (B).

INDICE

Applique la négation d'une proposition quantifiée (F08) aux deux quantificateurs, puis la négation d'une implication (F05).

2. 1,5 pts

Soit $x \geq -1$ un réel fixé. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1+nx$. En déduire que (B) est vraie.

INDICE

Dans l'hérédité, multiplie l'inégalité de récurrence par $1+x$, dont tu justifieras le signe, puis développe $(1+x)(1+nx)$.

3. 0,75 pts

En déduire que $0{,}99^{50} \geq \dfrac{1}{2}$ et que $1{,}02^{50} \geq 2$.

4. 0,5 pts

Soit x un réel. Montrer par contraposée que, s'il existe un entier naturel n tel que $(1+x)^n < 1+nx$, alors $x < -1$.

INDICE

Écris la négation de « il existe un entier naturel n tel que $(1+x)^n < 1+nx$ » à l'aide de la négation d'une proposition quantifiée (F08).

5. 0,75 pts

La proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1+nx$ est-elle vraie ? À quel endroit de la question 2. l'hypothèse $x \geq -1$ a-t-elle servi ?

INDICE

Avec $n = 3$, factorise $(1+x)^3 - (1+3x)$ par x^2.

6. 1 pts

Écrire la réciproque de l'implication de la question 4. En étudiant le réel $x = -\dfrac{3}{2}$, montrer qu'elle est fausse.

INDICE

Distingue le cas $n = 0$ et le cas $n \geq 1$; dans le second, situe chacun des deux membres par rapport à $-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 5 5 pts

Racine de 6 et rationnels

On rappelle qu'un réel est **rationnel** s'il s'écrit $\frac{p}{q}$, avec p et q entiers et $q \neq 0$. On admet que la somme, la différence et le produit de deux rationnels sont rationnels, ainsi que le quotient d'un rationnel par un rationnel non nul.

Pour tout réel x, on note $P(x)$ la proposition « x est rationnel ».

On rappelle (cours, exemple guidé de la racine carrée de 2) que, pour tout entier n, si n^2 est pair, alors n est pair.

1. 0,75 pts

Soit q un entier. Montrer que si q est impair, alors $3q^2$ est impair. En déduire, par contraposée, que si $3q^2$ est pair, alors q est pair.

INDICE

Écris $q = 2k+1$, avec $k \in \mathbb{Z}$, et développe $3q^2$; puis utilise la contraposée (F05).

2. 1,25 pts

Montrer par l'absurde que $\sqrt{6}$ n'est pas rationnel.

INDICE

Écris $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls et la fraction irréductible. Montre que p est pair, puis que q est pair.

3. 0,75 pts

Soit r un rationnel et x un réel non rationnel. Montrer par l'absurde que $r + x$ n'est pas rationnel et que, si $r \neq 0$, rx n'est pas rationnel. En déduire que $-\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$ et $3 - 2\sqrt{6}$ ne sont pas rationnels.

INDICE

Si $r + x$ était rationnel, que dire de $(r + x) - r$?

4. 0,5 pts

Écrire avec des quantificateurs et la notation P la proposition (S) : « la somme de deux réels non rationnels n'est pas rationnelle ». Écrire ensuite sa négation.

INDICE

Écris (S) comme une implication précédée de deux quantificateurs « pour tout », puis applique la négation d'une proposition quantifiée (F08) et la négation d'une implication (F05).

5. 0,75 pts

La proposition (S) est-elle vraie ? Même question pour la proposition « le produit de deux réels non rationnels n'est pas rationnel ».

6. 1 pts

Soit x un réel. Montrer que l'un au moins des deux réels $x+\sqrt{6}$ et $x-\sqrt{6}$ n'est pas rationnel. Commencer par écrire la négation de cette phrase.

INDICE

La phrase s'écrit $\left(\overline{P(x+\sqrt{6})} \text{ ou } \overline{P(x-\sqrt{6})}\right)$. Suppose sa négation et calcule la différence des deux réels.