BURHAN

Notions de logique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/notions-de-logique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Entraînement	8

Exercice 1

L'ordre des quantificateurs

On considère les deux propositions suivantes.

- P_1 : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists m \in \mathbb{Z},\ n < m < n+2$.
- P_2 : $\exists m \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ n < m < n+2$.

1.

Montrer que P_1 est vraie.

INDICE

Soit $n \in \mathbb{Z}$: propose un entier m qui dépend de n.

2.

Écrire la négation de P_2, puis montrer que P_2 est fausse.

INDICE

La négation de « $n < m$ et $m < n+2$ » s'obtient par les lois de Morgan (F04). Pour un m donné, essaie $n = m$.

3.

Montrer que la proposition $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ xy = 0$ est vraie. En déduire, sans calcul, la valeur de vérité de $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ xy = 0$.

INDICE

Cherche un réel y qui ne dépend pas de x. Utilise ensuite l'ordre des quantificateurs (F09).

4.

La proposition $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = y$ est-elle vraie ?

INDICE

Étudie le signe d'un carré de réel.

Exercice 2

Une contraposée sur la parité d'une somme

Soit a et b deux entiers relatifs. On veut démontrer l'implication (I) : « si $a+b$ est impair, alors a est pair ou b est pair ».

1.

Écrire la contraposée de (I).

INDICE

Nie la conclusion avec une loi de Morgan (F04), puis échange les rôles (contraposée, F05).

2.

Démontrer cette contraposée, puis conclure.

INDICE

Écris $a=2k+1$ et $b=2m+1$ avec deux lettres différentes, puis factorise $a+b$ par 2.

3.

Écrire la réciproque de (I). Est-elle vraie pour tous entiers a et b ?

INDICE

Cherche deux entiers pairs.

Exercice 3

Une équivalence justifiée pas à pas

On s'intéresse à l'équation (E) : $\sqrt{x+7} = x+1$, d'inconnue réelle $x \geq -7$.

On rappelle que, pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$:

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2.$$

1.

Montrer que, pour tout réel $x \geq -7$:

$$(E) \Leftrightarrow \big(x \geq -1 \quad \text{et } x^2 + x - 6 = 0\big).$$

INDICE

Distingue $x < -1$ et $x \geq -1$. Dans le second cas, applique le résultat rappelé avec $a = \sqrt{x+7}$ et $b = x+1$.

2.

Vérifier que $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ pour tout réel x, puis résoudre (E).

INDICE

Développe le produit. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ; garde ensuite la condition $x \geq -1$.

3.

Un élève élève directement les deux membres au carré et trouve deux solutions, 2 et -3. Expliquer son erreur.

INDICE

Calcule les deux membres de (E) pour $x = -3$.

Exercice 4

Raisonnements par l'absurde sur des entiers et des racines

1.

Montrer que, pour tous entiers a et b, $6a + 9b$ est un multiple de 3.

INDICE

Factorise par 3.

2.

En déduire, par l'absurde, qu'il n'existe aucun couple d'entiers (a, b) tel que $6a + 9b = 10$.

INDICE

Suppose qu'un tel couple existe. D'après 1., 10 s'écrit alors $3q$ avec q entier : encadre q.

3.

Soit x un réel strictement positif. Montrer par l'absurde que $\sqrt{x+1} \neq \sqrt{x} + 1$.

INDICE

Suppose l'égalité, puis élève au carré deux nombres positifs. Le terme $2\sqrt{x}$ apparaît.

4.

L'hypothèse $x > 0$ de la question 3. est-elle utile ?

INDICE

Regarde ce qui se passe pour $x = 0$.

Exercice 5

Parité par disjonction des cas

1.

Soit n un entier. Montrer, en distinguant le cas n pair et le cas n impair, que $n^2 + 3n$ est pair.

INDICE

Dans chaque cas, écris n avec un entier k, développe, puis factorise par 2.

2.

En déduire que, pour tout entier n, $n^2 + 3n + 7$ est impair.

INDICE

Écris $n^2 + 3n = 2p$ d'après 1., puis fais apparaître la forme $2(\dots) + 1$.

3.

Montrer par l'absurde qu'aucun entier n ne vérifie $n^2 + 3n = 2025$.

INDICE

Suppose qu'un tel entier existe et utilise 1.

Exercice 6

Valeur absolue : distinguer les cas

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-2| = 2x - 7$, en distinguant le cas $x \geq 2$ et le cas $x < 2$.

INDICE

Dans chaque cas, remplace $|x-2|$ par $x-2$ ou par $2-x$. Vérifie ensuite que la solution trouvée respecte la condition du cas.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $|x| + |x-4| \geq 4$.

INDICE

Les expressions x et $x-4$ changent de signe en 0 et en 4 : distingue $x < 0$, $0 \leq x \leq 4$ et $x > 4$.

3.

Pour quels réels x a-t-on $|x| + |x-4| = 4$?

INDICE

Reprends les trois cas de la question 2. et regarde dans lesquels l'inégalité est stricte.

Exercice 7

Une somme de produits par récurrence

On veut montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

On note $P(n)$ cette égalité.

1.

Vérifier $P(1)$ et $P(2)$.

INDICE

Pour $n = 1$, la somme n'a qu'un terme : 1×2.

2.

Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. Montrer que $P(n+1)$ est vraie.

INDICE

Écris la somme jusqu'au rang $n+1$ comme la somme jusqu'au rang n, plus le terme $(n+1)(n+2)$. Factorise ensuite par $(n+1)(n+2)$.

3.

Conclure, puis calculer $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 20 \times 21$.

INDICE

Cite le principe de récurrence (F12), puis applique la formule avec $n = 20$.

Exercice 8

Divisibilité par récurrence

On veut montrer que, pour tout entier naturel n, $7^n - 2^n$ est un multiple de 5.

1.

Vérifier la propriété pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

INDICE

Calcule $7^n - 2^n$ dans chaque cas.

2.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $7^{n+1} - 2^{n+1} = 7(7^n - 2^n) + 5 \times 2^n$.

INDICE

Développe le membre de droite et regroupe les termes en 2^n.

3.

Démontrer la propriété par récurrence.

INDICE

Dans l'hérédité, écris $7^n - 2^n = 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, puis utilise 2.

4.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $7^n + 4 \times 2^n$ est un multiple de 5.

INDICE

Fais apparaître $7^n - 2^n$ dans l'expression.