BURHAN

Notions de logique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/notions-de-logique/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Application	10

Exercice 1

Valeurs de vérité de propositions composées

On considère les trois propositions suivantes.

- P : « $2^5 = 32$ ».
- Q : « 91 est un multiple de 7 ».
- R : « $\dfrac{7}{4} \in \mathbb{Z}$ ».

1.

Déterminer la valeur de vérité de P, de Q et de R.

INDICE

Calcule 2^5. Effectue la division de 91 par 7. Place $\dfrac{7}{4}$ entre deux entiers consécutifs.

2.

Déterminer la valeur de vérité de $(P \text{ et } R)$, de $(Q \text{ ou } R)$ et de $(\overline{Q} \text{ ou } R)$.

INDICE

Une conjonction exige deux propositions vraies ; une disjonction en exige une seule (définition de la conjonction et de la disjonction, F02).

3.

Déterminer la valeur de vérité de $(P \Rightarrow R)$, de $(R \Rightarrow P)$ et de $(\overline{R} \Leftrightarrow Q)$.

INDICE

Une implication n'est fausse que dans un seul cas (définition de l'implication, F03). Une équivalence est vraie quand ses deux membres ont la même valeur.

Exercice 2

Une table de vérité pour simplifier

Soit P et Q deux propositions. On considère la proposition :

$$S : \big((P \text{ et } \overline{Q}) \text{ ou } Q\big).$$

1.

Dresser la table de vérité de S, avec une colonne pour $\overline{Q}$ et une colonne pour $(P \text{ et } \overline{Q})$.

INDICE

Quatre lignes, dans l'ordre VV, VF, FV, FF. Remplis les colonnes de gauche à droite.

2.

La proposition $\big(S \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q)\big)$ est-elle une loi logique ? Justifier à l'aide de la colonne de S et de celle de $(P \text{ ou } Q)$.

INDICE

Écris la colonne de $(P \text{ ou } Q)$ avec la définition de la disjonction (F02), puis compare ligne par ligne.

3.

La proposition $(S \Leftrightarrow P)$ est-elle une loi logique ?

INDICE

Cherche une ligne où S et P n'ont pas la même valeur.

Exercice 3

Nier une proposition sans quantificateur

Dans cet exercice, x et y sont deux réels fixés, et n est un entier fixé. Écrire la négation de chaque proposition, sans employer de barre.

1.

« $x \geq 2$ et $y < 5$ ».

INDICE

D'après les lois de Morgan (F04), la négation de « et » est « ou ». Nie ensuite chaque inégalité.

2.

« n est pair ou n est un multiple de 3 ».

INDICE

D'après les lois de Morgan (F04), la négation de « ou » est « et ». Un entier qui n'est pas pair est impair.

3.

« si $xy = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$ ».

INDICE

D'après la négation d'une implication (F05), la négation de $(A \Rightarrow B)$ est $(A \text{ et } \overline{B})$. Ici, B est elle-même une disjonction.

Exercice 4

Réciproque et contraposée d'une implication

Soit n un entier relatif. On considère l'implication (I) : « si n est un multiple de 6, alors n est pair ».

1.

Écrire la réciproque et la contraposée de (I).

INDICE

La réciproque échange les deux propositions. La contraposée les échange et les nie (contraposée, F05).

2.

Démontrer (I) directement.

INDICE

Écris $n = 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, puis fais apparaître un facteur 2.

3.

Que peut-on dire de la contraposée de (I) ? La réciproque de (I) est-elle vraie pour tout entier n ?

INDICE

Une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité (contraposée, F05). Pour la réciproque, essaie de petits entiers pairs.

Exercice 5

Traduire avec des quantificateurs

Traduire chaque phrase par une proposition quantifiée, puis dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1.

« Tout entier naturel est inférieur ou égal à son carré. »

INDICE

Commence par $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour justifier, sépare le cas $n = 0$ du cas $n \geq 1$.

2.

« Il existe un réel dont le carré est égal à 5. »

INDICE

Pour une proposition « il existe », il suffit d'exhiber un réel qui convient.

3.

« L'équation $3x + 2 = 11$ admet une seule solution réelle. »

INDICE

Le symbole $\exists !$ affirme l'existence et l'unicité. Résous l'équation par équivalences.

4.

« Tout réel est strictement inférieur à son double. »

INDICE

Compare x et $2x$ pour des réels de signes différents.

Exercice 6

Vrai ou faux avec des quantificateurs

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1.

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 4 > 4x.$

INDICE

Rassemble tous les termes dans un membre et reconnais une identité remarquable.

2.

$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = 2n + 15.$

INDICE

Essaie les entiers $0, 1, 2, \ldots$ jusqu'à obtenir une égalité.

3.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 = 9 \Rightarrow x = 3).$

INDICE

Une implication est fausse quand sa prémisse est vraie et sa conclusion fausse.

4.

$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \leq y^2.$

INDICE

Quel est le plus petit carré d'un réel ?

Exercice 7

Nier une proposition quantifiée

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes.

1.

$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 > 50n.$

INDICE

D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), « il existe » devient « pour tout ». Nie ensuite l'inégalité stricte.

2.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 = x + 1.$

INDICE

Échange les deux quantificateurs un à un, sans changer leur ordre.

3.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9).$

INDICE

D'après la négation d'une implication (F05), la négation de $(A \Rightarrow B)$ est $(A \text{ et } \overline{B})$.

4.

Laquelle est vraie : la proposition de la question 2., ou sa négation ?

INDICE

Cherche un réel x pour lequel $x + 1$ est strictement négatif, puis compare y^2 et $x + 1$.

Exercice 8

Trouver un contre-exemple

Chacune des propositions suivantes est fausse. Le montrer par un contre-exemple vérifié par le calcul.

1.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = x$.

INDICE

Un réel négatif fait l'affaire : compare le signe des deux membres.

2.

« Pour tout entier $n \geq 1$, $3^n > n^3$. »

INDICE

Calcule les deux membres pour $n = 1$, puis 2, puis 3.

3.

$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

INDICE

Il faut un couple (a, b). Pense à un couple d'entiers dont la somme des carrés est un carré.

Exercice 9

Implication directe et disjonction des cas

Soit a et b deux entiers relatifs.

1.

Montrer que si a est un multiple de 3 et b un multiple de 5, alors ab est un multiple de 15.

INDICE

Écris $a = 3k$ et $b = 5m$, avec deux lettres différentes, puis calcule ab.

2.

Montrer que si a et b sont pairs, alors $a^2 + b^2$ est un multiple de 4.

INDICE

Écris $a = 2k$ et $b = 2m$, puis développe les carrés.

3.

Pour la question 2., un élève écrit : « $a = 2k$ et $b = 2k$ ». Quelle erreur commet-il ?

INDICE

Avec cette écriture, que vaut $a - b$?

4.

Montrer par disjonction des cas que, pour tout réel x, $|x - 3| + x \geq 3$. Commencer par la phrase qui annonce les cas.

INDICE

Le signe de $x - 3$ décide de la valeur de $|x - 3|$: deux cas.

Exercice 10

Une récurrence courte

On veut montrer que, pour tout entier naturel n, $3^n \geq 2n+1$. On note $P(n)$ cette inégalité.

1.

Initialisation. Vérifier que $P(0)$ est vraie.

INDICE

Calcule séparément 3^0 et $2 \times 0 + 1$.

2.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Montrer que $3^{n+1} \geq 6n+3$, puis que $6n+3 \geq 2(n+1)+1$.

INDICE

Multiplie l'inégalité $P(n)$ par 3, qui est strictement positif. Pour la seconde inégalité, calcule une différence.

3.

Conclusion. Conclure.

INDICE

Cite le principe de récurrence (F12) et vérifie ses deux hypothèses.