BURHAN

Notions de logique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/notions-de-logique/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Application	10

Exercice 1

Valeurs de vérité de propositions composées

On considère les trois propositions suivantes.

- P : « $2^5 = 32$ ».
- Q : « 91 est un multiple de 7 ».
- R : « $\dfrac{7}{4} \in \mathbb{Z}$ ».

1.

Déterminer la valeur de vérité de P, de Q et de R.

INDICE

Calcule 2^5. Effectue la division de 91 par 7. Place $\dfrac{7}{4}$ entre deux entiers consécutifs.

CORRIGÉ

Valeur de P. On calcule :

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$$

Donc P est vraie.

Valeur de Q. On a $91 = 7 \times 13$: 91 est un multiple de 7, donc Q est vraie.

Valeur de R. Comme $4 < 7 < 8$, on a $1 < \dfrac{7}{4} < 2$. Aucun entier n'est strictement compris entre 1 et 2, donc $\dfrac{7}{4}$ n'est pas un entier : R est fausse.

Conclusion. P et Q sont vraies, R est fausse.

2.

Déterminer la valeur de vérité de $(P \text{ et } R)$, de $(Q \text{ ou } R)$ et de $(\overline{Q} \text{ ou } R)$.

INDICE

Une conjonction exige deux propositions vraies ; une disjonction en exige une seule (définition de la conjonction et de la disjonction, F02).

CORRIGÉ

On utilise la définition de la conjonction et de la disjonction (F02), avec les valeurs trouvées en 1.

- R est fausse, donc $(P \text{ et } R)$ est fausse.
- Q est vraie, donc $(Q \text{ ou } R)$ est vraie.
- $\overline{Q}$ est fausse et R est fausse, donc $(\overline{Q} \text{ ou } R)$ est fausse.

Conclusion. Des trois propositions, seule $(Q \text{ ou } R)$ est vraie.

3.

Déterminer la valeur de vérité de $(P \Rightarrow R)$, de $(R \Rightarrow P)$ et de $(\overline{R} \Leftrightarrow Q)$.

INDICE

Une implication n'est fausse que dans un seul cas (définition de l'implication, F03). Une équivalence est vraie quand ses deux membres ont la même valeur.

CORRIGÉ

On utilise la définition de l'implication et de l'équivalence (F03).

- P est vraie et R est fausse : c'est le seul cas où une implication est fausse. Donc $(P \Rightarrow R)$ est fausse.
- R est fausse, donc $(R \Rightarrow P)$ est vraie, quelle que soit la valeur de P.
- $\overline{R}$ est vraie et Q est vraie : elles ont la même valeur, donc $(\overline{R} \Leftrightarrow Q)$ est vraie.

Conclusion. $(P \Rightarrow R)$ est fausse ; $(R \Rightarrow P)$ et $(\overline{R} \Leftrightarrow Q)$ sont vraies.

Exercice 2

Une table de vérité pour simplifier

Soit P et Q deux propositions. On considère la proposition :

$$S : \big((P \text{ et } \overline{Q}) \text{ ou } Q\big).$$

1.

Dresser la table de vérité de S, avec une colonne pour $\overline{Q}$ et une colonne pour $(P \text{ et } \overline{Q})$.

INDICE

Quatre lignes, dans l'ordre VV, VF, FV, FF. Remplis les colonnes de gauche à droite.

CORRIGÉ

On remplit les colonnes de gauche à droite, avec la définition de la négation (F01), puis celle de la conjonction et de la disjonction (F02).

P	Q	$\overline{Q}$	$(P \text{ et } \overline{Q})$	S
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	F

Lecture. Sur chaque ligne, S est vraie dès que Q est vraie, ou dès que $(P \text{ et } \overline{Q})$ est vraie. Elle n'est fausse que sur la dernière ligne, FF.

2.

La proposition $\big(S \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q)\big)$ est-elle une loi logique ? Justifier à l'aide de la colonne de S et de celle de $(P \text{ ou } Q)$.

INDICE

Écris la colonne de $(P \text{ ou } Q)$ avec la définition de la disjonction (F02), puis compare ligne par ligne.

CORRIGÉ

Colonne de $(P \text{ ou } Q)$. D'après la définition de la disjonction (F02), elle vaut V, V, V, F sur les lignes VV, VF, FV, FF. C'est exactement la colonne de S.

Comparaison. Sur chacune des quatre lignes, S et $(P \text{ ou } Q)$ ont la même valeur. D'après la définition de l'équivalence (F03), $\big(S \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q)\big)$ est vraie sur les quatre lignes.

Conclusion. Cette équivalence est vraie quelles que soient les valeurs de P et de Q : c'est une loi logique, au sens de la définition F03.

3.

La proposition $(S \Leftrightarrow P)$ est-elle une loi logique ?

INDICE

Cherche une ligne où S et P n'ont pas la même valeur.

CORRIGÉ

Sur la ligne FV, S est vraie et P est fausse. Elles n'ont pas la même valeur, donc l'équivalence $(S \Leftrightarrow P)$ est fausse sur cette ligne.

Conclusion. Une loi logique est vraie sur toutes les lignes de sa table. Donc $(S \Leftrightarrow P)$ n'est pas une loi logique.

Exercice 3

Nier une proposition sans quantificateur

Dans cet exercice, x et y sont deux réels fixés, et n est un entier fixé. Écrire la négation de chaque proposition, sans employer de barre.

1.

« $x \geq 2$ et $y < 5$ ».

INDICE

D'après les lois de Morgan (F04), la négation de « et » est « ou ». Nie ensuite chaque inégalité.

CORRIGÉ

D'après les lois de Morgan (F04), la négation de $(A \text{ et } B)$ est $(\overline{A} \text{ ou } \overline{B})$.

La négation de $x \geq 2$ est $x < 2$; celle de $y < 5$ est $y \geq 5$.

Conclusion. La négation cherchée est « $x < 2$ ou $y \geq 5$ ».

2.

« n est pair ou n est un multiple de 3 ».

INDICE

D'après les lois de Morgan (F04), la négation de « ou » est « et ». Un entier qui n'est pas pair est impair.

CORRIGÉ

D'après les lois de Morgan (F04), la négation de $(A \text{ ou } B)$ est $(\overline{A} \text{ et } \overline{B})$. La négation de « n est pair » est « n est impair ».

Conclusion. La négation cherchée est « n est impair et n n'est pas un multiple de 3 ».

3.

« si $xy = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$ ».

INDICE

D'après la négation d'une implication (F05), la négation de $(A \Rightarrow B)$ est $(A \text{ et } \overline{B})$. Ici, B est elle-même une disjonction.

CORRIGÉ

Posons A : « $xy = 0$ » et B : « $x = 0$ ou $y = 0$ ».

Négation de l'implication. D'après la négation d'une implication (F05), la négation de $(A \Rightarrow B)$ est $(A \text{ et } \overline{B})$.

Négation de B. D'après les lois de Morgan (F04), $\overline{B}$ s'écrit « $x \neq 0$ et $y \neq 0$ ».

Conclusion. La négation cherchée est « $xy = 0$ et $x \neq 0$ et $y \neq 0$ ». Elle est fausse quels que soient les réels x et y : un produit de deux réels non nuls n'est pas nul.

Exercice 4

Réciproque et contraposée d'une implication

Soit n un entier relatif. On considère l'implication (I) : « si n est un multiple de 6, alors n est pair ».

1.

Écrire la réciproque et la contraposée de (I).

INDICE

La réciproque échange les deux propositions. La contraposée les échange et les nie (contraposée, F05).

CORRIGÉ

Réciproque. « Si n est pair, alors n est un multiple de 6 ».

Contraposée. On échange les deux propositions et on les nie (contraposée, F05). La négation de « n est pair » est « n est impair ». La contraposée est donc : « si n est impair, alors n n'est pas un multiple de 6 ».

2.

Démontrer (I) directement.

INDICE

Écris $n = 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, puis fais apparaître un facteur 2.

CORRIGÉ

Supposons que n est un multiple de 6 : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 6k$.

Alors $n = 2 \times (3k)$, avec $3k \in \mathbb{Z}$. Donc n est pair.

Conclusion. Si n est un multiple de 6, alors n est pair : (I) est démontrée.

3.

Que peut-on dire de la contraposée de (I) ? La réciproque de (I) est-elle vraie pour tout entier n ?

INDICE

Une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité (contraposée, F05). Pour la réciproque, essaie de petits entiers pairs.

CORRIGÉ

Contraposée. Une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité (contraposée, F05). Comme (I) est vraie pour tout entier n, sa contraposée l'est aussi.

Réciproque. Prenons $n = 4$. On a $4 = 2 \times 2$, donc 4 est pair. Mais $6 \times 0 < 4 < 6 \times 1$, donc 4 n'est pas un multiple de 6.

Conclusion. La contraposée de (I) est vraie pour tout entier n. La réciproque ne l'est pas : $n = 4$ en est un contre-exemple. Démontrer (I) ne démontre pas sa réciproque.

Exercice 5

Traduire avec des quantificateurs

Traduire chaque phrase par une proposition quantifiée, puis dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1.

« Tout entier naturel est inférieur ou égal à son carré. »

INDICE

Commence par $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour justifier, sépare le cas $n = 0$ du cas $n \geq 1$.

CORRIGÉ

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq n^2.$$

Cette proposition est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$; les deux cas suivants couvrent tous les entiers naturels.

- Si $n = 0$, alors $n^2 = 0 = n$.
- Si $n \geq 1$, on multiplie les deux membres de $1 \leq n$ par $n > 0$: on obtient $n \leq n^2$.

Conclusion. Tout entier naturel est inférieur ou égal à son carré : la proposition est vraie.

2.

« Il existe un réel dont le carré est égal à 5. »

INDICE

Pour une proposition « il existe », il suffit d'exhiber un réel qui convient.

CORRIGÉ

$$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 5.$$

Cette proposition est vraie : le réel $x = \sqrt{5}$ convient, car $(\sqrt{5})^2 = 5$.

3.

« L'équation $3x + 2 = 11$ admet une seule solution réelle. »

INDICE

Le symbole $\exists !$ affirme l'existence et l'unicité. Résous l'équation par équivalences.

CORRIGÉ

$$\exists ! x \in \mathbb{R},\ 3x + 2 = 11.$$

Cette proposition est vraie. Soit x un réel. Soustraire 2, puis diviser par 3, sont des opérations réversibles, donc :

$$\begin{aligned} 3x + 2 = 11 &\Leftrightarrow 3x = 9 \\ &\Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. Le réel 3 est solution, et c'est le seul : l'équation admet une unique solution réelle.

4.

« Tout réel est strictement inférieur à son double. »

INDICE

Compare x et $2x$ pour des réels de signes différents.

CORRIGÉ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x < 2x.$$

Cette proposition est fausse. Prenons $x_0 = -1$: alors $2x_0 = -2$, et $-1 < -2$ est faux.

Conclusion. Le réel -1 est un contre-exemple. D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), la proposition est fausse.

Exercice 6

Vrai ou faux avec des quantificateurs

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1.

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 4 > 4x.$

INDICE

Rassemble tous les termes dans un membre et reconnais une identité remarquable.

CORRIGÉ

Cette proposition est fausse. Pour tout réel x :

$$x^2 + 4 - 4x = (x-2)^2.$$

Ce carré est nul pour $x = 2$. Prenons donc $x_0 = 2$: $x_0^2 + 4 = 8$ et $4x_0 = 8$. Or $8 > 8$ est faux.

Conclusion. Le réel 2 est un contre-exemple. D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), la proposition est fausse.

2.

$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = 2n + 15.$

INDICE

Essaie les entiers $0, 1, 2, \ldots$ jusqu'à obtenir une égalité.

CORRIGÉ

Cette proposition est vraie. Pour $n = 5$:

$$n^2 = 25,$$
$$2n + 15 = 10 + 15 = 25.$$

Conclusion. L'entier naturel 5 vérifie $n^2 = 2n + 15$: la proposition est vraie.

3.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 = 9 \Rightarrow x = 3).$

INDICE

Une implication est fausse quand sa prémisse est vraie et sa conclusion fausse.

CORRIGÉ

Cette proposition est fausse. Prenons $x_0 = -3$: la prémisse $x_0^2 = 9$ est vraie, et la conclusion $x_0 = 3$ est fausse. D'après la définition de l'implication (F03), l'implication est fausse pour x_0.

Conclusion. Le réel -3 est un contre-exemple. D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), la proposition est fausse.

4.

$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \leq y^2$.

INDICE

Quel est le plus petit carré d'un réel ?

CORRIGÉ

Cette proposition est vraie. Prenons $x = 0$, choisi avant y.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Un carré est positif ou nul, donc $y^2 \geq 0 = x$.

Conclusion. Le même réel $x = 0$ convient pour tous les réels y : la proposition est vraie.

Exercice 7

Nier une proposition quantifiée

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes.

1.

$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 > 50n.$

INDICE

D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), « il existe » devient « pour tout ». Nie ensuite l'inégalité stricte.

CORRIGÉ

D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), « il existe » devient « pour tout ». La négation de $n^2 > 50n$ est $n^2 \leq 50n$. La négation cherchée est :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \leq 50n.$$

2.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 = x + 1.$

INDICE

Échange les deux quantificateurs un à un, sans changer leur ordre.

CORRIGÉ

On applique la négation d'une proposition quantifiée (F08) à chacun des deux quantificateurs, sans changer leur ordre. La négation de $y^2 = x + 1$ est $y^2 \neq x + 1$. La négation cherchée est :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 \neq x + 1.$$

3.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9).$

INDICE

D'après la négation d'une implication (F05), la négation de $(A \Rightarrow B)$ est $(A \text{ et } \overline{B})$.

CORRIGÉ

D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), « pour tout » devient « il existe ». D'après la négation d'une implication (F05), la négation de $(x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9)$ est $(x \geq 3 \text{ et } x^2 < 9)$. La négation cherchée est :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ (x \geq 3 \text{ et } x^2 < 9).$$

4.

Laquelle est vraie : la proposition de la question 2., ou sa négation ?

INDICE

Cherche un réel x pour lequel $x+1$ est strictement négatif, puis compare y^2 et $x+1$.

CORRIGÉ

La négation est vraie. Prenons $x=-2$: alors $x+1=-1$.

Soit $y\in\mathbb{R}$. Un carré est positif ou nul, donc $y^2\geq 0>-1$, et $y^2\neq x+1$.

Conclusion. La négation de la proposition de la question 2. est vraie, donc cette proposition est fausse.

Exercice 8

Trouver un contre-exemple

Chacune des propositions suivantes est fausse. Le montrer par un contre-exemple vérifié par le calcul.

1.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = x$.

INDICE

Un réel négatif fait l'affaire : compare le signe des deux membres.

CORRIGÉ

Prenons $x_0 = -3$. Alors :

$$\sqrt{x_0^2} = \sqrt{9} = 3,$$

alors que $x_0 = -3$. Comme $3 \neq -3$, l'égalité est fausse pour x_0.

Conclusion. D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), la proposition est fausse.

2.

« Pour tout entier $n \geq 1$, $3^n > n^3$. »

INDICE

Calcule les deux membres pour $n = 1$, puis 2, puis 3.

CORRIGÉ

On calcule les deux membres pour les premiers entiers.

- Pour $n = 1$: $3^1 = 3$ et $1^3 = 1$, et $3 > 1$ est vrai.
- Pour $n = 2$: $3^2 = 9$ et $2^3 = 8$, et $9 > 8$ est vrai.
- Pour $n = 3$: $3^n = 27$ et $n^3 = 27$, et $27 > 27$ est faux.

Conclusion. L'entier $n = 3$ est un contre-exemple : la proposition est fausse. Les deux premiers essais, où l'inégalité est vraie, ne prouvaient rien.

3.

$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \sqrt{a^2+b^2} = a+b.$

INDICE

Il faut un couple (a, b). Pense à un couple d'entiers dont la somme des carrés est un carré.

CORRIGÉ

Prenons $a = 3$ et $b = 4$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2} &= \sqrt{9+16} \\ &= \sqrt{25} = 5,\end{aligned}$$

et $a + b = 7$. Comme $5 \neq 7$, l'égalité est fausse pour le couple $(3, 4)$.

Conclusion. D'après la négation d'une proposition quantifiée (F08), appliquée deux fois, la proposition est fausse.

Exercice 9

Implication directe et disjonction des cas

Soit a et b deux entiers relatifs.

1.

Montrer que si a est un multiple de 3 et b un multiple de 5, alors ab est un multiple de 15.

INDICE

Écris $a = 3k$ et $b = 5m$, avec deux lettres différentes, puis calcule ab.

CORRIGÉ

Supposons que a est un multiple de 3 et que b est un multiple de 5. Il existe deux entiers k et m tels que $a = 3k$ et $b = 5m$.

Alors $ab = 3k \times 5m = 15km$, avec $km \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Si a est un multiple de 3 et b un multiple de 5, alors ab est un multiple de 15.

2.

Montrer que si a et b sont pairs, alors $a^2 + b^2$ est un multiple de 4.

INDICE

Écris $a = 2k$ et $b = 2m$, puis développe les carrés.

CORRIGÉ

Supposons a et b pairs : il existe deux entiers k et m tels que $a = 2k$ et $b = 2m$. Alors :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 4k^2 + 4m^2 \\ &= 4(k^2 + m^2), \end{aligned}$$

avec $k^2 + m^2 \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Si a et b sont pairs, alors $a^2 + b^2$ est un multiple de 4.

3.

Pour la question 2., un élève écrit : « $a = 2k$ et $b = 2k$ ». Quelle erreur commet-il ?

INDICE

Avec cette écriture, que vaut $a - b$?

CORRIGÉ

Avec la même lettre k, l'élève impose $a - b = 2k - 2k = 0$, c'est-à-dire $a = b$. Sa rédaction ne traite que le cas où a et b sont égaux : elle oublie, par exemple, $a = 2$ et $b = 6$.

Conclusion. Une lettre désigne un seul objet : deux entiers pairs quelconques s'écrivent avec deux lettres différentes, $a = 2k$ et $b = 2m$.

4.

Montrer par disjonction des cas que, pour tout réel x, $|x-3|+x \geq 3$. Commencer par la phrase qui annonce les cas.

INDICE

Le signe de $x-3$ décide de la valeur de $|x-3|$: deux cas.

CORRIGÉ

Soit x un réel. On a $x \geq 3$ ou $x < 3$: ces deux cas couvrent tous les réels.

Cas $x \geq 3$. Alors $x-3 \geq 0$, donc $|x-3| = x-3$. Comme $2x \geq 6$:

$$\begin{aligned} |x-3|+x &= 2x-3 \\ &\geq 6-3 = 3. \end{aligned}$$

Cas $x < 3$. Alors $x-3 < 0$, donc $|x-3| = 3-x$, et $|x-3|+x = 3$.

Conclusion. D'après le principe de disjonction des cas (F10), pour tout réel x :

$$|x-3|+x \geq 3.$$

Exercice 10

Une récurrence courte

On veut montrer que, pour tout entier naturel n, $3^n \geq 2n+1$. On note $P(n)$ cette inégalité.

1.

Initialisation. Vérifier que $P(0)$ est vraie.

INDICE

Calcule séparément 3^0 et $2 \times 0 + 1$.

CORRIGÉ

On calcule séparément les deux membres : $3^0 = 1$ et $2 \times 0 + 1 = 1$.

Comme $1 \geq 1$, $P(0)$ est vraie.

2.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Montrer que $3^{n+1} \geq 6n+3$, puis que $6n+3 \geq 2(n+1)+1$.

INDICE

Multiplie l'inégalité $P(n)$ par 3, qui est strictement positif. Pour la seconde inégalité, calcule une différence.

CORRIGÉ

Première inégalité. Par hypothèse de récurrence, $3^n \geq 2n+1$. On multiplie les deux membres par 3, strictement positif, sans changer le sens :

$$3^{n+1} \geq 6n+3.$$

Seconde inégalité. On calcule la différence :

$$(6n+3) - (2n+3) = 4n \geq 0,$$

car $n \geq 0$. Donc $6n+3 \geq 2n+3 = 2(n+1)+1$.

Conclusion. En enchaînant les deux inégalités, $3^{n+1} \geq 2(n+1)+1$: $P(n+1)$ est vraie.

3.

Conclusion. Conclure.

INDICE

Cite le principe de récurrence (F12) et vérifie ses deux hypothèses.

CORRIGÉ

$P(0)$ est vraie (question 1.) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ entraîne $P(n+1)$ (question 2.).

Conclusion. D'après le principe de récurrence (F12), pour tout entier naturel n, $3^n \geq 2n+1$.