BURHAN

Résumé : Limite d'une fonction numérique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limite-d-une-fonction/resume

Chapitre	Semestre
Limite d'une fonction numérique	Semestre 1

Limite finie en un point

Définition : Limite finie en un point

Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a : il existe un réel $r > 0$ tel que $]a-r, a[\cup]a, a+r[\subset D_f$. Soit ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite** ℓ **en** a, ou que $f(x)$ **tend vers** ℓ **quand** x **tend vers** a, et on écrit $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, si :

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f, \\ &\big(0 < |x-a| < \alpha \\ &\qquad \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\big). \end{aligned}$$

Autrement dit, $f(x)$ est aussi proche de ℓ qu'on le veut dès que x, distinct de a, est assez proche de a. Le réel α est choisi **après** ε : il dépend de ε. La valeur $f(a)$, si elle existe, ne joue aucun rôle.

À retenir : Lire la définition

La tolérance ε est donnée d'abord ; l'écart α vient ensuite et dépend de ε.

La condition $0 < |x-a| < \alpha$ exclut $x = a$: la valeur $f(a)$ n'intervient jamais. Enfin, $|x-a| < \alpha$ signifie $a - \alpha < x < a + \alpha$.

Propriété : Unicité de la limite

Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a. Si f admet une limite finie en a, cette limite est **unique** : si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to a} f(x) = \ell'$, alors $\ell = \ell'$. Il en est de même pour une limite finie à droite ou à gauche en a.

Propriété : Limites de référence en un point : constantes et puissances

- Pour tous réels a et c : $\lim_{x \to a} c = c$ (fonction constante).
- Pour tout entier $n \geq 1$: $\lim_{x \to 0} x^n = 0$.
- $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

Méthode : démontrer une limite par la définition

1. **Écris** « Soit $\varepsilon > 0$ » : la tolérance est quelconque.
2. **Majore** $|f(x) - \ell|$ par $k|x - a|$, avec k réel fixe. Si besoin, impose d'abord $|x - a| < 1$.
3. **Choisis** l'écart : α est le plus petit des réels 1 et $\dfrac{\varepsilon}{k}$.
4. **Conclus** : pour tout $x \in D_f$ tel que $0 < |x - a| < \alpha$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
5. **À l'infini**, cherche de même un seuil B : la condition $x > B$ remplace $0 < |x - a| < \alpha$.

Exemple

Énoncé. Montre par la définition que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

Majoration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout réel x :

$$|x^2 - 9| = |x - 3| \times |x + 3|.$$

Si $|x - 3| < 1$, alors $2 < x < 4$, donc $|x + 3| < 7$.

Choix. Soit α le plus petit des réels 1 et $\dfrac{\varepsilon}{7}$.

Conclusion. Si $0 < |x - 3| < \alpha$, alors $|x^2 - 9| < 7\alpha \leq \varepsilon$. La limite vaut bien 9.

Se ramener en 0

Propriété : Se ramener à une limite en 0

Soit a et ℓ deux réels, et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a.

1. $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{h \to 0} f(a + h) = \ell$.
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x \to a} \big(f(x) - \ell\big) = 0$, si et seulement si $\lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$.
3. Soit g une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut-être en 0, et c un réel non nul. Si $\lim_{t \to 0} g(t) = \ell$, alors $\lim_{x \to 0} g(cx) = \ell$.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$.

Changement de variable. Pose $x = 1 + h$, avec $h \neq 0$. On développe :

$$\begin{aligned}&(1 + h)^4 - 1\\ &= 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4.\end{aligned}$$

Le quotient vaut donc $4 + 6h + 4h^2 + h^3$.

Limite. Par la limite d'un polynôme en 0, cette expression tend vers 4 quand h tend vers 0. En se ramenant en 0 :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 4.$$

À retenir : Deux réflexes pour se ramener en 0

Pour montrer que $f(x)$ tend vers ℓ, il suffit de montrer que l'écart $|f(x) - \ell|$ tend vers 0. Ce réflexe prépare les encadrements.

Autre outil : si $g(t)$ tend vers ℓ quand t tend vers 0, alors $g(cx)$ aussi, pour tout réel $c \neq 0$.

Limite infinie ; limites à droite et à gauche

Définition : Limite infinie en un point

Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a.

On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si :

$$\begin{aligned} &\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f, \\ &\big(0 < |x - a| < \alpha \\ &\qquad \Rightarrow f(x) > A\big). \end{aligned}$$

On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si :

$$\begin{aligned} &\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f, \\ &\big(0 < |x - a| < \alpha \\ &\qquad \Rightarrow f(x) < -A\big). \end{aligned}$$

Autrement dit, $f(x)$ dépasse n'importe quel seuil A (pour $-\infty$: passe sous $-A$) dès que x, distinct de a, est assez proche de a. Une limite infinie n'est pas un réel.

Définition : Limite à droite, limite à gauche

Soit a et ℓ deux réels.

Soit f une fonction telle que $]a, a + r[\subset D_f$ pour un réel $r > 0$. On dit que f admet ℓ pour **limite à droite** en a, et on écrit $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$, si :

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f, \\ &\big(a < x < a + \alpha \\ &\qquad \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\big). \end{aligned}$$

Soit f une fonction telle que $]a - r, a[\subset D_f$ pour un réel $r > 0$. La **limite à gauche**, notée $\lim_{x \to a^-} f(x)$, se définit de même, la condition $a < x < a + \alpha$ étant remplacée par $a - \alpha < x < a$.

Les limites infinies à droite et à gauche se définissent de même, la condition $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ étant remplacée, pour tout $A>0$, par $f(x)>A$ (limite $+\infty$) ou par $f(x)<-A$ (limite $-\infty$).

Propriété : Limite et limites à droite et à gauche

Soit a et ℓ deux réels, et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a. Alors $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ équivaut à :

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=\ell.$$

Il en est de même pour une limite $+\infty$ ou $-\infty$. En particulier, si les limites à droite et à gauche en a sont deux réels différents, f n'admet pas de limite finie en a.

Exemple

Énoncé. Étudie la limite de $E(x)$ quand x tend vers -1.

À droite. Si $-1<x<0$, alors $E(x)=-1$. Par la limite d'une fonction constante, $\lim_{x\to -1^+} E(x)=-1$.

À gauche. Si $-2<x<-1$, alors $E(x)=-2$. De même, $\lim_{x\to -1^-} E(x)=-2$.

Conclusion. Les deux limites diffèrent : la partie entière n'a pas de limite en -1.

Propriété : Limites de référence en 0, à droite et à gauche

- $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ et $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.
- $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$; la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ n'admet donc pas de limite en 0.
- Pour tout entier $n\geq 1$: $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$; $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^n}$ vaut $+\infty$ si n est pair et $-\infty$ si n est impair. En particulier, $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

Méthode : quand le dénominateur tend vers 0

1. **Calcule** la limite du numérateur. Si elle est nulle, c'est la forme $\dfrac{0}{0}$: factorise d'abord. Sinon, note $\ell\neq 0$ cette limite.
2. **Étudie le signe** du dénominateur à droite et à gauche de a.
3. **Conclus** de chaque côté par la règle du quotient : le signe vient de ℓ et du dénominateur.
4. **Compare** : si les deux limites diffèrent, la fonction n'a pas de limite en a.

Exemple

Énoncé. Étudie $\dfrac{1-2x}{x-3}$ quand x tend vers 3.

Numérateur. Par la limite d'un polynôme en un point, $1-2x$ tend vers -5.

Dénominateur. Le réel $x-3$ tend vers 0. Il est strictement positif si $x>3$, strictement négatif si $x<3$.

Conclusion. Par la règle du quotient, on obtient $-\infty$ à droite de 3 et $+\infty$ à gauche. Il n'y a donc pas de limite en 3.

Attention : Le signe du dénominateur décide

Ne conclus jamais à une limite infinie sans son signe.

Près de -2, $\dfrac{1}{x+2}$ tend vers $+\infty$ à droite et vers $-\infty$ à gauche. En revanche, $\dfrac{1}{(x+2)^2}$ tend vers $+\infty$ des deux côtés : son dénominateur reste positif.

Écris toujours le signe du dénominateur avant d'appliquer la règle du quotient.

Limites en +∞ et en −∞

Définition : Limite finie en +∞ et en −∞

Soit ℓ un réel.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]b,+\infty[$. On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$, et on écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, si :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists B>0,\ \forall x\in D_f,\\ \big(x>B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon\big).$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty,b[$. On écrit $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ si :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists B>0,\ \forall x\in D_f,\\ \big(x<-B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon\big).$$

Autrement dit, $f(x)$ est aussi proche de ℓ qu'on le veut dès que x est assez grand (pour $-\infty$: dès que $-x$ est assez grand).

Définition : Limite infinie en +∞ et en −∞

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]b,+\infty[$.

On écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ si :

$$\forall A>0,\ \exists B>0,\ \forall x\in D_f,\\ \big(x>B \Rightarrow f(x)>A\big).$$

On écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ si :

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in D_f,$$
$$\big(x > B \Rightarrow f(x) < -A\big).$$

Pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, b[$, les limites infinies en $-\infty$ se définissent de même, la condition $x > B$ étant remplacée par $x < -B$.

Exemple

Énoncé. Montre par la définition que $\lim_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)=3$.

Rédaction. Soit $\varepsilon > 0$. Pose $B = \dfrac{2}{\varepsilon}$. Pour tout $x > B$, on a $x > 0$ et :

$$\left|3+\frac{2}{x}-3\right| = \frac{2}{x}$$
$$< \frac{2}{B} = \varepsilon.$$

Conclusion. Le seuil B convient, quel que soit ε : la limite vaut 3.

Propriété : Limites de référence à l'infini

Pour tout réel c : $\lim_{x\to+\infty} c = c$ et $\lim_{x\to-\infty} c = c$. Pour tout entier $n \geq 1$:

- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^n$ vaut $+\infty$ si n est pair et $-\infty$ si n est impair ;
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$;
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

À retenir : Puissances en −∞

En $-\infty$, regarde la parité de l'exposant. Une puissance paire tend vers $+\infty$: $\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$. Une puissance impaire tend vers $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

Les inverses tendent vers 0 ; par produit, $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0$.

Attention : Croissante ne veut pas dire « tend vers +∞ »

La fonction $x \mapsto 3 - \dfrac{1}{x^2}$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Pourtant, par la limite de référence de $\dfrac{1}{x^2}$ et par somme, elle tend vers 3 en $+\infty$.

Une fonction croissante peut rester sous une valeur fixe. Une limite se démontre ; elle ne se lit pas sur le sens de variation.

Opérations ; formes indéterminées

Propriété : Opérations sur les limites finies

Soit f et g deux fonctions, et ℓ, ℓ', k trois réels. On suppose $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$, les deux limites étant prises au même endroit : en un réel a, à droite ou à gauche en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$. Alors, au même endroit :

- $\lim(f+g) = \ell + \ell'$ et $\lim(kf) = k\ell$;
- $\lim(fg) = \ell\ell'$;
- si $\ell' \neq 0$: $\lim \dfrac{f}{g} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Propriété : Opérations et limites infinies ; formes indéterminées

Les limites sont prises au même endroit : a, a^+, a^-, $+\infty$ ou $-\infty$; ℓ et ℓ' désignent des réels.

- **Somme.** Si $\lim f = \ell$ ou $\lim f = +\infty$, et si $\lim g = +\infty$, alors $\lim(f+g) = +\infty$. De même en remplaçant partout $+\infty$ par $-\infty$.
- **Produit.** Si $\lim f$ est un réel non nul ou est infinie, et si $\lim g$ est infinie, alors $\lim(fg)$ est infinie, de signe donné par la règle des signes d'un produit.
- **Quotient.** Si $\lim f = \ell$ et si $\lim g$ est infinie, alors $\lim \dfrac{f}{g} = 0$. Si $\lim f$ est infinie et $\lim g = \ell'$ avec $\ell' \neq 0$, alors $\lim \dfrac{f}{g}$ est infinie. Si $\lim f$ est un réel non nul ou est infinie, si $\lim g = 0$ et si $g(x)$ garde un signe strict constant près de l'endroit considéré, alors $\lim \dfrac{f}{g}$ est infinie. Le signe suit la règle des signes d'un quotient.
- **Formes indéterminées.** Dans les cas « $(+\infty) + (-\infty)$ », « $0 \times (+\infty)$ », « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » et « $\dfrac{0}{0}$ », et leurs variantes de signe, ces règles ne permettent pas de conclure : il faut transformer l'écriture.

Somme	Produit
$(+\infty) + (-\infty)$	$0 \times (+\infty)$
Quotient de deux limites infinies	**Quotient de deux limites nulles**
$\dfrac{+\infty}{+\infty}$	$\dfrac{0}{0}$

À retenir : Nommer la règle à chaque calcul

Rédige chaque calcul en nommant la règle : « par somme », « par produit », « par la règle du quotient ». Nomme aussi la limite de référence employée. Si aucune règle ne s'applique, écris la forme indéterminée obtenue. Ensuite seulement, transforme l'écriture.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x \to 0^+} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right)$.

Rédaction. Par les limites de référence en 0 à droite, $\sqrt{x}$ tend vers 0 et $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$. Par produit par -1, le terme $-\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$. Par somme, la limite cherchée vaut $-\infty$.

Remarque. Ce n'est pas une forme indéterminée : la règle de la somme conclut.

Attention : Une forme indéterminée n'est pas un résultat

En $+\infty$, $x - \sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ sont deux formes $(+\infty) + (-\infty)$.

La première s'écrit $\sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1)$: par produit, elle tend vers $+\infty$. La seconde vaut $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$: par la règle du quotient, elle tend vers 0.

Une même forme peut donc donner des limites différentes.

Polynômes et fonctions rationnelles

Propriété : Limite d'un polynôme, d'une fonction rationnelle en un point

Soit a un réel.

- Pour toute fonction polynôme P : $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$. En particulier, $\lim_{x \to a} x = a$.
- Soit P et Q deux fonctions polynômes telles que $Q(a) \neq 0$. Alors $\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$.

Propriété : Polynômes et fonctions rationnelles à l'infini

Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ deux polynômes, où n et m sont des entiers naturels, $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. En $+\infty$, et de même en $-\infty$:

- $\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$: un polynôme a la limite de son **terme de plus haut degré** ;
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$: une fonction rationnelle a la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Méthode : lever une forme 0/0 en un point

1. **Vérifie** que le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 en a : c'est la forme $\frac{0}{0}$.
2. **Factorise** par $x - a$ chaque polynôme qui s'annule en a : racines d'un trinôme, ou division par $x - a$.
3. **Simplifie** par $x - a$: c'est permis, car $x \neq a$.

4. **Calcule** la limite de la fonction rationnelle obtenue, par la limite en un point.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$.

Forme. Le numérateur et le dénominateur valent 0 en 2 : c'est la forme $\dfrac{0}{0}$.

Factorisation. On a :

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3),$$
$$x^2-4=(x-2)(x+2).$$

Pour $x\neq 2$ et $x\neq -2$, le quotient vaut $\dfrac{x+3}{x+2}$.

Limite. Le dénominateur vaut $4\neq 0$ en 2. Par la limite d'une fonction rationnelle en un point, on obtient $\dfrac{5}{4}$.

Méthode **: polynômes et fonctions rationnelles à l'infini**

1. **Repère** le terme de plus haut degré de chaque polynôme.
2. **Garde** ce seul terme pour un polynôme ; pour un quotient, garde le quotient des deux termes dominants.
3. **Simplifie** la fraction obtenue, puis conclus par les limites de référence.
4. **Réserve** cette règle à $+\infty$ et à $-\infty$.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{1-2x^3}{x^2+4}$.

Rédaction. Par la règle des termes de plus haut degré, cette limite est celle de $\dfrac{-2x^3}{x^2}=-2x$. Or $\lim_{x\to -\infty}x=-\infty$; par produit par -2, $-2x$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. La limite cherchée vaut $+\infty$.

Attention **: En un réel, pas de terme dominant**

La règle du terme de plus haut degré ne vaut qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$. En 1, par la limite d'un polynôme en un point, x^3+2x tend vers $1+2=3$. Garder seulement x^3 donnerait 1 : c'est faux.

Racine carrée ; quantité conjuguée

Propriété : Limite de la racine carrée d'une fonction

Soit f une fonction positive sur un ensemble $]a-r, a[\cup]a, a+r[$, avec $r > 0$.

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, alors $\ell \geq 0$ et $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$.
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Ces résultats restent vrais à droite ou à gauche en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$, f étant positive sur l'ensemble correspondant.

Méthode : utiliser la quantité conjuguée

1. **Repère** une différence $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, ou $\sqrt{A} - C$, qui crée une forme indéterminée.
2. **Multiplie** et divise par la quantité conjuguée $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, ou $\sqrt{A} + C$.
3. **Développe** : $\left(\sqrt{A} - \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right) = A - B$, sans racine.
4. **Termine** le calcul : règles d'opérations, puis propriété de la racine carrée d'une fonction.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

Forme. Par la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{x}$ tend vers $\sqrt{4} = 2$: c'est la forme $\dfrac{0}{0}$.

Conjuguée. Pour $x \geq 0$ et $x \neq 4$, $(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) = x - 4$, donc :

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}.$$

Limite. Par somme, puis par la règle du quotient, on obtient $\dfrac{1}{4}$.

À retenir : Vérifier le signe sous la racine

La propriété de la racine carrée suppose la fonction positive près de l'endroit étudié. Par exemple, $\sqrt{x - 2}$ n'existe que pour $x \geq 2$. En 2, on étudie donc seulement la limite à droite : elle vaut 0.

Limites trigonométriques

Propriété : Limite de référence : sin x / x en 0

Le réel x désignant une mesure d'angle en radians :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Propriété : Limites des fonctions sinus et cosinus

- $\lim_{x\to 0}\sin x=0$ et $\lim_{x\to 0}\cos x=1$.
- Pour tout réel a : $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$ et $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$.

Propriété : Limites trigonométriques usuelles

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Pour tout réel c non nul : $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(cx)}{cx}=1$, donc $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(cx)}{x}=c$.

Addition (sinus)
$$\sin(a+h)=\sin a\cos h+\cos a\sin h$$

Addition (cosinus)
$$\cos(a+h)=\cos a\cos h-\sin a\sin h$$

Duplication
$$\sin(2x)=2\sin x\cos x$$

Écart à 1 du cosinus
$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$$

Autour de pi (sinus)
$$\sin(\pi+h)=-\sin h$$

Autour de pi (cosinus)
$$\cos(\pi+h)=-\cos h$$

Méthode : calculer une limite trigonométrique

1. **En** 0, fais apparaître $\dfrac{\sin(cx)}{cx}$, $\dfrac{\tan x}{x}$ ou $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Ajoute le facteur absent, en multipliant et en divisant par lui.
2. **En un réel** $a\neq 0$, pose $x=a+h$, puis développe par les formules d'addition.
3. **Conclus** par produit ou par quotient, en nommant chaque limite de référence.
4. **Travaille** toujours en radians.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{2x}$ et $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

Premier calcul. Pour $x\neq 0$:

$$\frac{\sin(5x)}{2x} = \frac{5}{2} \times \frac{\sin(5x)}{5x}.$$

Par la limite usuelle de $\frac{\sin(cx)}{cx}$ avec $c = 5$, et par produit, on obtient $\frac{5}{2}$.

Second calcul. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{1 - \cos x}{x} = x \times \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Par la limite usuelle de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ et par produit, on obtient $0 \times \frac{1}{2} = 0$.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$.

Changement de variable. Pose $x = \pi + h$, avec $h \neq 0$. Par la formule d'addition, $\sin(\pi + h) = -\sin h$. Le quotient vaut donc $-\frac{\sin h}{h}$.

Limite. Par la limite de référence de $\frac{\sin h}{h}$ en 0, et par produit par -1, on obtient -1.

Attention : Le quotient sin x / x ne tend vers 1 qu'en 0

La limite de $\frac{\sin x}{x}$ vaut 1 en 0 seulement.

En $\frac{\pi}{2}$, par la règle du quotient, elle vaut $\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$. En $+\infty$, elle vaut 0, par comparaison avec $\frac{1}{x}$.

Enfin, les limites usuelles supposent des mesures en radians.

Comparaison, encadrement, ordre

Propriété : Limite par comparaison ; encadrement

Soit a et ℓ deux réels, et f, u, v trois fonctions définies sur un même ensemble $]a - r, a[\cup]a, a + r[$, avec $r > 0$.

1. Si $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ pour tout x de cet ensemble, et si $\lim_{x \to a} u(x) = 0$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.
2. Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ pour tout x de cet ensemble, et si $\lim_{x \to a} u(x) = \lim_{x \to a} v(x) = \ell$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Ces résultats restent vrais à droite ou à gauche en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$, l'inégalité étant supposée sur un intervalle $]a, a + r[$, $]a - r, a[$, $]b, +\infty[$ ou $]-\infty, b[$.

Propriété : Comparaison et limites infinies

Soit f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle $]b, +\infty[$.

1. Si $f(x) \geq u(x)$ pour tout $x > b$, et si $\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Si $f(x) \leq v(x)$ pour tout $x > b$, et si $\lim_{x \to +\infty} v(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Ces résultats restent vrais en $-\infty$, en un réel a, à droite ou à gauche en a, l'inégalité étant supposée sur l'ensemble correspondant.

Méthode : comparer ou encadrer

1. **Pars** d'inégalités connues : $-1 \leq \sin t \leq 1$, $-1 \leq \cos t \leq 1$, $x - 1 < E(x) \leq x$.
2. **Limite finie** : majore $|f(x) - \ell|$ par une fonction de limite 0, ou encadre $f(x)$ entre deux fonctions de même limite.
3. **Limite infinie** : minore $f(x)$ par une fonction de limite $+\infty$, ou majore-la par une fonction de limite $-\infty$.
4. **Précise** l'intervalle où l'inégalité est vraie.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

Majoration. Pour tout $x > 0$, $|\cos x| \leq 1$, donc :

$$\left| \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - 0 \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Conclusion. Par la limite de référence, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 en $+\infty$. Par comparaison, la limite cherchée vaut 0.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + \cos x)$.

Minoration. Pour tout réel x, $\cos x \geq -1$, donc :

$$x^2 + \cos x \geq x^2 - 1.$$

Conclusion. Par la limite d'un polynôme à l'infini, $x^2 - 1$ tend vers $+\infty$. Par comparaison, la limite cherchée vaut $+\infty$.

Propriété : Limites et ordre : passage à la limite dans une inégalité

Soit a un réel, et f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $]a - r, a[\cup]a, a + r[$, avec $r > 0$, telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de cet ensemble. Si f et g ont en a des limites finies ℓ et ℓ', alors $\ell \leq \ell'$.

En particulier, si $g(x) \geq 0$ pour tout x de cet ensemble et si $\lim_{x \to a} g(x) = \ell'$, alors $\ell' \geq 0$. Ces résultats restent vrais à droite ou à gauche en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Attention : Une inégalité stricte devient large

Pour tout $x > 0$, $\dfrac{x}{x+1} < 1$. Pourtant, par la règle des termes de plus haut degré, $\dfrac{x}{x+1}$ tend vers 1 en $+\infty$.

En passant à la limite, une inégalité stricte donne seulement une inégalité large : la limite $\ell = 1$ vérifie seulement $\ell \leq 1$.

Quelle méthode pour quelle forme

Méthode : Quelle méthode pour quelle forme

Repère la forme obtenue, puis choisis ton outil.

Forme rencontrée	Méthode à essayer
polynôme, ou quotient dont le dénominateur ne s'annule pas en a	valeur en a
réel non nul divisé par une limite nulle	signe du dénominateur à droite et à gauche, règle du quotient
$\dfrac{0}{0}$ avec des polynômes	factorisation par $x - a$, simplification
$\dfrac{0}{0}$ ou $(+\infty) + (-\infty)$ avec une racine	quantité conjuguée
$\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ou $(+\infty) + (-\infty)$ avec des polynômes, à l'infini	termes de plus haut degré
$\sin$, $\cos$, $\tan$ en 0	faire apparaître une limite usuelle
$\sin$, $\cos$ en un réel $a \neq 0$	poser $x = a + h$
$\sin t$, $\cos t$ ou $E(x)$ dans l'expression	encadrement ou comparaison
limite à démontrer par la définition	« Soit $\varepsilon > 0$ », majoration, choix de α ou de B

À retenir : Rédiger en devoir

En devoir, justifie chaque limite par la règle employée : « par somme », « par produit », « par la règle du quotient », « par encadrement ». Cite la limite de référence utilisée.

Dans une preuve par la définition, écris « Soit $\varepsilon > 0$ » avant tout calcul. Annonce un raisonnement par l'absurde. Termine par une phrase de conclusion.