BURHAN

Notions de logique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/notions-de-logique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Entraînement	8

Exercice 1

L'ordre des quantificateurs

On considère les deux propositions suivantes.

- P_1 : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists m \in \mathbb{Z},\ n < m < n + 2$.
- P_2 : $\exists m \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ n < m < n + 2$.

1.

Montrer que P_1 est vraie.

INDICE

Soit $n \in \mathbb{Z}$: propose un entier m qui dépend de n.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Prenons $m = n + 1$, qui est un entier. Alors :

$$n < n + 1 < n + 2.$$

Conclusion. Pour tout entier n, l'entier $m = n + 1$ convient : P_1 est vraie. L'entier m choisi dépend de n.

2.

Écrire la négation de P_2, puis montrer que P_2 est fausse.

INDICE

La négation de « $n < m$ et $m < n + 2$ » s'obtient par les lois de Morgan (F04). Pour un m donné, essaie $n = m$.

CORRIGÉ

Négation. D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), puis les lois de Morgan (F04), la négation de P_2 est :

$$\begin{aligned}&\forall m \in \mathbb{Z},\ \exists n \in \mathbb{Z},\\&(m \leq n \text{ ou } m \geq n + 2).\end{aligned}$$

Cette négation est vraie. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Prenons $n = m$: alors $m \leq n$ est vraie, donc la disjonction est vraie.

Conclusion. La négation de P_2 est vraie, donc P_2 est fausse.

3.

Montrer que la proposition $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ xy = 0$ est vraie. En déduire, sans calcul, la valeur de vérité de $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ xy = 0$.

INDICE

Cherche un réel y qui ne dépend pas de x. Utilise ensuite l'ordre des quantificateurs (F09).

CORRIGÉ

Première proposition. Prenons $y = 0$, choisi avant x. Soit $x \in \mathbb{R}$: $xy = x \times 0 = 0$. Le même réel y convient pour tous les x : la première proposition est vraie.

Seconde proposition. D'après l'ordre des quantificateurs (F09), une proposition « il existe… pour tout » entraîne la proposition « pour tout… il existe » correspondante.

Conclusion. La proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ xy = 0$ est vraie.

4.

La proposition $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = y$ est-elle vraie ?

INDICE

Étudie le signe d'un carré de réel.

CORRIGÉ

Cette proposition est fausse. D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), sa négation est :

$$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq y.$$

Prenons $y = -1$. Soit $x \in \mathbb{R}$: un carré est positif ou nul, donc $x^2 \geq 0 > -1$, et $x^2 \neq y$.

Conclusion. La négation est vraie, donc la proposition $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = y$ est fausse.

Exercice 2

Une contraposée sur la parité d'une somme

Soit a et b deux entiers relatifs. On veut démontrer l'implication (I) : « si $a+b$ est impair, alors a est pair ou b est pair ».

1.

Écrire la contraposée de (I).

INDICE

Nie la conclusion avec une loi de Morgan (F04), puis échange les rôles (contraposée, F05).

CORRIGÉ

Négations. D'après les lois de Morgan (F04), la négation de « a est pair ou b est pair » est « a est impair et b est impair ». La négation de « $a+b$ est impair » est « $a+b$ est pair ».

Conclusion. D'après la définition de la contraposée (F05), la contraposée de (I) est : « si a est impair et b est impair, alors $a+b$ est pair ».

2.

Démontrer cette contraposée, puis conclure.

INDICE

Écris $a=2k+1$ et $b=2m+1$ avec deux lettres différentes, puis factorise $a+b$ par 2.

CORRIGÉ

Raisonnons par contraposée. Supposons a et b impairs : il existe deux entiers k et m tels que $a=2k+1$ et $b=2m+1$. Alors :

$$\begin{aligned} a+b &= 2k+2m+2 \\ &= 2(k+m+1), \end{aligned}$$

avec $k+m+1\in\mathbb{Z}$. Donc $a+b$ est pair : la contraposée est démontrée.

Conclusion. Une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité (contraposée, F05) : l'implication (I) est vraie pour tous entiers a et b.

3.

Écrire la réciproque de (I). Est-elle vraie pour tous entiers a et b ?

INDICE

Cherche deux entiers pairs.

CORRIGÉ

La réciproque de (I) est : « si a est pair ou b est pair, alors $a+b$ est impair ».

Prenons $a=2$ et $b=2$. L'entier a est pair, donc la prémisse est vraie. Mais $a+b=4=2\times 2$ est pair : la conclusion est fausse.

Conclusion. La réciproque de (I) n'est pas vraie pour tous entiers a et b : le couple $a=b=2$ est un contre-exemple.

Exercice 3

Une équivalence justifiée pas à pas

On s'intéresse à l'équation (E) : $\sqrt{x+7} = x+1$, d'inconnue réelle $x \geq -7$.

On rappelle que, pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$:

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2.$$

1.

Montrer que, pour tout réel $x \geq -7$:

$$(E) \Leftrightarrow \big(x \geq -1 \\ \text{et } x^2 + x - 6 = 0\big).$$

INDICE

Distingue $x < -1$ et $x \geq -1$. Dans le second cas, applique le résultat rappelé avec $a = \sqrt{x+7}$ et $b = x+1$.

CORRIGÉ

Soit $x \geq -7$. Les cas $x < -1$ et $x \geq -1$ couvrent toutes les possibilités.

Cas $x < -1$. Alors $x + 1 < 0 \leq \sqrt{x+7}$, donc (E) est fausse. La proposition $(x \geq -1 \text{ et } x^2 + x - 6 = 0)$ est fausse aussi, car $x \geq -1$ est fausse. Les deux membres ont la même valeur : l'équivalence est vraie.

Cas $x \geq -1$. Les réels $\sqrt{x+7}$ et $x+1$ sont positifs ou nuls. D'après le résultat rappelé, appliqué à $a = \sqrt{x+7}$ et $b = x+1$:

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow x + 7 = (x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow x + 7 = x^2 + 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0.\end{aligned}$$

Comme $x \geq -1$ est vraie, la proposition $(x \geq -1 \text{ et } x^2 + x - 6 = 0)$ a la valeur de $x^2 + x - 6 = 0$, d'après la définition de la conjonction (F02). L'équivalence est vraie.

Conclusion. Dans les deux cas, l'équivalence demandée est vraie, et cela pour tout réel $x \geq -7$.

2.

Vérifier que $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ pour tout réel x, puis résoudre (E).

INDICE

Développe le produit. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ; garde ensuite la condition $x \geq -1$.

CORRIGÉ

Factorisation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x-2)(x+3)\\&= x^2 + 3x - 2x - 6\\&= x^2 + x - 6.\end{aligned}$$

Résolution. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $x^2 + x - 6 = 0$ équivaut à « $x = 2$ ou $x = -3$ ». D'après 1., on garde les valeurs qui vérifient $x \geq -1$: seule $x = 2$ convient.

Vérification. $\sqrt{2+7} = 3$ et $2 + 1 = 3$.

Conclusion. L'équation (E) a une seule solution : $x = 2$.

3.

Un élève élève directement les deux membres au carré et trouve deux solutions, 2 et -3. Expliquer son erreur.

INDICE

Calcule les deux membres de (E) pour $x = -3$.

CORRIGÉ

Pour $x = -3$: $\sqrt{-3+7} = \sqrt{4} = 2$, alors que $x + 1 = -2$. Le réel -3 n'est pas solution de (E).

Élever au carré ne donne qu'une implication : (E) entraîne $x + 7 = (x+1)^2$. D'après le résultat rappelé, la réciproque n'est garantie que si $x + 1 \geq 0$.

Conclusion. L'élève a traité une implication comme une équivalence, en oubliant la condition $x + 1 \geq 0$: il a ajouté la solution parasite -3.

Exercice 4

Raisonnements par l'absurde sur des entiers et des racines

1.

Montrer que, pour tous entiers a et b, $6a + 9b$ est un multiple de 3.

INDICE

Factorise par 3.

CORRIGÉ

Soit a et b deux entiers. On factorise par 3 :

$$6a + 9b = 3(2a + 3b),$$

avec $2a + 3b \in \mathbb{Z}$. Donc $6a + 9b$ est un multiple de 3.

2.

En déduire, par l'absurde, qu'il n'existe aucun couple d'entiers (a, b) tel que $6a + 9b = 10$.

INDICE

Suppose qu'un tel couple existe. D'après 1., 10 s'écrit alors $3q$ avec q entier : encadre q.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers a et b tels que $6a + 9b = 10$.

Conséquence. D'après 1., 10 est alors un multiple de 3 : il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $10 = 3q$.

Encadrement de q. Or $9 < 10 < 12$, donc $9 < 3q < 12$. En divisant par $3 > 0$, on obtient $3 < q < 4$.

Contradiction. Aucun entier n'est strictement compris entre 3 et 4. D'après le principe du raisonnement par l'absurde (F11), l'hypothèse de départ est fausse.

Conclusion. Il n'existe aucun couple d'entiers (a, b) tel que $6a + 9b = 10$.

3.

Soit x un réel strictement positif. Montrer par l'absurde que $\sqrt{x+1} \neq \sqrt{x} + 1$.

INDICE

Suppose l'égalité, puis élève au carré deux nombres positifs. Le terme $2\sqrt{x}$ apparaît.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde que $\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + 1$.

Les deux membres sont positifs. En élevant au carré :

$$\begin{aligned} x + 1 &= (\sqrt{x} + 1)^2 \\ &= x + 2\sqrt{x} + 1. \end{aligned}$$

Donc $2\sqrt{x} = 0$, puis $\sqrt{x} = 0$, et enfin $x = 0$. Cela contredit l'hypothèse $x > 0$.

Conclusion. D'après le principe du raisonnement par l'absurde (F11), $\sqrt{x+1} \neq \sqrt{x} + 1$ pour tout réel $x > 0$.

4.

L'hypothèse $x > 0$ de la question 3. est-elle utile ?

INDICE

Regarde ce qui se passe pour $x = 0$.

CORRIGÉ

Oui. Pour $x = 0$: $\sqrt{0+1} = 1$ et $\sqrt{0} + 1 = 1$. L'égalité est vraie.

Conclusion. Sans l'hypothèse $x > 0$, la conclusion de la question 3. serait fausse pour $x = 0$: cette hypothèse est utile.

Exercice 5

Parité par disjonction des cas

1.

Soit n un entier. Montrer, en distinguant le cas n pair et le cas n impair, que $n^2 + 3n$ est pair.

INDICE

Dans chaque cas, écris n avec un entier k, développe, puis factorise par 2.

CORRIGÉ

Soit n un entier. Il est pair ou impair : ces deux cas couvrent toutes les possibilités.

Premier cas : n pair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors :

$$\begin{aligned} n^2 + 3n &= 4k^2 + 6k \\ &= 2(2k^2 + 3k). \end{aligned}$$

Comme $2k^2 + 3k \in \mathbb{Z}$, l'entier $n^2 + 3n$ est pair.

Second cas : n impair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors :

$$\begin{aligned} n^2 + 3n &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &\quad + 6k + 3 \\ &= 2(2k^2 + 5k + 2). \end{aligned}$$

Comme $2k^2 + 5k + 2 \in \mathbb{Z}$, l'entier $n^2 + 3n$ est pair.

Conclusion. D'après le principe de disjonction des cas (F10), pour tout entier n, $n^2 + 3n$ est pair.

2.

En déduire que, pour tout entier n, $n^2 + 3n + 7$ est impair.

INDICE

Écris $n^2 + 3n = 2p$ d'après 1., puis fais apparaître la forme $2(\dots) + 1$.

CORRIGÉ

Soit n un entier. D'après 1., il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 + 3n = 2p$. Alors :

$$\begin{aligned} n^2 + 3n + 7 &= 2p + 7 \\ &= 2(p + 3) + 1, \end{aligned}$$

avec $p + 3 \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Pour tout entier n, $n^2 + 3n + 7$ est impair.

3.

Montrer par l'absurde qu'aucun entier n ne vérifie $n^2 + 3n = 2025$.

INDICE

Suppose qu'un tel entier existe et utilise 1.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde qu'il existe un entier n tel que $n^2 + 3n = 2025$.

D'après 1., 2025 serait pair. Or $2025 = 2 \times 1012 + 1$ est impair. Un entier ne peut pas être à la fois pair et impair : c'est une contradiction.

Conclusion. D'après le principe du raisonnement par l'absurde (F11), aucun entier n ne vérifie $n^2 + 3n = 2025$.

Exercice 6

Valeur absolue : distinguer les cas

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-2| = 2x - 7$, en distinguant le cas $x \geq 2$ et le cas $x < 2$.

INDICE

Dans chaque cas, remplace $|x-2|$ par $x-2$ ou par $2-x$. Vérifie ensuite que la solution trouvée respecte la condition du cas.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Les cas $x \geq 2$ et $x < 2$ couvrent toutes les possibilités.

Premier cas : $x \geq 2$. Alors $|x-2| = x-2$. L'équation équivaut à $x - 2 = 2x - 7$, c'est-à-dire $x = 5$. Comme $5 \geq 2$, le réel 5 est solution.

Second cas : $x < 2$. Alors $|x-2| = 2-x$. L'équation équivaut à $2 - x = 2x - 7$, c'est-à-dire $3x = 9$, soit $x = 3$. Or $3 < 2$ est faux : ce cas ne donne aucune solution.

Vérification. $|5-2| = 3$ et $2 \times 5 - 7 = 3$.

Conclusion. L'équation $|x-2| = 2x - 7$ a une seule solution réelle : $x = 5$.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $|x| + |x-4| \geq 4$.

INDICE

Les expressions x et $x-4$ changent de signe en 0 et en 4 : distingue $x < 0$, $0 \leq x \leq 4$ et $x > 4$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Les trois cas suivants couvrent toutes les possibilités.

Cas $x < 0$. Alors $|x| = -x$ et $|x-4| = 4-x$. La somme vaut $4 - 2x$. Comme $-2x > 0$, elle est strictement supérieure à 4.

Cas $0 \leq x \leq 4$. Alors $|x| = x$ et $|x-4| = 4-x$. La somme vaut exactement 4.

Cas $x > 4$. Alors $|x| = x$ et $|x-4| = x-4$. La somme vaut $2x - 4$. Comme $2x > 8$, on a $2x - 4 > 8 - 4 = 4$.

Conclusion. D'après le principe de disjonction des cas (F10), pour tout réel x :

$$|x| + |x-4| \geq 4.$$

3.

Pour quels réels x a-t-on $|x| + |x - 4| = 4$?

INDICE

Reprends les trois cas de la question 2. et regarde dans lesquels l'inégalité est stricte.

CORRIGÉ

D'après la question 2., la somme $|x| + |x - 4|$ est strictement supérieure à 4 si $x < 0$ et si $x > 4$. Dans le cas $0 \leq x \leq 4$, elle vaut exactement 4.

Conclusion. On a $|x| + |x - 4| = 4$ si et seulement si $0 \leq x \leq 4$.

Exercice 7

Une somme de produits par récurrence

On veut montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

On note $P(n)$ cette égalité.

1.

Vérifier $P(1)$ et $P(2)$.

INDICE

Pour $n = 1$, la somme n'a qu'un terme : 1×2.

CORRIGÉ

Pour $n = 1$ (initialisation). La somme n'a qu'un terme : $1 \times 2 = 2$. Et $\frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$. Donc $P(1)$ est vraie.

Pour $n = 2$. La somme vaut $1 \times 2 + 2 \times 3 = 2 + 6 = 8$. Et $\frac{2 \times 3 \times 4}{3} = 8$. Donc $P(2)$ est vraie.

2.

Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. Montrer que $P(n+1)$ est vraie.

INDICE

Écris la somme jusqu'au rang $n+1$ comme la somme jusqu'au rang n, plus le terme $(n+1)(n+2)$. Factorise ensuite par $(n+1)(n+2)$.

CORRIGÉ

Hérédité. La somme jusqu'au rang $n+1$ est la somme jusqu'au rang n, augmentée du terme $(n+1)(n+2)$. On utilise l'hypothèse de récurrence, puis on factorise par $(n+1)(n+2)$:

$$\begin{aligned} &\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\ &\quad + (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. La somme jusqu'au rang $n+1$ vaut $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$: c'est l'égalité $P(n+1)$, qui est donc vraie.

3.

Conclure, puis calculer $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 20 \times 21$.

INDICE

Cite le principe de récurrence (F12), puis applique la formule avec $n = 20$.

CORRIGÉ

Conclusion de la récurrence. $P(1)$ est vraie et, pour tout entier $n \geq 1$, $P(n)$ entraîne $P(n+1)$. D'après le principe de récurrence (F12), $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Calcul. On applique la formule avec $n = 20$:

$$\begin{aligned} &1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 20 \times 21 \\ &= \frac{20 \times 21 \times 22}{3} = 3080. \end{aligned}$$

Exercice 8

Divisibilité par récurrence

On veut montrer que, pour tout entier naturel n, $7^n - 2^n$ est un multiple de 5.

1.

Vérifier la propriété pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

INDICE

Calcule $7^n - 2^n$ dans chaque cas.

CORRIGÉ

- Pour $n = 0$: $7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = 5 \times 0$.
- Pour $n = 1$: $7^1 - 2^1 = 5 = 5 \times 1$.
- Pour $n = 2$: $7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45 = 5 \times 9$.

Conclusion. Pour $n = 0, 1$ et 2, l'entier $7^n - 2^n$ est un multiple de 5.

2.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $7^{n+1} - 2^{n+1} = 7(7^n - 2^n) + 5 \times 2^n$.

INDICE

Développe le membre de droite et regroupe les termes en 2^n.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On développe le membre de droite, puis on regroupe les termes en 2^n :

$$\begin{aligned} &7(7^n - 2^n) + 5 \times 2^n \\ &= 7^{n+1} - 7 \times 2^n + 5 \times 2^n \\ &= 7^{n+1} - 2 \times 2^n \\ &= 7^{n+1} - 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'égalité demandée est vraie pour tout entier naturel n.

3.

Démontrer la propriété par récurrence.

INDICE

Dans l'hérédité, écris $7^n - 2^n = 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, puis utilise 2.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la proposition « $7^n - 2^n$ est un multiple de 5 ».

Initialisation. D'après 1., $7^0 - 2^0 = 5 \times 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $7^n - 2^n = 5k$. D'après 2. :

$$\begin{aligned} 7^{n+1} - 2^{n+1} &= 7 \times 5k + 5 \times 2^n \\ &= 5(7k + 2^n), \end{aligned}$$

avec $7k + 2^n \in \mathbb{Z}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence (F12), $7^n - 2^n$ est un multiple de 5 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $7^n + 4 \times 2^n$ est un multiple de 5.

INDICE

Fais apparaître $7^n - 2^n$ dans l'expression.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 3., il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $7^n - 2^n = 5k$. On fait apparaître cette différence :

$$\begin{aligned} &7^n + 4 \times 2^n \\ &= (7^n - 2^n) + 5 \times 2^n \\ &= 5k + 5 \times 2^n \\ &= 5(k + 2^n), \end{aligned}$$

avec $k + 2^n \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $7^n + 4 \times 2^n$ est un multiple de 5.