BURHAN

Notions de logique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/notions-de-logique/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Sommes de deux carrés et raisonnements

Dans cet exercice, on dit qu'un entier naturel N est **somme de deux carrés** s'il existe deux entiers relatifs a et b tels que $N = a^2 + b^2$. Par exemple, $13 = 2^2 + 3^2$.

1. 1 pts

Soit n un entier relatif. Montrer que si n est pair, alors n^2 est un multiple de 4. Montrer que si n est impair, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 = 4q + 1$.

INDICE

Écris $n = 2m$, puis $n = 2m + 1$, et développe.

CORRIGÉ

Si n est pair. Il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2m$. Alors $n^2 = 4m^2$, avec $m^2 \in \mathbb{Z}$: n^2 est un multiple de 4.

Si n est impair. Il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2m + 1$. Alors :

$$\begin{aligned} n^2 &= 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 4(m^2 + m) + 1. \end{aligned}$$

Conclusion. Si n est pair, n^2 est un multiple de 4. Si n est impair, l'entier $q = m^2 + m$ vérifie $n^2 = 4q + 1$.

2. 1 pts

En déduire, par une disjonction des cas, que pour tous entiers a et b, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a^2 + b^2$ soit égal à $4q$, à $4q + 1$ ou à $4q + 2$.

INDICE

Trois cas suffisent : a et b pairs ; un seul des deux impair ; a et b impairs.

CORRIGÉ

Soit a et b deux entiers. D'après 1., il existe deux entiers q_1 et q_2 tels que :

- $a^2 = 4q_1$ si a est pair, et $a^2 = 4q_1 + 1$ si a est impair ;
- $b^2 = 4q_2$ si b est pair, et $b^2 = 4q_2 + 1$ si b est impair.

Chacun des entiers a et b est pair ou impair : les trois cas suivants sont exhaustifs.

a et b pairs. $a^2 + b^2 = 4(q_1 + q_2)$.

Un seul des deux impair. Si a est impair et b pair, $a^2 + b^2 = 4(q_1 + q_2) + 1$. L'autre situation est symétrique.

a et b impairs. $a^2 + b^2 = 4(q_1 + q_2) + 2$.

Conclusion. D'après le principe de disjonction des cas (F10), l'entier $q = q_1 + q_2$ convient dans chaque cas : $a^2 + b^2$ est égal à $4q$, à $4q + 1$ ou à $4q + 2$.

3. 0,5 pts

On considère la proposition (S) : « aucun entier de la forme $4k+3$, avec $k \in \mathbb{N}$, n'est somme de deux carrés ». Écrire (S) avec des quantificateurs, puis écrire sa négation.

INDICE

Trois variables sont quantifiées : k, a et b. Pour la négation, applique à chacune la négation d'une proposition quantifiée (F08).

CORRIGÉ

Écriture de (S).

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{Z},\ \forall b \in \mathbb{Z},$$
$$a^2 + b^2 \neq 4k+3.$$

Négation. D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), appliquée à chaque quantificateur, la négation de (S) est :

$$\exists k \in \mathbb{N},\ \exists a \in \mathbb{Z},\ \exists b \in \mathbb{Z},$$
$$a^2 + b^2 = 4k+3.$$

4. 1 pts

Démontrer (S) par l'absurde.

INDICE

Suppose qu'il existe k, a et b tels que $a^2+b^2 = 4k+3$, et utilise le résultat de la question 2.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde la négation de (S) : il existe $k \in \mathbb{N}$ et deux entiers a et b tels que $a^2+b^2 = 4k+3$.

Comparaison des écritures. D'après 2., il existe $q \in \mathbb{Z}$ et un entier r égal à 0, 1 ou 2 tels que $a^2+b^2 = 4q+r$. Alors $4k+3 = 4q+r$, donc :

$$4(q-k) = 3-r.$$

Encadrement. Comme r vaut 0, 1 ou 2, on a $1 \leq 3-r \leq 3$. Donc $1 \leq 4(q-k) \leq 3$. En divisant par $4>0$, on obtient $\frac{1}{4} \leq q-k \leq \frac{3}{4}$, d'où $0 < q-k < 1$.

Contradiction. L'entier $q-k$ serait strictement compris entre 0 et 1 : c'est impossible.

Conclusion. D'après le principe du raisonnement par l'absurde (F11), (S) est vraie.

5. 0,5 pts

L'entier 2027 est-il somme de deux carrés ?

CORRIGÉ

On a $2027 = 4 \times 506 + 3$, avec $506 \in \mathbb{N}$: 2027 est de la forme $4k+3$.

Conclusion. D'après 4., 2027 n'est pas somme de deux carrés.

6. 1 pts

Écrire la réciproque de l'implication « si N est de la forme $4k+3$, alors N n'est pas somme de deux carrés ». Montrer qu'elle est fausse.

INDICE

Cherche un entier naturel inférieur à 10 qui n'est pas somme de deux carrés, et qui n'est pas de la forme $4k+3$.

CORRIGÉ

Réciproque. « Si N n'est pas somme de deux carrés, alors N est de la forme $4k+3$ ».

6 **n'est pas de la forme** $4k+3$**.** On a $6 = 4\times 1 + 2$, et $6-3=3$ n'est pas un multiple de 4.

6 **n'est pas somme de deux carrés.** Supposons $a^2+b^2=6$, avec a et b entiers. Comme $b^2\geq 0$, on a $a^2\leq 6$. Si $|a|\geq 3$, alors $a^2\geq 9>6$; donc $|a|\leq 2$, et a^2 vaut 0, 1 ou 4. De même pour b^2. Les sommes possibles sont 0, 1, 2, 4, 5 et 8 : aucune ne vaut 6.

Conclusion. L'entier 6 est un contre-exemple : la réciproque est fausse.

Exercice 2 5 pts

Puissances de 2 et cubes

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition « $2^n > n^3$ ».

1. 0,75 pts

Calculer 2^n et n^3 pour les entiers n de 0 à 10. Pour quelles de ces valeurs $P(n)$ est-elle vraie ? La proposition $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est-elle vraie ?

INDICE

Présente les valeurs dans un tableau, une ligne par entier n.

CORRIGÉ

n	2^n	n^3	$P(n)$
0	1	0	V
1	2	1	V
2	4	8	F
3	8	27	F
4	16	64	F
5	32	125	F
6	64	216	F
7	128	343	F
8	256	512	F
9	512	729	F
10	1024	1000	V

Lecture. $P(n)$ est vraie pour $n = 0, 1$ et 10, fausse pour les entiers de 2 à 9.

Conclusion. L'entier 2 est un contre-exemple. D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), la proposition $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est fausse.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 4$, $n^3 > 3n^2 + 3n + 1$. En déduire que $2n^3 > (n+1)^3$.

INDICE

Comme $n \geq 4$, on a $n^3 \geq 4n^2$ et $n^2 \geq 4n$. Développe ensuite $(n+1)^3$.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 4$ un entier.

Première inégalité. En multipliant $n \geq 4$ par $n^2 > 0$, on obtient $n^3 \geq 4n^2$. En multipliant $n \geq 4$ par $n > 0$, on obtient $n^2 \geq 4n$. Comme de plus $n > 1$:

$$\begin{aligned} n^3 &\geq 3n^2 + n^2 \\ &\geq 3n^2 + 4n \\ &= 3n^2 + 3n + n \\ &> 3n^2 + 3n + 1. \end{aligned}$$

Seconde inégalité. On développe $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. D'après la première inégalité :

$$\begin{aligned} 2n^3 &= n^3 + n^3 \\ &> n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= (n+1)^3. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 4$, $n^3 > 3n^2 + 3n + 1$ et $2n^3 > (n+1)^3$.

3. 1,5 pts

Démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 10$.

INDICE

Dans l'hérédité, écris $2^{n+1} = 2 \times 2^n$, utilise $P(n)$, puis la question 2.

CORRIGÉ

Initialisation. $2^{10} = 1024$ et $10^3 = 1000$. Comme $1024 > 1000$, $P(10)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 10$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. On multiplie $2^n > n^3$ par $2 > 0$. Comme $n \geq 4$, la question 2. s'applique :

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &> 2n^3 \\ &> (n+1)^3. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence (F12), $2^n > n^3$ pour tout entier $n \geq 10$.

4. 0,75 pts

En déduire tous les entiers naturels n tels que $2^n \leq n^3$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux cas suivants couvrent tous les entiers naturels.

Cas $n \leq 9$. D'après le tableau de la question 1., $2^n \leq n^3$ exactement pour les entiers de 2 à 9.

Cas $n \geq 10$. D'après 3., $2^n > n^3$: aucun de ces entiers ne convient.

Conclusion. D'après le principe de disjonction des cas (F10), les entiers naturels n tels que $2^n \leq n^3$ sont les huit entiers de 2 à 9.

5. 0,5 pts

Écrire avec des quantificateurs la phrase « il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel $n \geq N$, 2^n est strictement supérieur à n^3 », puis justifier qu'elle est vraie.

INDICE

La condition « $n \geq N$ » se traduit par une implication placée après $\forall n \in \mathbb{N}$.

CORRIGÉ

Écriture.

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\\ (n \geq N \Rightarrow 2^n > n^3).$$

Justification. Prenons $N = 10$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 10$: d'après 3., $2^n > n^3$.

Conclusion. L'entier $N = 10$ convient : la proposition est vraie.

6. 0,5 pts

Écrire la négation de la proposition de la question 5.

CORRIGÉ

D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), puis la négation d'une implication (F05), la négation est :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\\ (n \geq N \text{ et } 2^n \leq n^3).$$

Exercice 3 5 pts

Cubes et équivalences

Dans cet exercice, x et y désignent deux réels quelconques.

1. 0,75 pts

Vérifier que $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$.

INDICE

Développe le carré avec l'identité remarquable $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.

CORRIGÉ

On développe le carré avec l'identité $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$:

$$\begin{aligned}&\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\\ &= x^2 + xy + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4}\\ &= x^2 + xy + y^2.\end{aligned}$$

Conclusion. L'égalité demandée est vraie pour tous réels x et y.

2. 1 pts

En déduire que $x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

INDICE

Pour le sens direct : une somme de deux nombres positifs ou nuls est nulle seulement si chacun est nul.

CORRIGÉ

Sens réciproque. Si $x = 0$ et $y = 0$, alors $x^2 + xy + y^2 = 0$.

Sens direct. Supposons $x^2 + xy + y^2 = 0$. D'après 1., c'est la somme des deux nombres positifs ou nuls $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2$ et $\frac{3y^2}{4}$. Une telle somme n'est nulle que si chacun de ses termes est nul :

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 &= 0,\\ \frac{3y^2}{4} &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi $y^2 = 0$, puis $y = 0$; et $x + \frac{y}{2} = 0$, soit $x = 0$.

Conclusion. Les deux implications sont vraies. D'après la double implication (F06), $x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

3. 0,75 pts

Vérifier que $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$.

CORRIGÉ

On développe :

$$\begin{aligned}(x-y)(x^2+xy+y^2) &= x^3 + x^2y + xy^2 \\ &\quad - x^2y - xy^2 - y^3 \\ &= x^3 - y^3.\end{aligned}$$

Conclusion. L'égalité demandée est vraie pour tous réels x et y.

4. 1 pts

Montrer par contraposée que si $x^3 = y^3$, alors $x = y$.

INDICE

Suppose $x \neq y$: les réels x et y ne sont pas nuls tous les deux. Utilise 2. et 3.

CORRIGÉ

Raisonnons par contraposée : montrons que si $x \neq y$, alors $x^3 \neq y^3$.

Les deux facteurs sont non nuls. Supposons $x \neq y$. Alors $x - y \neq 0$. De plus, x et y ne sont pas nuls tous les deux, sinon ils seraient égaux ; d'après 2., $x^2 + xy + y^2 \neq 0$.

Le produit est non nul. Un produit de deux réels non nuls n'est pas nul. D'après 3., $x^3 - y^3 \neq 0$, donc $x^3 \neq y^3$.

Conclusion. La contraposée est démontrée. Une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité (contraposée, F05) : si $x^3 = y^3$, alors $x = y$.

5. 1 pts

Montrer que si $x < y$, alors $x^3 < y^3$. En déduire que $x < y \Leftrightarrow x^3 < y^3$.

INDICE

Si $x < y$, le facteur $x^2 + xy + y^2$ est strictement positif d'après 1. et 2. Pour la réciproque, raisonne par contraposée.

CORRIGÉ

Implication directe. Supposons $x < y$. Alors $x \neq y$, donc x et y ne sont pas nuls tous les deux. D'après 1., $x^2 + xy + y^2 \geq 0$, et d'après 2., $x^2 + xy + y^2 \neq 0$: ce facteur est strictement positif. Comme $x - y < 0$, la question 3. donne $x^3 - y^3 < 0$, soit $x^3 < y^3$.

Réciproque, par contraposée. Supposons $x \geq y$ et montrons $x^3 \geq y^3$. Deux cas se présentent.

- Si $x = y$, alors $x^3 = y^3$.
- Si $y < x$, l'implication directe, appliquée en échangeant les rôles de x et y, donne $y^3 < x^3$.

Dans les deux cas, $x^3 \geq y^3$. Par contraposée (F05), l'implication $(x^3 < y^3 \Rightarrow x < y)$ est vraie.

Conclusion. Les deux implications sont vraies. D'après la double implication (F06) :

$$x < y \Leftrightarrow x^3 < y^3.$$

6. 0,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x - 1)^3 < 27$.

CORRIGÉ

On a $27 = 3^3$. On applique 5. aux réels $2x - 1$ et 3, puis on effectue des opérations réversibles :

$$\begin{aligned}(2x-1)^3 < 3^3 &\Leftrightarrow 2x - 1 < 3 \\ &\Leftrightarrow 2x < 4 \\ &\Leftrightarrow x < 2.\end{aligned}$$

Conclusion. Les solutions de l'inéquation $(2x - 1)^3 < 27$ sont les réels x tels que $x < 2$.

Exercice 4 5 pts

Puissances de 1 + x et récurrence

On considère la proposition (B) : « pour tout réel $x \geq -1$ et pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1+nx$ ».

1. 0,5 pts

Écrire (B) avec des quantificateurs, la condition $x \geq -1$ étant traduite par une implication. Écrire ensuite la négation de (B).

INDICE

Applique la négation d'une proposition quantifiée (F08) aux deux quantificateurs, puis la négation d'une implication (F05).

CORRIGÉ

Écriture de (B).

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\\&\big(x \geq -1 \Rightarrow\\&\quad (1+x)^n \geq 1+nx\big).\end{aligned}$$

Négation. D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), puis la négation d'une implication (F05), la négation de (B) est :

$$\begin{aligned}&\exists x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\\&\big(x \geq -1 \text{ et}\\&\quad (1+x)^n < 1+nx\big).\end{aligned}$$

2. 1,5 pts

Soit $x \geq -1$ un réel fixé. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1+nx$. En déduire que (B) est vraie.

INDICE

Dans l'hérédité, multiplie l'inégalité de récurrence par $1+x$, dont tu justifieras le signe, puis développe $(1+x)(1+nx)$.

CORRIGÉ

Soit $x \geq -1$ un réel fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la proposition « $(1+x)^n \geq 1+nx$ ».

Initialisation. $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie ; montrons que $P(n+1)$ est vraie. Comme $x \geq -1$, on a $1+x \geq 0$. On multiplie l'inégalité $(1+x)^n \geq 1+nx$ par le réel positif ou nul $1+x$, sans changer le sens :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geq (1+x)(1+nx)\\ &= 1 + (n+1)x + nx^2\\ &\geq 1 + (n+1)x,\end{aligned}$$

car $nx^2 \geq 0$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence (F12), $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Ce raisonnement vaut pour tout réel $x \geq -1$: la proposition (B) est vraie.

3. 0,75 pts

En déduire que $0{,}99^{50} \geq \dfrac{1}{2}$ et que $1{,}02^{50} \geq 2$.

CORRIGÉ

On applique 2. avec $n = 50$.

Premier nombre. Le réel $x = -0{,}01$ vérifie $x \geq -1$, donc :

$$\begin{aligned}0{,}99^{50} &= (1+x)^{50}\\ &\geq 1 + 50 \times (-0{,}01)\\ &= 1 - 0{,}5 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Second nombre. Le réel $x = 0{,}02$ vérifie $x \geq -1$, donc :

$$\begin{aligned}1{,}02^{50} &= (1+x)^{50}\\ &\geq 1 + 50 \times 0{,}02\\ &= 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

Conclusion. $0{,}99^{50} \geq \dfrac{1}{2}$ et $1{,}02^{50} \geq 2$.

4. 0,5 pts

Soit x un réel. Montrer par contraposée que, s'il existe un entier naturel n tel que $(1+x)^n < 1+nx$, alors $x < -1$.

INDICE

Écris la négation de « il existe un entier naturel n tel que $(1+x)^n < 1+nx$ » à l'aide de la négation d'une proposition quantifiée (F08).

CORRIGÉ

Les deux négations. La négation de $x < -1$ est $x \geq -1$. D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), la négation de « il existe un entier naturel n tel que $(1+x)^n < 1+nx$ » est :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1+nx.$$

La contraposée. Elle s'énonce : « si $x \geq -1$, alors, pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1+nx$ ». C'est exactement le résultat de la question 2. : elle est vraie.

Conclusion. Une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité (contraposée, F05) : s'il existe un entier naturel n tel que $(1+x)^n < 1+nx$, alors $x < -1$.

5. 0,75 pts

La proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1+nx$ est-elle vraie ? À quel endroit de la question 2. l'hypothèse $x \geq -1$ a-t-elle servi ?

INDICE

Avec $n = 3$, factorise $(1+x)^3 - (1+3x)$ par x^2.

CORRIGÉ

La proposition est fausse. Prenons $x = -4$ et $n = 3$:

$$(1+x)^3 = (-3)^3 = -27,$$
$$1 + 3 \times (-4) = -11.$$

Comme $-27 < -11$, le couple $(-4, 3)$ est un contre-exemple. D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), la proposition est fausse.

Rôle de l'hypothèse. Dans la question 2., l'hypothèse $x \geq -1$ a servi dans l'hérédité, pour affirmer que $1+x \geq 0$. C'est ce qui permet de multiplier l'inégalité de récurrence par $1+x$ sans en changer le sens. Pour $x = -4$, on a $1+x = -3 < 0$, et cet argument ne s'applique plus.

Conclusion. La proposition est fausse ; l'hypothèse $x \geq -1$ sert, dans l'hérédité, à multiplier par $1+x$ sans changer le sens.

6. 1 pts

Écrire la réciproque de l'implication de la question 4. En étudiant le réel $x = -\dfrac{3}{2}$, montrer qu'elle est fausse.

INDICE

Distingue le cas $n = 0$ et le cas $n \geq 1$; dans le second, situe chacun des deux membres par rapport à $-\dfrac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Réciproque. « Si $x < -1$, alors il existe un entier naturel n tel que $(1+x)^n < 1 + nx$ ».

Le réel étudié. Prenons $x = -\dfrac{3}{2}$, qui vérifie $x < -1$. Alors $1 + x = -\dfrac{1}{2}$ et $1 + nx = 1 - \dfrac{3n}{2}$. Montrons que, pour tout entier naturel n :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n \geq 1 - \frac{3n}{2}.$$

Les deux cas suivants couvrent tous les entiers naturels.

Cas $n = 0$. Les deux membres valent 1.

Cas $n \geq 1$. On a $2^n = 2 \times 2^{n-1} \geq 2$, car $2^{n-1} \geq 1$; donc $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leq \dfrac{1}{2}$.

Selon la parité de n, le réel $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ est égal à $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ou à $-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$: dans les deux cas, il est supérieur ou égal à $-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

D'autre part, $1 - \dfrac{3n}{2} \leq 1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2}\right)^n &\geq -\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &\geq -\frac{1}{2} \\ &\geq 1 - \frac{3n}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. D'après le principe de disjonction des cas (F10), pour $x = -\dfrac{3}{2}$, aucun entier naturel n ne vérifie $(1+x)^n < 1 + nx$, alors que $x < -1$: la réciproque est fausse.

Exercice 5 5 pts

Racine de 6 et rationnels

On rappelle qu'un réel est **rationnel** s'il s'écrit $\frac{p}{q}$, avec p et q entiers et $q \neq 0$. On admet que la somme, la différence et le produit de deux rationnels sont rationnels, ainsi que le quotient d'un rationnel par un rationnel non nul.

Pour tout réel x, on note $P(x)$ la proposition « x est rationnel ».

On rappelle (cours, exemple guidé de la racine carrée de 2) que, pour tout entier n, si n^2 est pair, alors n est pair.

1. 0,75 pts

Soit q un entier. Montrer que si q est impair, alors $3q^2$ est impair. En déduire, par contraposée, que si $3q^2$ est pair, alors q est pair.

INDICE

Écris $q = 2k+1$, avec $k \in \mathbb{Z}$, et développe $3q^2$; puis utilise la contraposée (F05).

CORRIGÉ

Si q est impair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $q = 2k+1$. Alors :

$$\begin{aligned} 3q^2 &= 3(4k^2+4k+1) \\ &= 12k^2+12k+3 \\ &= 2(6k^2+6k+1)+1, \end{aligned}$$

avec $6k^2+6k+1 \in \mathbb{Z}$: $3q^2$ est impair.

Contraposée. La contraposée de « si $3q^2$ est pair, alors q est pair » est « si q est impair, alors $3q^2$ est impair », que l'on vient de démontrer.

Conclusion. Une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité (contraposée, F05) : si $3q^2$ est pair, alors q est pair.

2. 1,25 pts

Montrer par l'absurde que $\sqrt{6}$ n'est pas rationnel.

INDICE

Écris $\sqrt{6} = \dfrac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls et la fraction irréductible. Montre que p est pair, puis que q est pair.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde que $\sqrt{6}$ est rationnel. Comme $\sqrt{6} > 0$, on peut l'écrire $\sqrt{6} = \dfrac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls, la fraction $\dfrac{p}{q}$ étant choisie irréductible.

p est pair. En élevant au carré, $p^2 = 6q^2 = 2 \times 3q^2$: p^2 est pair, donc p est pair d'après le rappel de l'introduction.

q est pair. Écrivons $p = 2m$, avec $m \in \mathbb{N}$. Alors $4m^2 = 6q^2$, soit $2m^2 = 3q^2$. Ainsi $3q^2$ est pair, donc q est pair d'après 1.

Contradiction. Les entiers p et q sont pairs tous les deux, alors que la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible.

Conclusion. D'après le principe du raisonnement par l'absurde (F11), $\sqrt{6}$ n'est pas rationnel.

3. 0,75 pts

Soit r un rationnel et x un réel non rationnel. Montrer par l'absurde que $r + x$ n'est pas rationnel et que, si $r \neq 0$, rx n'est pas rationnel. En déduire que $-\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$ et $3 - 2\sqrt{6}$ ne sont pas rationnels.

INDICE

Si $r + x$ était rationnel, que dire de $(r + x) - r$?

CORRIGÉ

Somme. Supposons par l'absurde que $r + x$ est rationnel. Alors $x = (r + x) - r$ est la différence de deux rationnels, donc x est rationnel. Cela contredit l'hypothèse : $r + x$ n'est pas rationnel.

Produit. Supposons $r \neq 0$ et, par l'absurde, rx rationnel. Alors $x = \dfrac{rx}{r}$ est le quotient d'un rationnel par un rationnel non nul, donc x est rationnel. Cela contredit l'hypothèse : rx n'est pas rationnel.

Application. D'après 2., $\sqrt{6}$ n'est pas rationnel.

- Produit avec $r = -1$, puis avec $r = 2$: $-\sqrt{6}$ et $2\sqrt{6}$ ne sont pas rationnels.
- Produit avec $r = -2$: $-2\sqrt{6}$ n'est pas rationnel ; puis somme avec $r = 3$: $3 - 2\sqrt{6} = 3 + (-2\sqrt{6})$ n'est pas rationnel.

Conclusion. Les réels $-\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$ et $3 - 2\sqrt{6}$ ne sont pas rationnels.

4. 0,5 pts

Écrire avec des quantificateurs et la notation P la proposition (S) : « la somme de deux réels non rationnels n'est pas rationnelle ». Écrire ensuite sa négation.

INDICE

Écris (S) comme une implication précédée de deux quantificateurs « pour tout », puis applique la négation d'une proposition quantifiée (F08) et la négation d'une implication (F05).

CORRIGÉ

Écriture de (S).

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\\ \big((\overline{P(x)} \text{ et } \overline{P(y)}) \Rightarrow \overline{P(x+y)}\big).$$

Négation. D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), puis la négation d'une implication (F05) et la double négation (F04), la négation de (S) est :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\\ \big((\overline{P(x)} \text{ et } \overline{P(y)}) \text{ et } P(x+y)\big).$$

5. 0,75 pts

La proposition (S) est-elle vraie ? Même question pour la proposition « le produit de deux réels non rationnels n'est pas rationnel ».

CORRIGÉ

(S) **est fausse.** Prenons $x = \sqrt{6}$ et $y = -\sqrt{6}$. Aucun des deux n'est rationnel, d'après 2. et 3. Pourtant $x + y = 0 = \dfrac{0}{1}$ est rationnel : ce couple vérifie la négation écrite en 4.

La seconde proposition est fausse. Prenons $x = y = \sqrt{6}$: aucun des deux réels n'est rationnel, et $xy = 6 = \dfrac{6}{1}$ est rationnel.

Conclusion. Les deux propositions sont fausses : la somme, comme le produit, de deux réels non rationnels peut être rationnelle.

6. 1 pts

Soit x un réel. Montrer que l'un au moins des deux réels $x+\sqrt{6}$ et $x-\sqrt{6}$ n'est pas rationnel. Commencer par écrire la négation de cette phrase.

INDICE

La phrase s'écrit $\left(\overline{P(x+\sqrt{6})} \text{ ou } \overline{P(x-\sqrt{6})}\right)$. Suppose sa négation et calcule la différence des deux réels.

CORRIGÉ

La phrase et sa négation. La phrase s'écrit :

$$\overline{P(x+\sqrt{6})} \text{ ou } \overline{P(x-\sqrt{6})}.$$

D'après les lois de Morgan et la double négation (F04), sa négation est $\left(P(x+\sqrt{6}) \text{ et } P(x-\sqrt{6})\right)$: les deux réels sont rationnels.

Raisonnement par l'absurde. Supposons cette négation. Alors $(x+\sqrt{6})-(x-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$ est la différence de deux rationnels, donc $2\sqrt{6}$ est rationnel. Or, d'après 3., $2\sqrt{6}$ n'est pas rationnel : c'est une contradiction.

Conclusion. D'après le principe du raisonnement par l'absurde (F11), l'un au moins des réels $x+\sqrt{6}$ et $x-\sqrt{6}$ n'est pas rationnel, et cela pour tout réel x, rationnel ou non.