BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Niveau examen	5

Exercice 1 — 5 pts

Étude des limites d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$.

1. — 0,75 pts

Déterminer D_f. Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$.

INDICE

Outil : factorise les deux trinômes. **Début :** 2 est racine de chacun d'eux.

2. — 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to 2} f(x)$.

INDICE

Outil : l'écriture simplifiée de la question 1.

3. — 1 pts

Calculer $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to -1^-} f(x)$. La fonction f admet-elle une limite en -1 ?

INDICE

Outil : limite du numérateur, signe du dénominateur, règle du quotient.

4. — 0,75 pts

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : la règle des termes de plus haut degré.

5. — 1 pts

Montrer que, pour tout $x > 2$, $|f(x) - 1| < \dfrac{2}{x}$.

INDICE

Outil : calcule $f(x) - 1$ à partir de l'écriture de la question 1.

6. — 0,75 pts

En déduire, à l'aide de la définition, que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$: pour $\varepsilon > 0$ donné, proposer un seuil B.

Exercice 2 — 5 pts

Une fonction trigonométrique en 0, en π et en +∞

Les mesures sont en radians. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{\sin(2x) - 2\sin x}{x^3}.$$

1. — 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $\sin(2x) - 2\sin x = -2\sin x\,(1 - \cos x)$.

INDICE

Outil : la formule de duplication de $\sin(2x)$.

2. — 1,25 pts

En déduire que $\lim_{x\to 0} g(x) = -1$.

INDICE

Outil : écris $g(x)$ comme un produit de $\dfrac{\sin x}{x}$ et de $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. **Point délicat :** $x^3 = x \times x^2$.

3. — 0,75 pts

Calculer $\lim_{x\to \pi} g(x)$.

INDICE

Outil : les limites de sinus et cosinus en un réel, puis la règle du quotient.

4. — 1 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $|g(x)| \le \dfrac{4}{x^3}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

INDICE

Outil : $|\sin x| \le 1$ et $0 \le 1 - \cos x \le 2$, puis la limite par comparaison.

5. — 1 pts

Pour $x \neq 0$, on pose $k(x) = x^3 g(x) + x^2$. Montrer que $k(x) \ge x^2 - 4$, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} k(x)$.

Exercice 3 — 5 pts

Une racine carrée en −∞, en +∞ et en 0

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - x$.

1. — 0,5 pts

Montrer que $D_f = \mathbb{R}$.

INDICE

Outil : la forme canonique de $x^2 + 2x + 4$.

2. — 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : la limite de la racine carrée d'une fonction, puis la règle de la somme.

3. — 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - 1 = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 1}$.

INDICE

Outil : la quantité conjuguée de $\sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x + 1)$. **Point délicat :** justifie que le dénominateur ne s'annule pas.

4. — 1 pts

En déduire que, pour tout $x > 0$, $0 < f(x) - 1 < \dfrac{3}{2x}$.

INDICE

Outil : minore le dénominateur de la question 3, à l'aide de $\sqrt{x^2 + 2x + 4} > x + 1$.

5. — 0,75 pts

En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

6. — 1 pts

Calculer $f(0)$, puis $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 2}{x}$.

INDICE

Outil : écris $\dfrac{f(x) - 2}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - 2}{x} - 1$, puis utilise la quantité conjuguée.

Exercice 4 5 pts

Deux fonctions trigonométriques à droite et à gauche de π/2

Les mesures sont en radians. On note $I = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ et, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2},$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

1. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel h, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \cos h$. En déduire que, pour tout réel $h \neq 0$, $f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \frac{1 - \cos h}{h^2}$.

INDICE

Outil : la formule d'addition de $\sin(a + b)$, avec $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ et $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

2. 1 pts

En déduire $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$.

INDICE

Outil : se ramener à une limite en 0 en posant $x = \frac{\pi}{2} + h$, puis une limite trigonométrique usuelle.

3. 1 pts

Pour $x \in I$, on pose $k(x) = \frac{1 - \sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}$. Calculer $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} k(x)$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} k(x)$.

INDICE

Outil : écris $k(x) = f(x) \times \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}$, puis utilise la question 2, la règle du quotient et la règle du produit.

4. 1,25 pts

Montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$. Montrer ensuite que $g(x) = \sqrt{f(x)}$ si $x > \frac{\pi}{2}$, et que $g(x) = -\sqrt{f(x)}$ si $x < \frac{\pi}{2}$.

INDICE

Outil : $\sin x \leq 1$, et, pour tout réel t, $\sqrt{t^2} = |t|$.

5. 1 pts

En déduire $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} g(x)$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x)$. La fonction g admet-elle une limite finie en $\frac{\pi}{2}$?

Exercice 5 5 pts

Une fonction connue par un encadrement, en 1 et en +∞

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont on ne connaît pas l'expression. On sait seulement que, pour tout réel x :

$$2x - 1 \leq f(x) \leq x^2.$$

On note u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x^2$.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x, $2x - 1 \leq x^2$. Vérifier que les fonctions u et v vérifient l'encadrement de l'énoncé.

INDICE

Outil : une identité remarquable pour $x^2 - (2x - 1)$.

2. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to 1} f(x)$.

INDICE

Outil : la limite par encadrement.

3. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. L'encadrement de l'énoncé permet-il de calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$?

INDICE

Outil : la comparaison avec une fonction de limite $+\infty$. **Point délicat :** en $-\infty$, pense aux fonctions u et v.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{f(x)}{x^2} \leq 1$. En déduire que, si $\dfrac{f(x)}{x^2}$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$, alors $0 \leq \ell \leq 1$.

INDICE

Outil : divise l'encadrement par $x^2 > 0$, puis passe à la limite dans chaque inégalité.

5. 1 pts

Pour tout réel x, on pose $h(x) = 2x - 1 + (x - 1)^2\big(x - E(x)\big)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Montrer que h vérifie l'encadrement de l'énoncé. Calculer $\lim_{x \to 1} h(x)$.

INDICE

Outil : pour tout réel x, $0 \leq x - E(x) < 1$.

6. 1 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{x^2}$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{x^2}$. Sans autre information sur f, peut-on remplacer le résultat $0 \leq \ell \leq 1$ de la question 4 par un encadrement plus étroit ?