BURHAN

Notions de logique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/notions-de-logique/cours

Chapitre	Semestre
Notions de logique	Semestre 1

Pourquoi apprendre à raisonner

Calcule $n^2 + n + 41$ pour $n = 0$, puis $n = 1$, puis $n = 2$. Tu trouves 41, 43 et 47 : trois nombres premiers.

Continue jusqu'à $n = 10$: tu obtiens encore des nombres premiers, comme 151 pour $n = 10$.

Une question se pose alors : ce nombre est-il premier pour **tout** entier naturel n ?

Devine : Une prédiction

Le nombre $n^2 + n + 41$ est premier pour $n = 0, 1, \ldots, 10$. D'après toi, que peut-on conclure ?

A. Il est premier pour tout entier naturel n.

Faux.

Onze essais ne couvrent pas tous les entiers : il en reste une infinité à examiner.

B. Rien pour l'instant : il faut une preuve.

Juste.

Juste : des essais réussis ne prouvent pas une propriété de tous les entiers.

C. Il est premier pour tout entier n pair.

Faux.

Les essais portent sur des entiers pairs et impairs ; et aucun essai ne prouve un « pour tout ».

D. Il n'est plus premier au-delà de $n = 10$.

Faux.

Pour $n = 11$, on obtient 173, qui est premier.

Correction

Essayons $n = 40$:

$$\begin{aligned} 40^2 + 40 + 41 &= 1600 + 81 \\ &= 1681 \\ &= 41^2. \end{aligned}$$

Ce nombre n'est pas premier : il est divisible par 41.

Quarante essais réussis, puis un échec : des exemples ne prouvent pas une propriété de tous les entiers. Un seul contre-exemple suffit à la rendre fausse.

Dans ce chapitre, tu apprends à dire exactement ce qu'affirme un énoncé, puis à le démontrer. Tu sauras nier une phrase et lire les quantificateurs.

Tu sauras aussi choisir un raisonnement : direct, par contraposée, par l'absurde, par disjonction des cas, par récurrence.

Ces rédactions serviront dans **toutes** les preuves de l'année.

Propositions, négation, « et », « ou »

Vrai, faux, ou ni l'un ni l'autre

Devine : Trier des énoncés

En mathématiques, on raisonne sur des énoncés dont on peut dire s'ils sont vrais ou faux. Lequel de ces énoncés ne permet pas de le dire ?

A. 7 est un nombre premier.

Faux.

Cet énoncé est vrai : 7 n'a que deux diviseurs, 1 et 7.

B. $2 + 3 = 6$.

Faux.

Cet énoncé est faux, car $2 + 3 = 5$. Un énoncé faux a bien une valeur.

C. $x + 1 = 4$.

Juste.

Juste : sa vérité dépend de x. Il est vrai pour $x = 3$, faux pour $x = 0$.

D. Tout entier pair est divisible par 4.

Faux.

Cet énoncé est faux : 6 est pair, mais pas divisible par 4.

Correction

Les énoncés « 7 est un nombre premier », « $2 + 3 = 6$ » et « tout entier pair est divisible par 4 » ont chacun une valeur : vrai, faux, faux.

L'énoncé « $x + 1 = 4$ » n'en a pas tant que x n'est pas choisi. On le retrouvera avec les quantificateurs.

En clair. Un énoncé faux n'est pas un échec : « $2 + 3 = 6$ » est une proposition, de valeur F. Ce qui compte, c'est qu'on puisse trancher, sans ambiguïté.

À l'inverse, « $x + 1 = 4$ » attend une valeur de x pour devenir vrai ou faux.

Dire le contraire d'une proposition, c'est la **nier** : c'est le premier outil du chapitre.

Dire le contraire

Définition : Proposition ; négation

Une **proposition** est un énoncé mathématique qui est soit vrai, soit faux, jamais les deux à la fois. Sa **valeur de vérité** est V (vraie) ou F (fausse).

La **négation** d'une proposition P est la proposition notée $\overline{P}$, lue « non P ». Elle est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.

Exemple : nier une proposition

- La négation de « 7 est premier » est « 7 n'est pas premier ».
- La négation de « $2+3=6$ » est « $2+3\neq 6$ » : elle est vraie, car la proposition est fausse.
- La négation de « $5>3$ » est « $5\leq 3$ », et non « $5<3$ ». Le contraire de « strictement plus grand » est « plus petit **ou égal** ».

Vérifie : Le contraire d'une inégalité

Soit x un réel. Quelle est la négation de « $x\geq 3$ » ?

A. $x\leq 3$

Faux.
Pour $x=3$, « $x\geq 3$ » et « $x\leq 3$ » sont vraies toutes les deux : ce n'est pas le contraire.

B. $x<3$

Juste.
Juste : « $x\geq 3$ » est fausse exactement quand $x<3$.

C. $x\leq -3$

Faux.
Pour $x=0$, « $x\geq 3$ » est fausse et « $x\leq -3$ » aussi : ce n'est pas le contraire.

D. $x>3$

Faux.
Pour $x=4$, les deux propositions sont vraies : ce n'est pas le contraire.

Correction
« $x\geq 3$ » signifie « $x>3$ ou $x=3$ ». Son contraire exclut ces deux cas : c'est « $x<3$ ».

Pour chaque réel x, une et une seule des deux propositions est vraie.

« Et », « ou »

Petit rappel. Soit n un entier.

- n est **pair** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.
- Sinon, n est **impair**, et il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.
- De même, n est multiple de 5 s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 5k$.

Au restaurant, « fromage ou dessert » veut d'habitude dire : l'un ou l'autre, pas les deux.

En mathématiques, le « ou » est plus généreux. « n est pair ou n est multiple de 5 » est vrai pour $n = 10$, qui est les deux à la fois.

Le « et », lui, exige les deux.

Définition : Conjonction et disjonction

Soit P et Q deux propositions.

- La **conjonction** $(P \text{ et } Q)$ est vraie lorsque P et Q sont vraies toutes les deux ; elle est fausse dans les trois autres cas.
- La **disjonction** $(P \text{ ou } Q)$ est vraie lorsque l'une au moins des propositions P, Q est vraie ; elle est fausse seulement lorsque P et Q sont fausses toutes les deux. Le « ou » mathématique est **inclusif**.

Exemple : la table de vérité

Une **table de vérité** range les quatre cas possibles, dans l'ordre VV, VF, FV, FF :

P	Q	$\overline{P}$	$(P \text{ et } Q)$	$(P \text{ ou } Q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Elle sert d'outil de vérification : on y lit la valeur de chaque proposition dans chaque cas.

Vérifier

Vérifie : Une valeur de vérité

Quelle est la valeur de vérité de « 15 est impair ou 15 est multiple de 5 » ?

A. F : les deux sont vraies, et le « ou » exclut ce cas.
Faux.

C'est le « ou » du restaurant. En mathématiques, le « ou » est inclusif : il accepte que les deux soient vraies.

B. On ne peut pas trancher sans connaître n.

Faux.

Il n'y a aucune variable : 15 est un nombre précis, la phrase a une valeur.

C. V : l'une au moins des deux propositions est vraie.

Juste.

Juste : ici, les deux sont même vraies.

Correction

« 15 est impair » est vraie, et « 15 est multiple de 5 » est vraie, car $15 = 3 \times 5$.

Une disjonction est vraie dès que l'une au moins de ses deux propositions est vraie. Elle vaut donc V : le cas « les deux » est permis.

À toi : Trois valeurs de vérité

Donne la valeur de vérité de chaque proposition, en justifiant : (a) « 9 est premier et 9 est impair » ; (b) « 9 est premier ou 9 est impair » ; (c) la négation de la proposition (a). Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Commence par la valeur de « 9 est premier », puis par celle de « 9 est impair ».

Indice 2

« Et » exige les deux propositions ; « ou » se contente d'une seule.

Indice 3

Point délicat : la négation de (a) a la valeur contraire de celle de (a).

Réponse

« 9 est premier » est fausse, car $9 = 3 \times 3$. « 9 est impair » est vraie, car $9 = 2 \times 4 + 1$.

(a) Une conjonction qui contient une proposition fausse est fausse : (a) vaut F.

(b) L'une au moins des deux est vraie : (b) vaut V.

(c) La négation de (a) a la valeur contraire : elle vaut V.

Implication, réciproque, équivalence

Une promesse tenue ou rompue

Devine : Une promesse

Ton professeur annonce : « Si tu as 18 au devoir, je t'offre un livre. » Dans quel cas a-t-il manqué à sa parole ?

A. Tu as 18 et tu reçois un livre.

Faux.

Il a fait exactement ce qu'il avait promis.

B. Tu n'as pas 18 et tu reçois un livre.

Faux.

Il n'avait rien promis dans ce cas : offrir un livre ne le contredit pas.

C. Tu as 18 et tu ne reçois pas de livre.

Juste.

Juste : la condition est remplie, et la promesse n'est pas tenue.

D. Tu n'as pas 18 et tu ne reçois pas de livre.

Faux.

La condition n'est pas remplie : la promesse ne l'obligeait à rien.

Correction

La promesse n'est rompue que dans un cas : la condition est remplie, et la conséquence ne l'est pas. Dans les trois autres cas, elle est tenue.

Une implication fonctionne exactement ainsi.

Retiens l'image. Une implication « si P, alors Q » est une promesse. Elle n'est fausse que si P est vraie et Q fausse.

Quand P est fausse, elle ne promet rien : elle est vraie, quelle que soit la valeur de Q.

Implication et équivalence

Définition : Implication et équivalence

Soit P et Q deux propositions.

- L'**implication** $(P \Rightarrow Q)$, lue « P implique Q », est fausse seulement lorsque P est vraie et Q est fausse ; elle est vraie dans les trois autres cas. L'implication $(Q \Rightarrow P)$ est sa **réciproque**.
- L'**équivalence** $(P \Leftrightarrow Q)$, lue « P si et seulement si Q », est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

En particulier, si P est vraie et si $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, alors Q est vraie.

Une **loi logique** est une proposition composée qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent.

Exemple : des valeurs de vérité

- Avec P : « $2 > 3$ » et Q : « 5 est pair », P est fausse : $(P \Rightarrow Q)$ est vraie.

- Avec R : « 4 est pair » et S : « $4 > 7$ », R est vraie et S fausse : $(R \Rightarrow S)$ est fausse.
- $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie : P et Q ont la même valeur, F.

Vérifie : Une équivalence

Quelle est la valeur de vérité de l'équivalence entre « $2^3 = 8$ » et « 8 est impair » ?

A. V, car $2^3 = 8$ est vraie.
Faux.
Une équivalence compare deux valeurs : regarde aussi « 8 est impair ».

B. F, car les deux propositions n'ont pas la même valeur.
Juste.
Juste : la première est vraie, la seconde est fausse.

C. V, car l'une au moins des deux est vraie.
Faux.
C'est la règle du « ou », pas celle de l'équivalence.

D. On ne peut pas savoir sans autre information.
Faux.
Les deux propositions ont une valeur connue : on peut trancher.

Correction
« $2^3 = 8$ » est vraie, et « 8 est impair » est fausse, car $8 = 2 \times 4$.

Les deux propositions n'ont pas la même valeur de vérité : leur équivalence est fausse.

Réciproque, conditions nécessaire et suffisante

Pour tout réel x, l'implication « si $x = 2$, alors $x^2 = 4$ » est vraie. Sa **réciproque** « si $x^2 = 4$, alors $x = 2$ » est fausse pour $x = -2$: $(-2)^2 = 4$ et $-2 \neq 2$.

On dit que « $x = 2$ » est une **condition suffisante** pour « $x^2 = 4$ » : elle suffit à l'assurer. Et « $x^2 = 4$ » est une **condition nécessaire** pour « $x = 2$ » : sans elle, $x = 2$ est impossible.

Attention : une implication n'est pas sa réciproque

✗ « Pour montrer que si n est multiple de 10, alors n est multiple de 5, je montre que si n est multiple de 5, alors n est multiple de 10. »

✓ Ces deux implications sont différentes. La première est vraie ; la seconde est fausse pour $n = 5$. Démontrer la réciproque ne démontre pas l'implication de départ.

Vérifie : Nécessaire ou suffisante ?

Soit x un réel. Pour avoir « $x > 1$ », la condition « $x > 3$ » est :

A. nécessaire et suffisante.

Faux.

Elle n'est pas nécessaire : $x = 2$ vérifie $x > 1$ sans vérifier $x > 3$.

B. nécessaire, mais pas suffisante.

Faux.

C'est l'inverse : $x > 3$ entraîne $x > 1$, donc elle suffit.

C. ni nécessaire, ni suffisante.

Faux.

Elle suffit : si $x > 3$, alors $x > 1$.

D. suffisante, mais pas nécessaire.

Juste.

Juste : $x > 3$ entraîne $x > 1$, et $x = 2$ montre qu'elle n'est pas obligatoire.

Correction

Suffisante. Si $x > 3$, alors $x > 1$, car $3 > 1$.

Pas nécessaire. Le réel $x = 2$ vérifie $x > 1$ et ne vérifie pas $x > 3$.

Conclusion. Pour avoir « $x > 1$ », la condition « $x > 3$ » est suffisante, mais pas nécessaire.

À toi : Réciproque et conditions

Soit n un entier. Écris l'implication « si n est multiple de 6, alors n est pair » et sa réciproque. Dis si chacune est vraie pour tout entier n, en justifiant. Quelle condition est nécessaire, laquelle est suffisante ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris la réciproque en échangeant l'hypothèse et la conclusion.

Indice 2

Si n est multiple de 6, écris $n = 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, puis fais apparaître un facteur 2.

Indice 3

Point délicat : pour la réciproque, cherche un entier pair qui n'est pas multiple de 6.

Réponse

L'implication est vraie. Soit n un multiple de 6 : $n = 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc $n = 2 \times (3k)$, avec $3k \in \mathbb{Z}$: n est pair.

La réciproque est fausse. La réciproque est « si n est pair, alors n est multiple de 6 ». Or $n = 2$ est pair, mais pas multiple de 6.

Conditions. Être multiple de 6 est une condition suffisante pour être pair. Être pair est une condition nécessaire pour être multiple de 6.

Lois de Morgan, contraposée

Le contraire d'un « et »

Devine : Dire le contraire

Quel est le contraire de « Sara a la moyenne en maths et en physique » ?

A. Sara n'a la moyenne ni en maths, ni en physique.
Faux.
Trop fort : si Sara a la moyenne en maths seulement, la phrase de départ est déjà fausse.

B. Sara n'a pas la moyenne en maths, ou pas en physique.
Juste.
Juste : il suffit d'un échec dans l'une des deux matières.

C. Sara a la moyenne en maths, mais pas en physique.
Faux.
C'est un cas possible du contraire, pas le contraire entier : elle peut aussi échouer en maths.

D. Sara a la moyenne dans une seule des deux matières.
Faux.
Elle peut aussi échouer dans les deux : ce cas rend aussi la phrase de départ fausse.

Correction
La phrase de départ est fausse dès que Sara échoue dans l'une au moins des deux matières.

Son contraire est donc : « Sara n'a pas la moyenne en maths **ou** n'a pas la moyenne en physique », avec un « ou » inclusif. Nier un « et » donne un « ou ».

La règle vue avec Sara est générale : elle fait partie des **lois de Morgan**.

Pourquoi est-ce vrai ? Les propositions P et Q n'ont que quatre cas possibles de valeurs, car chacune est soit vraie, soit fausse. La preuve compare les deux membres dans chacun de ces cas.

Examiner tous les cas ainsi, c'est déjà une disjonction des cas. Tu en verras plus loin le principe général : il reposera, lui aussi, sur ce seul fait.

Les lois de Morgan

Propriété : Double négation et lois de Morgan

Pour toutes propositions P et Q, les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$;
- $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$;
- $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$.

Démonstration

Étape 1. D'après F01, $\overline{\overline{P}}$ a la valeur de vérité contraire de celle de $\overline{P}$, donc celle de P.

Étape 2. Si P et Q sont vraies, $\overline{(P \text{ et } Q)}$ est fausse, et $(\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$ aussi, car $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ sont fausses (F02). Sinon, $(P \text{ et } Q)$ est fausse, donc sa négation est vraie ; l'une au moins de $\overline{P}$, $\overline{Q}$ est vraie, donc leur disjonction aussi.

Étape 3. Si P et Q sont fausses, $\overline{(P \text{ ou } Q)}$ est vraie, et $(\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$ aussi. Sinon, $(P \text{ ou } Q)$ est vraie, donc sa négation est fausse ; l'une au moins de $\overline{P}$, $\overline{Q}$ est fausse, donc leur conjonction aussi (F02).

Étape 4. Dans chaque cas, les deux membres de chaque équivalence ont la même valeur de vérité : les trois équivalences sont vraies (F03).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer que deux propositions composées ont la même valeur, on examine **tous** les cas de valeurs de vérité de P et Q. Il n'y en a que quatre : on peut les épuiser.

Retiens le geste :

- nier un « et » donne un « ou » ;
- nier un « ou » donne un « et » ;
- nier deux fois ne change rien.

Vérifie : Quel cas, quelle étape ?

Dans la preuve, la négation de $(P \text{ et } Q)$ est traitée à l'étape 2. Quel cas y est examiné à part ?

A. Le cas où P et Q sont vraies.

Juste.
Juste : c'est le seul cas où $(P \text{ et } Q)$ est vraie ; les trois autres sont regroupés.

B. Le cas où P et Q sont fausses.

Faux.
Ce cas est mis à part à l'étape 3, pour la négation de $(P \text{ ou } Q)$.

C. Le cas où P est vraie et Q fausse.

Faux.
Ce cas est regroupé avec d'autres sous « sinon » : $(P \text{ et } Q)$ y est fausse.

D. Aucun : l'étape 2 recopie la table de vérité.

Faux.
L'étape 2 raisonne cas par cas, avec des phrases ; la table ne sert qu'à vérifier.

Correction

> $(P \text{ et } Q)$ n'est vraie que si P et Q sont vraies. L'étape 2 traite donc ce cas à part, puis regroupe les trois autres sous « sinon ».
>
> Dans ces trois cas, $(P \text{ et } Q)$ est fausse, et l'une au moins de $\overline{P}$, $\overline{Q}$ est vraie.

Nier sans se tromper

Exemple : nier une conjonction

Soit n un entier. La négation de « n est pair et $n > 10$ » est « n est impair ou $n \leq 10$ ».

Vérifie avec $n = 7$:

- « n est pair et $n > 10$ » est fausse ;
- « n est impair ou $n \leq 10$ » est vraie.

Les deux propositions ont bien des valeurs contraires.

Attention : la négation de « et » est « ou »

✗ Écrire que la négation de « $x > 0$ et $x < 5$ » est « $x \leq 0$ et $x \geq 5$ ».

✓ Aucun réel ne vérifie à la fois $x \leq 0$ et $x \geq 5$. Or le réel 7 ne vérifie pas « $x > 0$ et $x < 5$ » : le contraire doit être vrai pour lui.

La négation correcte est « $x \leq 0$ ou $x \geq 5$ ».

La contraposée

« S'il pleut, le sol est mouillé. » Si le sol est sec, tu en déduis qu'il ne pleut pas. Cette déduction s'appuie sur la **contraposée**.

Pourquoi est-ce vrai ? Une implication n'est fausse que dans un seul cas. La preuve montre que ce cas est aussi le seul où sa contraposée est fausse.

Propriété : Implication : écriture, négation et contraposée

Pour toutes propositions P et Q, les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } Q)$;
- $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \text{ et } \overline{Q})$;
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

L'implication $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ est la **contraposée** de l'implication $(P \Rightarrow Q)$.

Démonstration

Étape 1. La disjonction $(\overline{P} \text{ ou } Q)$ est fausse seulement lorsque $\overline{P}$ et Q sont fausses (F02), c'est-à-dire lorsque P est vraie et Q fausse (F01). C'est exactement le seul cas où $(P \Rightarrow Q)$ est fausse (F03) : les deux membres ont toujours la même valeur de vérité.

Étape 2. Par l'étape 1, $\overline{(P \Rightarrow Q)}$ a la valeur de vérité de $\overline{(\overline{P} \text{ ou } Q)}$. D'après F04, celle-ci a la valeur de vérité de $(\overline{\overline{P}} \text{ et } \overline{Q})$, donc celle de $(P \text{ et } \overline{Q})$, car $\overline{\overline{P}}$ a la valeur de P (F04).

Étape 3. D'après F03, $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ est fausse seulement lorsque $\overline{Q}$ est vraie et $\overline{P}$ fausse, c'est-à-dire lorsque Q est fausse et P vraie (F01). C'est le seul cas où $(P \Rightarrow Q)$ est fausse : les deux implications ont toujours la même valeur de vérité.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux implications fausses **dans le même cas seulement** ont toujours la même valeur : c'est le cœur de la preuve.

Retiens trois écritures autour de $(P \Rightarrow Q)$:

- elle a la valeur de $(\overline{P} \text{ ou } Q)$;
- sa négation est $(P \text{ et } \overline{Q})$;
- sa contraposée est $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

Vérifie : Quelle contraposée ?

Soit n un entier. Quelle est la contraposée de « si n est multiple de 4, alors n est pair » ?

A. Si n est pair, alors n est multiple de 4.
Faux.
C'est la réciproque : on a échangé hypothèse et conclusion, sans les nier.

B. Si n n'est pas multiple de 4, alors n est impair.
Faux.
On a nié sans échanger : c'est la contraposée de la réciproque. Elle est fausse pour $n = 2$.

C. n est multiple de 4 et n est impair.
Faux.
C'est la négation de l'implication, pas sa contraposée.

D. Si n est impair, alors n n'est pas multiple de 4.
Juste.
Juste : on nie la conclusion, on nie l'hypothèse, et on les échange.

Correction

La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$. Ici, $\overline{Q}$ est « n est impair » et $\overline{P}$ est « n n'est pas multiple de 4 ».

La contraposée est donc : « si n est impair, alors n n'est pas multiple de 4 ». Elle a la même valeur que l'implication de départ.

Écrire négation et contraposée

Exemple : négation et contraposée

Soit x un réel, et l'implication « si $x > 2$, alors $x^2 > 4$ ».

- **Négation** : « $x > 2$ et $x^2 \leq 4$ ».
- **Contraposée** : « si $x^2 \leq 4$, alors $x \leq 2$ ».

L'implication est vraie pour tout réel x. Supposons $x > 2$. Alors $x^2 > 2x$, en multipliant $x > 2$ par $x > 0$; et $2x > 4$. Donc $x^2 > 4$.

Sa négation est donc fausse pour tout réel x.

À toi : Négation et contraposée

Soit x un réel. Écris la négation, puis la contraposée, de l'implication « si $x^2 = x$, alors $x = 0$ ou $x = 1$ ». Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \text{ et } \overline{Q})$.
Indice 2
Nie la conclusion « $x = 0$ ou $x = 1$ » avec une loi de Morgan.
Indice 3
Point délicat : la contraposée nie les deux membres, puis les échange.

Réponse
La négation de « $x = 0$ ou $x = 1$ » est « $x \neq 0$ et $x \neq 1$ », d'après les lois de Morgan.

- Négation : « $x^2 = x$ et $x \neq 0$ et $x \neq 1$ ».
- Contraposée : « si $x \neq 0$ et $x \neq 1$, alors $x^2 \neq x$ ».

L'implication est vraie : $x^2 - x = x(x-1)$, et un produit nul a un facteur nul.

Double implication et équivalences successives

Les deux sens

Devine : Une flèche dans les deux sens ?

Pour tout réel x, l'implication « si $x = 3$, alors $x^2 = 9$ » est vraie. Peut-on écrire, pour tout réel x, $x = 3 \Leftrightarrow x^2 = 9$?

A. Oui, car l'implication est vraie.

Faux.
Une équivalence demande aussi la réciproque : « si $x^2 = 9$, alors $x = 3$ ».

B. Non : $x = -3$ vérifie $x^2 = 9$ sans vérifier $x = 3$.

Juste.
Juste : la réciproque est fausse pour $x = -3$.

C. Oui, car $3^2 = 9$.

Faux.
Ce calcul ne vérifie qu'un sens, et pour une seule valeur.

D. Non, car l'implication de départ est fausse.

Faux.
L'implication de départ est vraie ; c'est sa réciproque qui échoue.

Correction
Une équivalence, ce sont deux implications.

- Le sens « si $x = 3$, alors $x^2 = 9$ » est vrai.
- Le sens « si $x^2 = 9$, alors $x = 3$ » est faux, car $(-3)^2 = 9$.

On ne peut donc pas écrire l'équivalence.

Pour démontrer une équivalence, on démontre d'habitude deux implications ; ou bien on enchaîne des équivalences.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve compare les valeurs de vérité. Une équivalence est vraie quand P et Q ont la même valeur. C'est exactement le cas où aucune des deux implications n'est rompue.

Double implication et transitivité

Propriété : Double implication et transitivité

Pour toutes propositions P, Q et R, les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\big)$;
- $\big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$;
- $\big((P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$.

Démonstration

Étape 1. Si P et Q ont la même valeur de vérité, aucune des implications $(P \Rightarrow Q)$, $(Q \Rightarrow P)$ n'a une hypothèse vraie et une conclusion fausse : elles sont vraies (F03), leur conjonction aussi (F02), comme $(P \Leftrightarrow Q)$. Sinon, l'une des deux est fausse, la conjonction aussi, comme $(P \Leftrightarrow Q)$. Les deux membres ont la même valeur.

Étape 2. Si $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$ ne sont pas toutes deux vraies, l'implication est vraie (F02, F03). Sinon : si P est fausse, $(P \Rightarrow R)$ est vraie ; si P est vraie, Q puis R le sont (F03), et $(P \Rightarrow R)$ est vraie.

Étape 3. Supposons $(P \Leftrightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)$ vraies. Par l'étape 1, $(P \Rightarrow Q)$, $(Q \Rightarrow R)$, $(R \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ sont vraies. Par l'étape 2, $(P \Rightarrow R)$ et $(R \Rightarrow P)$ le sont ; par l'étape 1, $(P \Leftrightarrow R)$ aussi. Sinon, l'hypothèse est fausse (F02) et l'implication est vraie (F03).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une équivalence se démontre dans les **deux** sens : $(P \Rightarrow Q)$, puis $(Q \Rightarrow P)$.

Des implications s'enchaînent : de P on passe à Q, puis de Q à R. C'est la **transitivité**, qui justifie les chaînes d'équivalences.

La preuve suit la vérité de P jusqu'à R, en mettant à part le cas où P est fausse.

Vérifie : Que faut-il montrer ?

Pour démontrer $(P \Leftrightarrow Q)$, que suffit-il de démontrer ?

A. $(P \Rightarrow Q)$ seulement.
Faux.
Il manque la réciproque : un seul sens ne donne pas l'équivalence.

B. $(P \Rightarrow Q)$ et $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.
Faux.
La seconde est la contraposée de la première : c'est deux fois le même sens.

C. $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.
Juste.
Juste : ce sont les deux sens de l'équivalence.

D. Que P est vraie.
Faux.
Savoir P vraie ne dit rien de Q : l'équivalence peut être fausse.

Correction
D'après la double implication, $(P \Leftrightarrow Q)$ a la valeur de $\big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\big)$. Il suffit donc de démontrer les deux implications.

> Une implication et sa contraposée ne comptent que pour un seul sens.

Exemple : Exemple guidé : des équivalences successives

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-1)^2 = (x+3)^2$.

Équivalences. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 = (x+3)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 - (x+3)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1-x-3) \\ & \qquad \times (x-1+x+3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -8(x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = -1. \end{aligned}$$

Justifier. Chaque pas se défait :

- on retranche $(x+3)^2$ aux deux membres ;
- on factorise par $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
- on réduit chaque facteur : -4 et $2(x+1)$;
- on divise par $-8 \neq 0$.

Conclusion. L'unique solution est -1.

Rédiger une équivalence

Méthode : démontrer une équivalence

1. **Deux sens** : démontre $(P \Rightarrow Q)$, puis $(Q \Rightarrow P)$, chacun avec sa rédaction.
2. **Ou une chaîne** : écris $P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow Q$, et justifie que chaque pas se fait dans les **deux** sens.
3. **Conclure** par transitivité : $(P \Leftrightarrow Q)$.

Rédaction attendue. « Pour tout réel x : $P \Leftrightarrow P_1$, car on retranche 5 aux deux membres ; $P_1 \Leftrightarrow Q$, car on divise par $2 \neq 0$. Donc $P \Leftrightarrow Q$. »

Attention : chaque pas doit être réversible

✗ « Pour tout réel x, $x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 2$, en divisant par x. »

✓ Diviser par x suppose $x \neq 0$. Or $x = 0$ vérifie $x^2 = 2x$. On écrit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x^2 = 2x & \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 2). \end{aligned}$$

Élever au carré pose le même problème : ce pas ne donne en général qu'une implication.

Vérifier chaque pas

Exemple : Contre-exemple : élever au carré

Soit l'équation $\sqrt{x+2} = x$, pour $x \geq -2$. En élevant au carré, on obtient $x + 2 = x^2$, soit $(x-2)(x+1) = 0$. Donc $x = 2$ ou $x = -1$.

Mais ce pas n'était qu'une implication : on teste chaque candidat.

- Pour $x = -1$: $\sqrt{-1+2} = 1$ et $1 \neq -1$.
- Pour $x = 2$: $\sqrt{4} = 2$.

Seul 2 est solution. Élever au carré a ajouté une valeur.

Trouve l'erreur : Une chaîne à vérifier

Un élève écrit, pour un réel x : (1) $(x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow$ (2) $x - 2 = 3 \Leftrightarrow$ (3) $x = 5$. Où est l'erreur ?

A. Le passage de (1) à (2).

Juste.

Juste : de $(x-2)^2 = 9$, on ne tire pas seulement $x - 2 = 3$.

B. Le passage de (2) à (3).

Faux.

Ajouter 2 aux deux membres se défait en retranchant 2 : ce pas est réversible.

C. Nulle part : 5 est bien solution.

Faux.

5 est solution, mais ce n'est pas la seule : -1 l'est aussi.

D. Il fallait développer $(x-2)^2$.

Faux.

Développer n'est pas obligatoire ; l'erreur est ailleurs.

Correction

$(x-2)^2 = 9$ équivaut à « $x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3$ » : deux réels de même carré sont égaux ou opposés.

Le passage de (1) à (2) perd le cas $x - 2 = -3$, soit $x = -1$. Les solutions sont -1 et 5.

À toi : Rédige une chaîne d'équivalences

Rédige, par équivalences successives : pour tout réel x, $(x+2)^2 = x^2 + 8 \Leftrightarrow x = 1$. Justifie chaque pas. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Développe $(x+2)^2$ avec une identité remarquable.

Indice 2

Retranche x^2 aux deux membres : il reste une équation du premier degré.

Indice 3

Point délicat : nomme l'opération de chaque pas et vérifie qu'elle se défait.

Réponse

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & (x+2)^2 = x^2 + 8 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 4x + 4 = x^2 + 8 \\ \Leftrightarrow\ & 4x = 4 \\ \Leftrightarrow\ & x = 1. \end{aligned}$$

Chaque pas se défait :

- le premier développe $(x+2)^2$ par une identité remarquable ;
- le deuxième retranche $x^2 + 4$ aux deux membres ;
- le dernier divise par $4 \neq 0$.

Conclusion. Chaque flèche vaut dans les deux sens : pour tout réel x, $(x+2)^2 = x^2 + 8$ équivaut à $x = 1$.

Quantificateurs

Tous, au moins un, un seul

Devine : Un énoncé vrai

Lequel de ces énoncés est vrai ?

A. Tout entier naturel est pair.

Faux.

3 est un entier naturel impair : un seul cas suffit à le contredire.

B. Il existe un entier naturel pair et premier.

Juste.

Juste : 2 est pair, et ses seuls diviseurs sont 1 et 2.

C. Tout réel a un carré strictement positif.

Faux.

Le carré de 0 vaut 0, qui n'est pas strictement positif.

D. Il existe un réel dont le carré vaut -1.

Faux.

Un carré de réel est positif ou nul : il ne vaut jamais -1.

Correction

« Tout » exige que chaque élément convienne : un seul cas contraire rend l'énoncé faux, comme 3 ou 0.

« Il existe » demande un seul élément qui convient : 2 suffit.

Aucun réel n'a pour carré -1, car $x^2 \geq 0$ pour tout réel x.

L'énoncé « n est pair » n'est ni vrai ni faux : il dépend de n. On le note $P(n)$.

Pour en faire une proposition, on remplace n par un nombre. Ou bien on précise **combien** de n conviennent : tous, au moins un, ou un seul. C'est le rôle des **quantificateurs**.

Petit rappel. Quatre ensembles de nombres servent ici :

- $\mathbb{N}$, les entiers naturels ;
- $\mathbb{Z}$, les entiers relatifs ;
- $\mathbb{Q}$, les rationnels $\frac{p}{q}$, avec p et q entiers et $q \neq 0$;
- $\mathbb{R}$, les réels.

Tout entier naturel est un entier relatif, tout entier relatif est rationnel, tout rationnel est réel. Ici, l'ensemble E est l'un d'eux : le mot « ensemble » sera étudié au chapitre suivant.

Les quantificateurs

Définition : Fonction propositionnelle ; quantificateurs

Soit E un ensemble. Une **fonction propositionnelle** $P(x)$ de la variable x de E est un énoncé qui devient une proposition chaque fois que l'on remplace x par un élément de E.

- La proposition $(\forall x \in E,\ P(x))$, lue « pour tout x de E, $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour chaque élément x de E. Le symbole $\forall$ est le **quantificateur universel**.
- La proposition $(\exists x \in E,\ P(x))$, lue « il existe au moins un x de E tel que $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E. Le symbole $\exists$ est le **quantificateur existentiel**.
- La proposition $(\exists! x \in E,\ P(x))$, lue « il existe un unique x de E tel que $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour exactement un élément x de E.

Bien lire. La lettre est **muette** : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ t^2 \geq 0$ disent la même chose.

L'ensemble compte : $\exists n \in \mathbb{N},\ n+3=1$ est fausse. Mais $\exists n \in \mathbb{Z},\ n+3=1$ est vraie, avec $n=-2$.

Vérifie : Le bon ensemble

Soit E un ensemble de nombres. Pour quel choix de E la proposition $\exists x \in E,\ 2x = 5$ est-elle vraie ?

A. $E = \mathbb{N}$

Faux.

$2x = 5$ donne $x = \dfrac{5}{2}$, qui n'est pas un entier.

B. $E = \mathbb{Z}$

Faux.

Le seul nombre qui convient est $\dfrac{5}{2}$, qui n'est pas entier.

C. $E = \mathbb{Q}$

Juste.

Juste : $\dfrac{5}{2}$ est un rationnel, et $2 \times \dfrac{5}{2} = 5$.

Correction

Le seul réel x tel que $2x = 5$ est $x = \dfrac{5}{2}$.

Il n'est pas entier : la proposition est fausse dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$. Il est rationnel : la proposition est vraie dans $\mathbb{Q}$, et aussi dans $\mathbb{R}$.

Traduire et décider

Exemple : traduire avec des quantificateurs

- « Tout entier naturel est positif ou nul » : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 0$. Vraie.
- « L'équation $x^2 = 2$ a une solution réelle » : $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2$. Vraie, avec $x = \sqrt{2}$.
- « L'équation $3x = 6$ a une seule solution réelle » : $\exists! x \in \mathbb{R},\ 3x = 6$. Vraie, car $3x = 6$ équivaut à $x = 2$.

Exemple : « un seul » dépend de l'ensemble

La proposition $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4$ est fausse : 2 et -2 conviennent, soit deux solutions.

La proposition $\exists! x \in \mathbb{N},\ x^2 = 4$ est vraie. En effet, -2 n'est pas un entier naturel, et 2 est le seul qui convient.

Vérifie : Un seul ?

Laquelle de ces propositions est vraie ?

A. $\exists! n \in \mathbb{Z},\ n^2 = 9$

Faux.

3 et -3 sont deux entiers relatifs de carré 9.

B. $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 > n$

Faux.

Pour $n = 1$: $1^2 = 1$, qui n'est pas strictement supérieur à 1.

C. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$

Faux.

Un carré de réel est positif ou nul : aucun réel ne convient.

D. $\exists! n \in \mathbb{N},\ n^2 = 9$

Juste.

Juste : parmi les entiers naturels, seul 3 a pour carré 9.

Correction

Dans $\mathbb{N}$, $n^2 = 9$ équivaut à $n = 3$, car $n \geq 0$: il y a une seule solution. Dans $\mathbb{Z}$, -3 convient aussi.

Pour $n = 1$, on a $n^2 = n$: la proposition universelle est fausse.

Enfin, $x^2 \geq 0$ pour tout réel x : aucun réel n'a un carré strictement négatif.

À toi

Remarque : le quantificateur s'écrit en tête

On n'écrit pas « $x^2 \geq 0,\ \forall x$ » : le quantificateur se place en tête, avec son ensemble.

Une proposition quantifiée se lit de gauche à droite, dans l'ordre où elle est écrite. Tu verras bientôt que cet ordre compte.

À toi : Traduire et décider

Traduis avec des quantificateurs, puis dis si chaque proposition est vraie, en justifiant : (a) « tout entier relatif est inférieur ou égal à son carré » ; (b) « il existe un entier naturel non nul dont le carré est égal à son double ». Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Commence par le quantificateur, puis l'ensemble, puis la propriété.

Indice 2

Pour (a), étudie le signe de $n^2 - n = n(n-1)$; pour (b), essaie $1, 2, 3$.

Indice 3

Point délicat : pour (a), sépare le cas $n \geq 1$ du cas $n \leq 0$.

Réponse

(a) La traduction est $\forall n \in \mathbb{Z},\ n \leq n^2$. Elle est vraie.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $n^2 - n = n(n-1)$. Comme n est entier, $n \geq 1$ ou $n \leq 0$.

- Si $n \geq 1$, les facteurs n et $n-1$ sont positifs ou nuls.
- Si $n \leq 0$, ils sont négatifs ou nuls.

Dans les deux cas, le produit est positif ou nul : $n \leq n^2$.

(b) La traduction est $\exists n \in \mathbb{N},\ (n \neq 0 \text{ et } n^2 = 2n)$. Elle est vraie : $n = 2$ convient, car $2^2 = 4 = 2 \times 2$.

Nier une proposition quantifiée ; contre-exemple

Le contraire de « tous »

Devine : Le contraire de « tous »

Quelle est la négation de « tous les élèves de la classe ont réussi le devoir » ?

A. Aucun élève de la classe n'a réussi le devoir.
Faux.
Trop fort : si un seul élève échoue, la phrase de départ est déjà fausse.

B. Au moins un élève de la classe n'a pas réussi le devoir.
Juste.
Juste : il suffit d'un seul échec pour contredire « tous ».

C. Tous les élèves de la classe ont échoué au devoir.
Faux.
C'est la même erreur : « tous ont échoué » n'est qu'un des cas où la phrase est fausse.

D. Un seul élève de la classe n'a pas réussi le devoir.
Faux.
Deux échecs contredisent aussi « tous » : « un seul » est trop précis.

Correction
« Tous ont réussi » est fausse dès qu'un élève au moins n'a pas réussi. Sa négation est donc « il existe au moins un élève qui n'a pas réussi ».

Le « pour tout » devient « il existe », et la propriété est niée.

Cette règle vaut pour toute proposition quantifiée.

Pourquoi est-ce vrai ? Dire qu'il est faux que $P(x)$ soit vraie pour chaque x, c'est dire qu'elle est fausse pour au moins un x. La preuve suit cette phrase, puis fait de même pour « il existe ».

Nier un quantificateur

Propriété : Négation d'une proposition quantifiée

Soit E un ensemble et $P(x)$ une fonction propositionnelle de la variable x de E. Les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $\overline{(\forall x \in E,\ P(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in E,\ \overline{P(x)})$;
- $\overline{(\exists x \in E,\ P(x))} \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ \overline{P(x)})$.

En particulier, s'il existe un élément x_0 de E tel que $P(x_0)$ soit fausse, alors la proposition $(\forall x \in E,\ P(x))$ est fausse : l'élément x_0 est un **contre-exemple**.

Démonstration

Étape 1. D'après F01 et F07, $\overline{(\forall x \in E,\ P(x))}$ est vraie si et seulement s'il est faux que $P(x)$ soit vraie pour chaque élément x de E. Cela revient à dire que $P(x)$ est fausse pour au moins un élément x de E (F01), donc que $\overline{P(x)}$ est vraie pour au moins un x de E : c'est la proposition $(\exists x \in E,\ \overline{P(x)})$ (F07).

Étape 2. De même, $\overline{(\exists x \in E,\ P(x))}$ est vraie si et seulement si $P(x)$ n'est vraie pour aucun élément x de E, c'est-à-dire si et seulement si $\overline{P(x)}$ est vraie pour chaque x de E (F01, F07).

Étape 3. Si $P(x_0)$ est fausse, $\overline{P(x_0)}$ est vraie (F01), donc $(\exists x \in E,\ \overline{P(x)})$ est vraie, avec $x = x_0$. Par l'étape 1, $\overline{(\forall x \in E,\ P(x))}$ est vraie, donc $(\forall x \in E,\ P(x))$ est fausse (F01).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Nier, c'est **échanger** $\forall$ et $\exists$, puis nier la propriété, sans toucher à l'ensemble. La preuve lit simplement la définition des quantificateurs.

Conséquence directe : pour montrer qu'un « pour tout » est faux, **un** élément qui ne convient pas suffit.

Vérifie : La bonne négation

Quelle est la négation de $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 2x$?

A. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \leq 2x$

Faux.
Le quantificateur doit changer : « pour tout » devient « il existe ».

B. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 < 2x$

Faux.
Le contraire de « $>$ » est « $\leq$ » : le cas d'égalité est oublié.

C. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 2x$

Faux.
La propriété doit être niée, pas seulement le quantificateur.

D. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \leq 2x$

Juste.

Juste : on échange le quantificateur et on nie l'inégalité stricte.

Correction

On écrit $\exists x \in \mathbb{R}$, puis la négation de « $x^2 + 1 > 2x$ », qui est « $x^2 + 1 \leq 2x$ ».

Cette négation est vraie : $x = 1$ donne $2 \leq 2$. La proposition de départ est donc fausse.

Exemple : un contre-exemple

La proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq x$ est fausse.

Contre-exemple. Prenons $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Alors $x_0^2 = \dfrac{1}{4}$, et $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$: l'inégalité $x_0^2 \geq x_0$ est fausse.

Le calcul fait la preuve : sans lui, le contre-exemple n'est qu'une affirmation.

Nier une proposition complète

Méthode : écrire une négation

1. **Lire** la proposition de gauche à droite : quantificateurs, puis connecteurs.
2. **Changer** chaque $\forall$ en $\exists$ et chaque $\exists$ en $\forall$, en gardant leur ordre et leurs ensembles.
3. **Nier** la propriété : lois de Morgan pour « et » et « ou », $(P \text{ et } \overline{Q})$ pour une implication.
4. **Contrôler** : la négation doit être vraie exactement quand la proposition de départ est fausse.

Exemple : Exemple guidé : nier une implication quantifiée

Énoncé. Nie la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x > 1 \Rightarrow x^2 > x).$$

Quantificateur. $\forall x \in \mathbb{R}$ devient $\exists x \in \mathbb{R}$.

Implication. La négation de $(x > 1 \Rightarrow x^2 > x)$ est $(x > 1 \text{ et } x^2 \leq x)$.

Résultat. La négation cherchée est

$$\exists x \in \mathbb{R},\ (x > 1 \text{ et } x^2 \leq x).$$

Cette négation est fausse. En effet, si $x > 1$, alors $x > 0$ et $x - 1 > 0$, donc $x^2 - x = x(x-1) > 0$.

Le contre-exemple

Méthode : réfuter par un contre-exemple

1. **Écrire** ce qu'il faut trouver : un élément x_0 de l'ensemble tel que $P(x_0)$ soit fausse.
2. **Choisir** une valeur explicite de x_0 : quelques essais au brouillon guident le choix.
3. **Calculer** pour montrer que $P(x_0)$ est fausse, puis **conclure** : « donc la proposition est fausse ».

Attention : des exemples ne prouvent pas un « pour tout »

✗ « $n^2 + n + 41$ est premier pour $n = 0, 1, \ldots, 10$, donc pour tout entier naturel n. »

✓ Des essais, même nombreux, ne prouvent pas une proposition universelle.

En revanche, un seul contre-exemple suffit à la réfuter : $n = 40$ donne $1681 = 41 \times 41$.

Vérifie : Un contre-exemple

Lequel de ces réels est un contre-exemple à la proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x > x$?

A. $x_0 = 3$

Faux.

$2 \times 3 = 6$ et $6 > 3$: la propriété est vraie pour 3.

B. $x_0 = -1$

Juste.

Juste : $2 \times (-1) = -2$, et $-2 > -1$ est fausse.

C. $x_0 = \dfrac{1}{2}$

Faux.

$2 \times \dfrac{1}{2} = 1$ et $1 > \dfrac{1}{2}$: la propriété est vraie.

D. $x_0 = 10$

Faux.

$20 > 10$: la propriété est vraie pour 10.

Correction

En retranchant x aux deux membres, $2x > x$ équivaut à $x > 0$. Un contre-exemple est donc un réel négatif ou nul.

Parmi les choix, seul -1 convient : $2 \times (-1) = -2$, et $-2 < -1$.

À toi : Réfuter par le calcul

Rédige la preuve que la proposition $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$ est fausse. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris d'abord la négation : il existe un entier naturel n tel que…

Indice 2

Calcule 2^n et n^2 pour $n = 0, 1, 2, 3$.

Indice 3

Point délicat : « $>$ » est strict ; une égalité suffit déjà à mettre la propriété en défaut.

Réponse

Montrons la négation :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ 2^n \leq n^2.$$

Prenons $n = 3$: $2^3 = 8$ et $3^2 = 9$, donc $2^3 \leq 3^2$.

Conclusion. La propriété est fausse pour $n = 3$: la proposition $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$ est fausse.

L'entier 2 convient aussi : 2^n et n^2 valent alors tous deux 4.

L'ordre des quantificateurs

Qui choisit en premier ?

Dans une classe, « tout élève a un ami » ne dit pas « il existe un ami de tous les élèves ».

La première phrase laisse chacun avoir son ami. La seconde exige un même ami pour tous.

Devine : Deux phrases presque identiques

On compare deux phrases. (A) : « pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que $m > n$ ». (B) : « il existe un entier naturel m tel que, pour tout entier naturel n, $m > n$ ». Lesquelles sont vraies ?

A. (A) et (B).

Faux.

(B) demanderait un entier plus grand que tous, y compris que lui-même.

B. (B) seulement.

Faux.

(A) est vraie : à chaque n, l'entier $n + 1$ répond.

C. Ni l'une ni l'autre.

Faux.

(A) est vraie : $m = n + 1$ est plus grand que n.

D. (A) seulement.

Juste.

Juste : dans (A), m est choisi après n ; $m = n + 1$ convient.

Correction

Dans (A), on donne d'abord n, puis on choisit m : $m = n + 1$ convient.

> Dans (B), il faut un seul m qui marche pour **tous** les n. Avec $n = m$, on aurait $m > m$, ce qui est faux.
>
> **Conclusion.** (A) est vraie, (B) est fausse.

Les deux phrases ont les mêmes mots, mais pas le même ordre.

Pourquoi est-ce vrai ? Un y qui convient pour tous les x convient en particulier pour chacun d'eux. L'inverse ne marche pas : la preuve exhibe un contre-exemple.

L'ordre compte

Propriété : Ordre des quantificateurs

Soit E un ensemble et $P(x, y)$ une fonction propositionnelle des variables x et y de E : elle devient une proposition chaque fois que l'on remplace x et y par des éléments de E.

- Deux quantificateurs de même nature s'échangent : $(\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in E,\ \forall x \in E,\ P(x, y))$, et de même avec deux quantificateurs $\exists$.
- $(\exists y \in E,\ \forall x \in E,\ P(x, y)) \Rightarrow (\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ P(x, y))$.
- La réciproque de cette dernière implication est fausse en général : on n'échange pas un quantificateur $\forall$ et un quantificateur $\exists$.

Démonstration

Étape 1. Les deux membres de la première équivalence sont vrais exactement lorsque $P(x, y)$ est vraie pour chaque choix de x et de y dans E (F07). Avec deux quantificateurs $\exists$, les deux membres sont vrais exactement lorsque $P(x, y)$ est vraie pour au moins un choix de x et de y.

Étape 2. Supposons qu'il existe $y_0 \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, $P(x, y_0)$ soit vraie. Soit $x \in E$. Alors $P(x, y_0)$ est vraie : l'élément $y = y_0$ convient, donc $(\exists y \in E,\ P(x, y))$ est vraie. Ceci vaut pour tout $x \in E$: $(\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ P(x, y))$ est vraie.

Étape 3. Contre-exemple à la réciproque, avec $E = \mathbb{R}$ et $P(x, y)$: « $y > x$ ». Pour tout réel x, le réel $y = x + 1$ vérifie $y > x$. Mais, pour tout réel y, le choix $x = y$ rend $y > x$ fausse : $(\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y > x)$ est fausse (F08), alors que $(\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y > x)$ est vraie.

> **À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**
>
> Dans « $\forall x,\ \exists y$ », le y peut **dépendre** de x. Dans « $\exists y,\ \forall x$ », un même y doit servir à tous les x.
>
> On passe toujours de la seconde forme à la première ; l'inverse est faux en général.
>
> Deux $\forall$, ou deux $\exists$, s'échangent sans risque.

Vérifie : Laquelle est vraie ?

Laquelle de ces propositions est vraie ?

A. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$

Juste.

Juste : à chaque x, le réel $y = -x$ répond.

B. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + y = 0$

Faux.

Un même y ne peut pas annuler $x + y$ pour tous les x : prends $x = 1 - y$.

C. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ xy = 1$

Faux.

Pour $x = 0$, le produit xy vaut 0, quel que soit y.

D. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ xy = 1$

Faux.

Avec $x = 0$, on obtiendrait $0 = 1$: aucun y ne convient.

Correction

Première proposition. Soit x un réel : $y = -x$ donne $x + y = 0$. Elle est vraie.

Deuxième. Soit y un réel : $x = 1 - y$ donne $x + y = 1 \neq 0$. Aucun y ne convient pour tous les x : elle est fausse.

Troisième et quatrième. Pour $x = 0$, on a $xy = 0 \neq 1$, quel que soit y : elles sont fausses.

Petit rappel. La valeur absolue d'un réel y est

$$|y| = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 0, \\ -y & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Elle est positive ou nulle, et $y \leq |y|$ pour tout réel y.

Exemple : un réel qui dépend d'un autre

Vraie. La proposition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y > x^2$$

est vraie. Soit x un réel : $y = x^2 + 1$ convient.

Fausse. La proposition

$$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y > x^2$$

est fausse. Montrons que sa négation est vraie :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y \leq x^2.$$

Soit y un réel. Le réel $x = \sqrt{|y| + 1}$ donne $x^2 = |y| + 1 > y$. La négation est vraie.

Le piège

Attention : on n'échange pas « pour tout » et « il existe »

✗ De « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y < x$ », conclure qu'il existe un réel plus petit que tous les réels.

✓ Dans la proposition de départ, y dépend de x : $y = x - 1$.

Un réel y plus petit que tous vérifierait $y < y$, en prenant $x = y$: c'est impossible.

À toi : Rédige les deux preuves

Rédige la preuve que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m > 2n$ est vraie, puis que $\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m > 2n$ est fausse. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour la première, fixe n et propose un m qui dépend de n.
Indice 2
Pour la seconde, écris sa négation : $\forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ m \leq 2n$.
Indice 3
Point délicat : une fois m fixé, choisis n à partir de m.

Réponse
Première proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'entier $m = 2n + 1$ vérifie $m > 2n$: elle est vraie.

Seconde proposition. Montrons sa négation :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ m \leq 2n.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. Prenons $n = m$: $2n = 2m \geq m$, car $m \geq 0$. Donc $m \leq 2n$.

Conclusion. La négation est vraie : la seconde proposition est fausse.

Raisonnement direct, raisonnement par contraposée

Le raisonnement direct

Devine : Le premier pas

On veut démontrer : pour tout entier n, si n est impair, alors n^2 est impair. Comment commencer ?

A. Supposons n^2 impair.
Faux.
C'est l'hypothèse de la réciproque : on partirait de la conclusion.

B. Prenons $n = 3$: 9 est impair, donc c'est vrai.

Faux.

Un exemple ne prouve pas un « pour tout ».

C. Soit n un entier impair : $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Juste.

Juste : on introduit l'entier, on traduit l'hypothèse, puis on calcule.

D. Supposons n pair.

Faux.

On suppose l'hypothèse « n impair », pas son contraire.

Correction

Une preuve directe commence par introduire l'objet et supposer l'hypothèse : « Soit n un entier impair ».

On traduit l'hypothèse : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Le calcul de n^2 vient ensuite.

Petit rappel. Soit n un entier.

- n est **pair** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.
- n est **impair** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.

Tout entier est pair ou impair, jamais les deux : c'est le reste de sa division par 2.

Méthode **: démontrer une implication directement**

1. **Introduire** : « Soit $x \in E$ » pour un « pour tout », puis « Supposons P ».
2. **Déduire** pas à pas, en nommant la raison de chaque pas : hypothèse, définition, résultat du cours.
3. **Conclure** par « donc Q ».

Rédaction attendue. « Soit … Supposons … Alors … car … Donc … »

Exemple **: Exemple guidé : le carré d'un impair**

Énoncé. Pour tout entier n, si n est impair, alors n^2 est impair.

Introduire. Soit n un entier impair : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.

Déduire. En développant $(2k + 1)^2$:

$$\begin{aligned} n^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1, \end{aligned}$$

et $2k^2 + 2k$ est un entier.

Conclure. Donc n^2 est impair.

Passer par la contraposée

Méthode : raisonner par contraposée

1. **Annoncer** : « Raisonnons par contraposée. »
2. **Écrire** la contraposée : nier la conclusion, nier l'hypothèse, les échanger.
3. **Démontrer** la contraposée directement : supposer $\overline{Q}$, en déduire $\overline{P}$.
4. **Conclure** : « Donc, par contraposée, si P, alors Q. »

Exemple : Exemple guidé : si le carré est pair

Énoncé. Pour tout entier n, si n^2 est pair, alors n est pair.

Annoncer. Raisonnons par contraposée. Il s'agit de montrer : si n est impair, alors n^2 est impair.

Démontrer. C'est exactement l'exemple précédent, déjà démontré.

Conclure. Donc, par contraposée, si n^2 est pair, alors n est pair.

Une preuve directe aurait buté : de $n^2 = 2k$, on ne tire pas simplement n.

Vérifie : Quel départ choisir ?

Soit n un entier. On veut montrer : si $7n$ est pair, alors n est pair. Quel départ mène le plus simplement au but ?

A. Supposer n impair, et montrer que $7n$ est impair.

Juste.

Juste : $n = 2k + 1$ donne $7n = 14k + 7 = 2(7k + 3) + 1$, et $7k + 3$ est un entier : $7n$ est impair.

B. Supposer $7n = 2k$, et en tirer $n = \dfrac{2k}{7}$.

Faux.

On obtient une fraction : rien ne dit encore que c'est un entier pair.

C. Vérifier les cas $n = 2$, $n = 4$ et $n = 6$.

Faux.

Des exemples ne prouvent pas une propriété de tous les entiers.

D. Montrer que si n est pair, alors $7n$ est pair.

Faux.

C'est la réciproque : elle est vraie, mais ce n'est pas ce qui est demandé.

Correction

Raisonnons par contraposée : montrons que si n est impair, alors $7n$ est impair.

Soit n un entier impair : $n = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\begin{aligned} 7n &= 14k + 7 \\ &= 2(7k + 3) + 1, \end{aligned}$$

avec $7k + 3 \in \mathbb{Z}$: $7n$ est impair.

Conclusion. Donc, par contraposée, si $7n$ est pair, alors n est pair.

À toi

À toi : Rédige une contraposée

Soit n un entier. Rédige la preuve, par contraposée, de : si $5n + 3$ est pair, alors n est impair. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris la contraposée : nie la conclusion, nie l'hypothèse, puis échange-les.
Indice 2
Suppose n pair : $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, puis calcule $5n + 3$.
Indice 3
Point délicat : mets un facteur 2 en évidence dans $5n + 3$, autant que possible, et regarde ce qui reste.

Réponse
Raisonnons par contraposée : montrons que si n est pair, alors $5n + 3$ est impair.

Soit n un entier pair : $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\begin{aligned} 5n + 3 &= 10k + 3 \\ &= 2(5k + 1) + 1, \end{aligned}$$

et $5k + 1$ est un entier. Donc $5n + 3$ est impair.

Conclusion. Par contraposée, si $5n + 3$ est pair, alors n est impair.

Remarque : Coin devoir : « montrer que si…, alors… »

En devoir, une question « montrer que si…, alors… » se rédige comme une preuve complète. On attend trois temps visibles :

- l'annonce : « Raisonnons par contraposée », ou « Soit n un entier tel que… » ;
- les pas, chacun avec sa raison : « car $n = 2k + 1$ », « par hypothèse » ;
- la conclusion écrite : « Donc… ».

Un calcul juste sans annonce ni conclusion ne montre pas que tu as raisonné.

Raisonnement par disjonction des cas

Tous les cas

Devine : Une preuve incomplète

Pour montrer que, pour tout entier n, $n(n+1)$ est pair, une élève écrit : « Si n est pair, $n = 2k$, donc $n(n+1) = 2k(n+1)$ est pair. » Que manque-t-il ?

A. Rien : la preuve est complète.

Faux.

Elle ne dit rien des entiers impairs, comme $n = 3$.

B. Le cas $n = 0$.

Faux.

0 est pair : ce cas est déjà traité.

C. Le cas où n est impair.

Juste.

Juste : tout entier est pair ou impair, et seul le premier cas est traité.

D. La réciproque de la propriété.

Faux.

Il n'y a pas d'implication à retourner ici : il faut couvrir tous les entiers.

Correction

Tout entier est pair ou impair : ces deux cas couvrent tous les entiers. La preuve ne traite que le cas pair.

Il manque le cas impair : si $n = 2k+1$, alors $n+1 = 2(k+1)$, et le produit est encore pair.

Une preuve par cas exige deux choses : les cas couvrent toutes les possibilités, et chacun mène à la conclusion.

Pourquoi est-ce vrai ? Si R découle de P et aussi de $\overline{P}$, alors R est vraie, car l'une des deux est vraie. La preuve le vérifie sur les valeurs de vérité.

Le principe

Propriété : Principe du raisonnement par disjonction des cas

Pour toutes propositions P, Q et R, la proposition suivante est une loi logique :

$$\big((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\big) \Leftrightarrow \big((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R\big).$$

En particulier, si $(P \Rightarrow R)$ et $(\overline{P} \Rightarrow R)$ sont vraies, alors R est vraie.

Démonstration

Étape 1. Si R est vraie, les trois implications $(P \Rightarrow R)$, $(Q \Rightarrow R)$ et $((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)$ sont vraies (F03) : les deux membres sont vrais.

Étape 2. Si R est fausse, le membre de gauche est vrai si et seulement si P et Q sont fausses (F02, F03). Le membre de droite est vrai si et seulement si $(P \text{ ou } Q)$ est fausse, donc si et seulement si P et Q sont fausses (F02). Dans tous les cas, les deux membres ont la même valeur : l'équivalence est une loi logique (F03).

Étape 3. Avec $Q = \overline{P}$: l'une des propositions P, $\overline{P}$ est vraie (F01), donc $(P \text{ ou } \overline{P})$ est vraie (F02). Si $(P \Rightarrow R)$ et $(\overline{P} \Rightarrow R)$ sont vraies, le membre de gauche est vrai, donc $((P \text{ ou } \overline{P}) \Rightarrow R)$ aussi (étapes 1 et 2) ; son hypothèse étant vraie, R est vraie (F03).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les cas doivent être **exhaustifs** : leur « ou » doit être vrai. Avec P et $\overline{P}$, c'est toujours le cas. Chaque cas se traite à part, jusqu'à la même conclusion R.

C'est ce que faisaient déjà, sans le dire, les preuves des lois de Morgan, et la preuve de ce principe elle-même. Elles examinent des valeurs de vérité, qui ne peuvent être que V ou F : elles n'emploient pas le principe.

Vérifie : Des cas qui couvrent tout

Lesquels de ces cas couvrent tous les réels x ?

A. $x > 0$, ou $x < 0$.

Faux.

Le réel 0 n'est dans aucun des deux cas.

B. $x \geq 2$, ou $x \leq 1$.

Faux.

Le réel $\dfrac{3}{2}$ n'est dans aucun des deux cas.

C. $x \geq 1$, ou $x \leq -1$.

Faux.

Le réel 0 n'est dans aucun des deux cas.

D. $x \geq 0$, ou $x < 0$.

Juste.

Juste : chaque réel est positif ou nul, ou bien strictement négatif.

Correction

Pour chaque réel x, on a $x \geq 0$ ou $x < 0$: ces cas sont exhaustifs.

> Les autres laissent des réels de côté : 0 pour le premier et le troisième, $\frac{3}{2}$ pour le deuxième.

Exemple : Exemple guidé : deux entiers consécutifs

Énoncé. Pour tout entier n, $n(n+1)$ est pair.

Soit n un entier ; il est pair ou impair.

Cas 1 : n pair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Donc $n(n+1) = 2 \times k(n+1)$ est pair, car $k(n+1) \in \mathbb{Z}$.

Cas 2 : n impair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$. Donc $n+1 = 2(k+1)$, et $n(n+1) = 2 \times n(k+1)$ est pair, car $n(k+1) \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Dans les deux cas, $n(n+1)$ est pair.

Rédiger par cas

Méthode : raisonner par disjonction des cas

1. **Annoncer** les cas, et justifier qu'ils couvrent tout : « n est pair ou impair », « $x \geq 0$ ou $x < 0$ ».
2. **Traiter** chaque cas sous son titre, jusqu'à la conclusion.
3. **Conclure** : « Dans tous les cas, … ».

Exemple : Exemple guidé : avec une valeur absolue

Énoncé. Pour tout réel x, $|x| + x \geq 0$.

Soit x un réel : $x \geq 0$ ou $x < 0$.

Cas 1 : $x \geq 0$. $|x| = x$, donc $|x| + x = 2x \geq 0$.

Cas 2 : $x < 0$. $|x| = -x$, donc $|x| + x = 0$.

Conclusion. Dans tous les cas, $|x| + x \geq 0$.

À toi : Rédige une disjonction des cas

Rédige la preuve de : pour tout entier n, $n(n+1)(n+2)$ est multiple de 3. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Un entier s'écrit $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$, avec $k \in \mathbb{Z}$: trois cas.
Indice 2

Dans chaque cas, cherche lequel des trois facteurs est multiple de 3.

Indice 3

Point délicat : annonce pourquoi les trois cas couvrent tous les entiers.

Réponse

Soit n un entier. Le reste de sa division par 3 vaut 0, 1 ou 2 : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k$, $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$.

Cas 1 : $n = 3k$**.** Le facteur n est multiple de 3.

Cas 2 : $n = 3k+1$**.** Le facteur $n+2 = 3k+3 = 3(k+1)$ est multiple de 3.

Cas 3 : $n = 3k+2$**.** Le facteur $n+1 = 3k+3 = 3(k+1)$ est multiple de 3.

Conclusion. Dans tous les cas, un facteur est multiple de 3, donc le produit $n(n+1)(n+2)$ aussi.

Raisonnement par l'absurde

Supposer le contraire

Devine : Un plus grand entier ?

Pour montrer qu'il n'existe pas de plus grand entier naturel, on suppose qu'il en existe un, noté N. Que dire alors de $N+1$?

A. $N+1$ n'existe pas, car N est le plus grand.

Faux.

$N+1$ est un entier naturel, comme tout entier naturel augmenté de 1.

B. $N+1 = N$, car on ne peut pas dépasser N.

Faux.

$N+1 = N$ donnerait $1 = 0$: c'est faux.

C. C'est un entier naturel plus grand que N : impossible.

Juste.

Juste : $N+1 > N$ contredit le choix de N.

D. On ne peut rien en dire.

Faux.

On peut comparer : $N+1 > N$.

Correction

$N+1$ est un entier naturel, et $N+1 > N$. Cela contredit le fait que N est le plus grand.

La supposition mène à une contradiction : elle est fausse. Il n'existe donc pas de plus grand entier naturel.

Tu viens de raisonner **par l'absurde** : supposer le contraire, et aboutir à une impossibilité.

Pourquoi est-ce vrai ? Si $\overline{P}$ entraîne une proposition fausse, alors $\overline{P}$ ne peut pas être vraie. La preuve passe par la contraposée, déjà démontrée.

Le principe

Propriété : Principe du raisonnement par l'absurde

Soit P et Q deux propositions. Si l'implication $(\overline{P} \Rightarrow Q)$ est vraie et si Q est fausse, alors P est vraie.

En particulier, s'il existe une proposition S telle que l'implication $\big(\overline{P} \Rightarrow (S \text{ et } \overline{S})\big)$ soit vraie, c'est-à-dire si l'on déduit de $\overline{P}$ une **contradiction** $(S \text{ et } \overline{S})$, alors P est vraie.

Démonstration

Étape 1. D'après F05, l'implication $(\overline{P} \Rightarrow Q)$ a la valeur de vérité de sa contraposée $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{\overline{P}})$, donc de $(\overline{Q} \Rightarrow P)$ (F04). Cette implication est donc vraie.

Étape 2. Comme Q est fausse, $\overline{Q}$ est vraie (F01). L'implication $(\overline{Q} \Rightarrow P)$ est vraie et son hypothèse est vraie : sa conclusion P est vraie (F03).

Étape 3. Pour toute proposition S, l'une des propositions S, $\overline{S}$ est fausse (F01), donc $(S \text{ et } \overline{S})$ est fausse (F02). On applique les étapes 1 et 2 avec $Q = (S \text{ et } \overline{S})$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On suppose $\overline{P}$, on déduit, et l'on aboutit à une proposition fausse : P est alors vraie.

La preuve repose sur la **contraposée** : de « $\overline{P}$ entraîne Q », on passe à « $\overline{Q}$ entraîne P ».

Une contradiction $(S \text{ et } \overline{S})$ est toujours fausse : c'est la cible habituelle.

Vérifie : Une contradiction

Dans une preuve par l'absurde portant sur un entier n, laquelle de ces conclusions est une contradiction ?

A. n est pair et $n > 3$.
Faux.
Ces deux propositions peuvent être vraies ensemble, par exemple pour $n = 4$.

B. n^2 est pair.
Faux.
C'est une proposition ordinaire, vraie pour certains entiers.

C. n est impair et n^2 est impair.
Faux.

C'est possible, par exemple pour $n = 3$.

D. n est pair et n est impair.

Juste.

Juste : un entier n'est jamais pair et impair à la fois.

Correction

Une contradiction a la forme $(S \text{ et } \overline{S})$: elle est toujours fausse. Ici, S est « n est pair », et « n est impair » est sa négation.

Les autres propositions sont vraies pour certains entiers : elles ne contredisent rien.

Petit rappel. Un nombre est **rationnel** s'il s'écrit $\frac{p}{q}$, avec p et q entiers et $q \neq 0$.

On peut toujours simplifier une fraction jusqu'à ce que p et q n'aient plus de diviseur commun autre que 1. La fraction est alors **irréductible** : en particulier, p et q ne sont pas pairs tous les deux.

Exemple **: Exemple guidé : la racine carrée de 2**

Énoncé. $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Supposer. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. Comme $\sqrt{2} > 0$, on peut l'écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls. En simplifiant, on choisit $\frac{p}{q}$ irréductible.

Déduire. En élevant au carré, $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair, puis p est pair, d'après la propriété démontrée par contraposée.

Écrivons $p = 2k$, où $k \in \mathbb{N}$: $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$. De même, q est pair.

Contradiction. Ainsi p et q sont pairs tous les deux, alors que $\frac{p}{q}$ est irréductible. C'est absurde.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Rédiger par l'absurde

Méthode **: raisonner par l'absurde**

1. **Annoncer** : « Supposons par l'absurde que… », suivi de $\overline{P}$ écrite en clair.
2. **Déduire**, pas à pas, jusqu'à une impossibilité : une proposition fausse, ou une contradiction que tu nommes.
3. **Conclure** : « C'est absurde. Donc P est vraie. »

Trouve l'erreur : Une rédaction à corriger

Pour montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel, un élève écrit : « Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel. Alors $\sqrt{3}$ n'est pas une fraction. Donc $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel. » Quel est le défaut ?

A. Il n'annonce pas le raisonnement par l'absurde.

Faux.

L'annonce est bien là : « Supposons par l'absurde ».

B. Il suppose ce qu'il faut démontrer, et non son contraire.

Juste.

Juste : sa supposition est déjà la conclusion.

C. Il ne donne pas de valeur approchée de $\sqrt{3}$.

Faux.

Une valeur approchée ne dit rien de la nature d'un nombre.

D. Aucun : la rédaction est correcte.

Faux.

Sa supposition est la conclusion elle-même : il n'a rien démontré.

Correction

Par l'absurde, on suppose la **négation** de ce qu'on veut montrer : ici, « $\sqrt{3}$ est rationnel ».

L'élève suppose la conclusion, puis la répète : son raisonnement tourne en rond. Il faut écrire $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$, puis chercher une contradiction.

À toi : Rédige une preuve par l'absurde

D'après l'exemple, $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Rédige la preuve, par l'absurde, que $1 + \sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Suppose que $1 + \sqrt{2}$ est un rationnel, que tu nommes r.

Indice 2

Exprime $\sqrt{2}$ à l'aide de r.

Indice 3

Point délicat : nomme la contradiction avec ce que l'exemple a démontré.

Réponse

Supposons par l'absurde que $1 + \sqrt{2}$ est rationnel : il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $1 + \sqrt{2} = r$.

Alors $\sqrt{2} = r - 1$. Or la différence de deux rationnels est un rationnel : $\sqrt{2}$ serait rationnel. Cela contredit l'exemple.

Conclusion. C'est absurde. Donc $1 + \sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Raisonnement par récurrence

Des dominos

Devine : Des dominos

Une rangée infinie de dominos est numérotée 0, 1, 2, … Que faut-il savoir pour être sûr qu'ils tombent tous ?

A. Que chaque domino qui tombe fait tomber le suivant.

Faux.
Si personne ne pousse le premier, aucun ne tombe.

B. Que le domino numéro 0 tombe.

Faux.
Le premier peut tomber sans entraîner le deuxième, s'ils sont trop espacés.

C. Que les dix premiers dominos tombent.

Faux.
Dix chutes ne disent rien du domino numéro 1000.

D. Que le premier tombe, et que chacun fait tomber le suivant.

Juste.
Juste : le départ et la transmission, il faut les deux.

Correction
Il faut un départ et une transmission : le domino 0 tombe, et chaque domino fait tomber le suivant.

Alors le 0 fait tomber le 1, qui fait tomber le 2 : la chute gagne toute la rangée. Le raisonnement par récurrence suit ce schéma.

Regarde les sommes des premiers entiers :

- $1 = \dfrac{1 \times 2}{2}$;
- $1 + 2 = 3 = \dfrac{2 \times 3}{2}$;
- $1 + 2 + 3 = 6 = \dfrac{3 \times 4}{2}$.

Pour passer au rang suivant, on ajoute 4 : $6 + 4 = 10 = \dfrac{4 \times 5}{2}$.

Si la formule vaut à un rang, ajouter le terme suivant la donne au rang suivant. Ce sont les dominos, avec des nombres.

Soit $P(n)$ une propriété d'un entier n.

- L'**initialisation** vérifie $P(n_0)$: le premier domino tombe.
- L'**hérédité** montre que $P(n)$ entraîne $P(n+1)$: chacun pousse le suivant.

Pourquoi est-ce vrai ? S'il y avait un premier entier où P échoue, ce ne serait pas n_0, grâce à l'initialisation. L'entier d'avant vérifierait P, et l'hérédité rendrait P vraie au premier échec : c'est impossible.

La preuve rend cette idée rigoureuse, par l'absurde. Elle explique pourquoi la méthode marche : tu peux la relire après le premier exemple rédigé.

Le principe de récurrence

Théorème : Principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel et $P(n)$ une fonction propositionnelle de la variable entière $n \geq n_0$. On suppose :

- **initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
- **hérédité** : pour tout entier $n \geq n_0$, l'implication $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie.

Alors, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration

Étape 1. Raisonnons par l'absurde (F11) : supposons qu'il existe un entier $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ soit fausse (F08). Parmi les entiers $n \geq n_0$ tels que $P(n)$ soit fausse, il en existe un plus petit, noté m (propriété de $\mathbb{N}$, admise).

Étape 2. Par l'initialisation, $P(n_0)$ est vraie, donc $m \neq n_0$. Comme $m \geq n_0$, on a $m \geq n_0 + 1$, donc $m - 1$ est un entier et $m - 1 \geq n_0$.

Étape 3. Comme $m - 1 \geq n_0$, $m - 1 < m$ et que m est le plus petit entier $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ soit fausse, $P(m-1)$ n'est pas fausse, donc elle est vraie (F01). Par l'hérédité appliquée à $n = m - 1$, $P(m)$ est vraie (F03). Or $P(m)$ est fausse, par définition de m : c'est une contradiction. Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque : ce qui est admis

La preuve utilise une propriété des entiers naturels : dès qu'un entier naturel au moins vérifie une propriété, il en existe un plus petit qui la vérifie. Cette propriété de $\mathbb{N}$ est admise.

Elle et le principe de récurrence expriment au fond la même chose sur $\mathbb{N}$: la preuve montre comment déduire le principe de récurrence de cette propriété.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On suppose qu'un entier met P en défaut, et l'on prend le **plus petit**, m.

- L'initialisation empêche $m = n_0$.

- Le choix du plus petit rend $P(m-1)$ vraie.
- L'hérédité rend alors $P(m)$ vraie : c'est une contradiction.

Les deux hypothèses servent : ni l'initialisation, ni l'hérédité ne suffit seule.

Vérifie : À quoi sert l'initialisation ?

Dans la preuve, m est le plus petit entier $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ soit fausse. À quoi sert l'initialisation ?

A. À montrer que $m \neq n_0$, donc que $m - 1 \geq n_0$.
Juste.
Juste : comme $P(n_0)$ est vraie, m dépasse n_0, et $m-1$ reste dans le domaine.

B. À montrer que l'entier m existe.
Faux.
L'existence de m vient de la propriété admise de $\mathbb{N}$.

C. À montrer que $P(m-1)$ entraîne $P(m)$.
Faux.
C'est le rôle de l'hérédité, appliquée à $n = m-1$.

D. À rien : l'hérédité suffit.
Faux.
Sans $P(n_0)$, l'entier m pourrait valoir n_0, et $m-1$ sortirait du domaine.

Correction
L'initialisation donne $P(n_0)$ vraie, donc $m \neq n_0$. Comme $m \geq n_0$, on obtient $m \geq n_0 + 1$, soit $m - 1 \geq n_0$.

L'hérédité peut alors s'appliquer à $n = m - 1$.

Exemple : Contre-exemple : une hérédité sans initialisation

Soit $P(n)$: « 9 divise $10^n + 1$ ».

L'hérédité est vraie. Si $10^n + 1 = 9a$ avec a entier, alors

$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 1 &= 10(10^n + 1) - 9 \\ &= 9(10a - 1). \end{aligned}$$

L'initialisation échoue. $P(0)$ est fausse : $10^0 + 1 = 2$. Et $P(1)$ aussi : 11 n'est pas multiple de 9.

Sans initialisation, l'hérédité seule ne prouve rien.

Rédiger une récurrence

Méthode : rédiger une récurrence

1. **Énoncer** la propriété $P(n)$ et le rang de départ n_0.
2. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$ par un calcul.
3. **Hérédité** : « Soit $n \geq n_0$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie ; montrons que $P(n+1)$ est vraie. » Utilise $P(n)$ au bon moment.
4. **Conclusion** : « D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. »

Exemple : Exemple guidé : une somme d'entiers

Énoncé. Pour tout entier $n \geq 1$, $P(n)$: « $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$: le membre de gauche vaut 1, et $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, puis en factorisant par $n+1$:

$$\begin{aligned} &1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

C'est $P(n+1)$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Exemple : Exemple guidé : une inégalité à partir du rang 3

Énoncé. Pour tout entier $n \geq 3$, $P(n)$: « $2^n \geq 2n + 1$ ». Pour $n = 2$, elle est fausse : $4 < 5$.

Initialisation. $2^3 = 8$ et $2 \times 3 + 1 = 7$: $P(3)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 3$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, multipliée par $2 > 0$:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &\geq 2(2n+1) \\ &= 4n + 2. \end{aligned}$$

Or $4n + 2 \geq 2n + 3$, car $2n \geq 1$. Donc $2^{n+1} \geq 2(n+1) + 1$: c'est $P(n+1)$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 3$.

Pièges et rédaction

Attention : l'hypothèse de récurrence porte sur un seul entier

✗ « Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie pour tout entier n. »

✓ « Soit $n \geq n_0$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. » On suppose $P(n)$ pour **un** entier n fixé. Supposer « pour tout n », c'est supposer ce qu'on veut démontrer.

Et l'initialisation reste obligatoire, comme le montre le contre-exemple de $10^n + 1$.

Vérifie : Le bon découpage

On veut montrer par récurrence que 3 divise $4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans l'hérédité, quelle égalité fait apparaître $4^n - 1$?

A. $4^{n+1} - 1 = (4^n - 1) + 4$

Faux.
Le membre de droite vaut $4^n + 3$, et non $4^{n+1} - 1$.

B. $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$

Juste.
Juste : $4 \times 4^n - 4 + 3 = 4^{n+1} - 1$.

C. $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 4$

Faux.
Le membre de droite vaut $4^{n+1} - 4$: il manque 3.

D. $4^{n+1} - 1 = (4^n - 1)^2$

Faux.
Pour $n = 1$: $4^2 - 1 = 15$, mais $(4 - 1)^2 = 9$.

Correction
On vérifie l'égalité : $4(4^n - 1) + 3 = 4^{n+1} - 4 + 3 = 4^{n+1} - 1$.

Si $4^n - 1 = 3a$, avec a entier, alors $4^{n+1} - 1 = 12a + 3 = 3(4a + 1)$.

Avec l'initialisation $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$, la récurrence est complète.

À toi : Rédige une récurrence

Rédige la preuve par récurrence de : pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris $P(n)$, puis vérifie l'initialisation pour $n = 1$.
Indice 2
Dans l'hérédité, le terme suivant de la somme est $2(n + 1) - 1 = 2n + 1$.
Indice 3

Point délicat : remplace la somme jusqu'à $2n-1$ par n^2, grâce à $P(n)$.

Réponse
Soit $P(n)$: « $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$ ».

Initialisation. Pour $n=1$: le membre de gauche vaut 1, et $1^2=1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} &1+3+\cdots+(2n-1) \\ &\quad +(2n+1) \\ &=n^2+2n+1 \\ &=(n+1)^2. \end{aligned}$$

C'est $P(n+1)$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Remarque : Coin devoir : la récurrence rédigée

En devoir, une récurrence se reconnaît à sa forme. Écris les trois titres : **Initialisation**, **Hérédité**, **Conclusion**.

Dans l'hérédité, signale l'endroit où tu utilises $P(n)$: « d'après l'hypothèse de récurrence ».

Termine par la phrase « D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ ». Cette forme te servira jusqu'à l'examen de 2BAC SM.

Choisir son raisonnement

À retenir : quel raisonnement pour quel énoncé

- Nier : « et » devient « ou », « ou » devient « et », $\forall$ devient $\exists$, $\exists$ devient $\forall$. La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \text{ et } \overline{Q})$.
- « Si…, alors… » : preuve directe, ou contraposée si la négation de la conclusion se manie mieux.
- « …n'est pas… », « il n'existe pas… » : raisonnement par l'absurde.
- Un énoncé qui se découpe en cas : disjonction des cas exhaustifs.
- « …si et seulement si… » : deux sens, ou une chaîne de pas réversibles.
- « Pour tout entier $n \geq n_0$ » : récurrence.
- Pour réfuter un « pour tout » : un contre-exemple, vérifié par le calcul.

Le mot du prof. Tu sais maintenant lire exactement un énoncé, le nier, et choisir le raisonnement qui le démontre.

Ces gestes reviendront dans chaque chapitre de l'année. Au chapitre suivant, tu les emploieras dès les premières preuves.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Notions de logique » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)