BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Étude des limites d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$.

1. 0,75 pts

Déterminer D_f. Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

INDICE

Outil : factorise les deux trinômes. **Début :** 2 est racine de chacun d'eux.

CORRIGÉ

Dénominateur. Le réel 2 est racine de $x^2 - x - 2$, car $4 - 2 - 2 = 0$. Pour tout réel x :

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1).$$

Il s'annule en 2 et en -1, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Numérateur. Le réel 2 est aussi racine de $x^2 - 3x + 2$, car $4 - 6 + 2 = 0$. Pour tout réel x :

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1).$$

Simplification. Pour $x \in D_f$, on a $x - 2 \neq 0$ et l'on simplifie :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{x-1}{x+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ et, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

2. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to 2} f(x)$.

INDICE

Outil : l'écriture simplifiée de la question 1.

CORRIGÉ

En 2, le numérateur et le dénominateur de l'écriture initiale s'annulent : c'est la forme $\dfrac{0}{0}$.

D'après la question 1, pour $x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, dont le dénominateur vaut $3 \neq 0$ en 2. Par la limite d'une fonction rationnelle en un point, la limite vaut $\dfrac{2-1}{2+1}$.

Conclusion. $\lim_{x \to 2} f(x) = \dfrac{1}{3}$.

3. 1 pts

Calculer $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to -1^-} f(x)$. La fonction f admet-elle une limite en -1 ?

INDICE

Outil : limite du numérateur, signe du dénominateur, règle du quotient.

CORRIGÉ

Limites à droite et à gauche. Par la limite d'un polynôme en un point, quand x tend vers -1, $x-1$ tend vers -2 et $x+1$ tend vers 0.

- Si $x > -1$, alors $x+1 > 0$. Par la règle du quotient, $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.
- Si $x < -1$, alors $x+1 < 0$. Par la règle du quotient, $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$.

Limite en -1. Raisonnons par l'absurde : supposons que f admette une limite L en -1, finie ou infinie. D'après la propriété des limites à droite et à gauche, L serait aussi sa limite à droite et sa limite à gauche.

- Si $L = +\infty$: par la définition au seuil $A = 1$, on aurait $f(x) > 1$ à droite de -1, assez près. Or la limite à droite vaut $-\infty$: au même seuil, $f(x) < -1$ à droite de -1, assez près. Contradiction.
- Si $L = -\infty$: de même, à gauche de -1 et assez près, on aurait à la fois $f(x) < -1$ et $f(x) > 1$. Contradiction.
- Si L est un réel : à droite de -1 et assez près, on aurait $f(x) > L - 1$ (définition avec $\varepsilon = 1$) et $f(x) < -|L| - 1 \leq L - 1$ (limite à droite $-\infty$, seuil $A = |L| + 1$). Contradiction.

Conclusion. $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$. Donc f n'admet pas de limite en -1.

4. 0,75 pts

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : la règle des termes de plus haut degré.

CORRIGÉ

D'après la question 1, pour $x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Par la règle des termes de plus haut degré, en $+\infty$ comme en $-\infty$, la limite de $f(x)$ est celle de $\dfrac{x}{x} = 1$, soit 1 par la limite d'une fonction constante.

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

5. 1 pts

Montrer que, pour tout $x > 2$, $|f(x) - 1| < \dfrac{2}{x}$.

INDICE

Outil : calcule $f(x) - 1$ à partir de l'écriture de la question 1.

CORRIGÉ

Calcul de $f(x) - 1$. Soit $x > 2$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{x - 1 - (x + 1)}{x + 1} \\ &= -\frac{2}{x + 1}. \end{aligned}$$

Comme $x + 1 > 0$, $|f(x) - 1| = \dfrac{2}{x + 1}$.

Majoration. On a $x + 1 > x > 0$, et la fonction inverse est **strictement** décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $\dfrac{1}{x + 1} < \dfrac{1}{x}$. En multipliant par $2 > 0$:

$$|f(x) - 1| < \frac{2}{x}.$$

Conclusion. Pour tout $x > 2$, $|f(x) - 1| < \dfrac{2}{x}$.

6. 0,75 pts

En déduire, à l'aide de la définition, que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$: pour $\varepsilon > 0$ donné, proposer un seuil B.

CORRIGÉ

Choix du seuil. Soit $\varepsilon > 0$. Notons B le plus grand des réels 2 et $\dfrac{2}{\varepsilon}$: alors $B \geq 2$ et $B \geq \dfrac{2}{\varepsilon}$.

Vérification. Soit $x > B$.

- Comme $x > 2$, la question 5 donne $|f(x) - 1| < \dfrac{2}{x}$.
- Comme $x > \dfrac{2}{\varepsilon} > 0$ et que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, on a $\dfrac{1}{x} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc $\dfrac{2}{x} < \varepsilon$.

Ainsi $|f(x) - 1| < \varepsilon$ pour tout $x > B$. Le seuil doit dépasser 2, car l'inégalité de la question 5 n'est établie que pour $x > 2$.

Conclusion. Pour tout $\varepsilon > 0$, ce seuil B convient : d'après la définition, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Exercice 2 — 5 pts

Une fonction trigonométrique en 0, en π et en +∞

Les mesures sont en radians. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{\sin(2x) - 2\sin x}{x^3}.$$

1. — 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $\sin(2x) - 2\sin x = -2\sin x\,(1 - \cos x)$.

INDICE

Outil : la formule de duplication de $\sin(2x)$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Par la formule de duplication, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$. Donc :

$$\begin{aligned}&\sin(2x) - 2\sin x\\ &= 2\sin x\cos x - 2\sin x\\ &= 2\sin x\,(\cos x - 1)\\ &= -2\sin x\,(1 - \cos x).\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\sin(2x) - 2\sin x = -2\sin x\,(1 - \cos x)$.

2. — 1,25 pts

En déduire que $\lim_{x\to 0} g(x) = -1$.

INDICE

Outil : écris $g(x)$ comme un produit de $\dfrac{\sin x}{x}$ et de $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. **Point délicat :** $x^3 = x \times x^2$.

CORRIGÉ

Écriture de $g(x)$. Soit $x \neq 0$. On écrit $x^3 = x \times x^2$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}&g(x)\\ &= -2 \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{1-\cos x}{x^2}.\end{aligned}$$

Limite. Par la limite de référence $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, par la limite usuelle $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, et par produit, la limite vaut $-2 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = -1$.

Conclusion. $\lim_{x\to 0} g(x) = -1$.

3. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to \pi} g(x)$.

INDICE

Outil : les limites de sinus et cosinus en un réel, puis la règle du quotient.

CORRIGÉ

Numérateur. Par les limites de sinus et de cosinus en un réel, quand x tend vers π, $\sin x$ tend vers $\sin \pi = 0$ et, par somme, $1 - \cos x$ tend vers $1 - \cos \pi = 2$. D'après la question 1 et par produit, le numérateur tend vers $-2 \times 0 \times 2 = 0$.

Dénominateur. Par la limite d'un polynôme en un point, x^3 tend vers π^3, qui est non nul.

Conclusion. Par la règle du quotient, $\lim_{x \to \pi} g(x) = \dfrac{0}{\pi^3} = 0$.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $|g(x)| \leq \dfrac{4}{x^3}$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

INDICE

Outil : $|\sin x| \leq 1$ et $0 \leq 1 - \cos x \leq 2$, puis la limite par comparaison.

CORRIGÉ

Majoration du numérateur. Soit x un réel. On a $|\sin x| \leq 1$ et $0 \leq 1 - \cos x \leq 2$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} &|\sin(2x) - 2\sin x| \\ &= 2|\sin x|\,(1 - \cos x) \\ &\leq 2 \times 1 \times 2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Majoration de $|g(x)|$. Soit $x > 0$. Alors $x^3 > 0$, et en divisant par x^3 :

$$|g(x)| \leq \frac{4}{x^3}.$$

Limite. Par la limite de référence de $\dfrac{1}{x^3}$ en $+\infty$ et par produit, $\dfrac{4}{x^3}$ tend vers 0. Par comparaison, $g(x)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $|g(x)| \leq \dfrac{4}{x^3}$, et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

5. 1 pts

Pour $x \neq 0$, on pose $k(x) = x^3 g(x) + x^2$. Montrer que $k(x) \geq x^2 - 4$, puis calculer $\lim_{x \to +\infty} k(x)$.

CORRIGÉ

Écriture de $k(x)$. Soit $x \neq 0$. Par définition de g, $x^3 g(x) = \sin(2x) - 2\sin x$, donc :

$$k(x) = \sin(2x) - 2\sin x + x^2.$$

Minoration. La majoration du numérateur obtenue à la question 4 vaut pour tout réel : $|\sin(2x) - 2\sin x| \leq 4$. Ainsi $\sin(2x) - 2\sin x \geq -4$, donc :

$$k(x) \geq x^2 - 4.$$

Limite. Par la règle du terme de plus haut degré, $x^2 - 4$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Par comparaison, $k(x)$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. Pour tout $x \neq 0$, $k(x) \geq x^2 - 4$, et $\lim_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$.

Exercice 3 5 pts

Une racine carrée en −∞, en +∞ et en 0

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - x$.

1. 0,5 pts

Montrer que $D_f = \mathbb{R}$.

INDICE

Outil : la forme canonique de $x^2 + 2x + 4$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Par la forme canonique :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 4 &= (x+1)^2 + 3 \\ &\geq 3 > 0. \end{aligned}$$

La racine carrée $\sqrt{x^2 + 2x + 4}$ est donc définie pour tout réel x.

Conclusion. $D_f = \mathbb{R}$.

2. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : la limite de la racine carrée d'une fonction, puis la règle de la somme.

CORRIGÉ

Premier terme. Par la règle du terme de plus haut degré, $x^2 + 2x + 4$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$. Par la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{x^2 + 2x + 4}$ tend vers $+\infty$.

Second terme. Par la limite de référence et par produit par -1, $-x$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$.

Conclusion. Par somme, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - 1 = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+x+1}$.

INDICE

Outil : la quantité conjuguée de $\sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)$. **Point délicat :** justifie que le dénominateur ne s'annule pas.

CORRIGÉ

Le dénominateur ne s'annule pas. Soit x un réel. D'après la question 1, $x^2+2x+4 > (x+1)^2$. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc :

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+2x+4}\\&> \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|.\end{aligned}$$

Comme $|x+1| \geq -(x+1)$, on obtient $\sqrt{x^2+2x+4}+x+1 > 0$.

Quantité conjuguée. On écrit $f(x) - 1 = \sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)$, puis on multiplie et on divise par $\sqrt{x^2+2x+4}+x+1$, qui est non nul :

$$\begin{aligned}&f(x) - 1\\&= \frac{(x^2+2x+4) - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+4}+x+1}\\&= \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+x+1}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) - 1 = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+x+1}$.

4. 1 pts

En déduire que, pour tout $x > 0$, $0 < f(x) - 1 < \dfrac{3}{2x}$.

INDICE

Outil : minore le dénominateur de la question 3, à l'aide de $\sqrt{x^2+2x+4} > x+1$.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$.

Signe. D'après la question 3, $f(x) - 1$ est le quotient de 3 par un réel strictement positif, donc $f(x) - 1 > 0$.

Majoration. Comme $x+1 > 0$, l'inégalité obtenue à la question 3 donne $\sqrt{x^2+2x+4} > |x+1| = x+1$. Le dénominateur est donc strictement supérieur à $2x+2$, donc à $2x > 0$. La fonction inverse étant **strictement** décroissante sur $]0, +\infty[$:

$$f(x) - 1 < \frac{3}{2x}.$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $0 < f(x) - 1 < \dfrac{3}{2x}$.

5. 0,75 pts

En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

CORRIGÉ

Par la limite de référence et par produit, $\dfrac{3}{2x}$ tend vers 0 en $+\infty$, comme la fonction nulle. D'après la question 4 et par encadrement, $f(x)-1$ tend vers 0.

Comme $f(x)=\big(f(x)-1\big)+1$, par somme, $f(x)$ tend vers 1.

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

6. 1 pts

Calculer $f(0)$, puis $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}$.

INDICE

Outil : écris $\dfrac{f(x)-2}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+4}-2}{x}-1$, puis utilise la quantité conjuguée.

CORRIGÉ

Valeur en 0. On a $f(0)=\sqrt{4}-0=2$.

Écriture du quotient. Pour $x\neq 0$:

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)-2}{x}\\&=\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-2}{x}-1.\end{aligned}$$

Par la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{x^2+2x+4}$ tend vers 2 en 0 : le premier quotient est de la forme $\dfrac{0}{0}$.

Quantité conjuguée. Pour $x\neq 0$, le réel $\sqrt{x^2+2x+4}+2$ est strictement positif, et :

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-2}{x}\\&=\frac{x^2+2x}{x\left(\sqrt{x^2+2x+4}+2\right)}\\&=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}+2}.\end{aligned}$$

Limite. Par somme, $x+2$ tend vers 2 et $\sqrt{x^2+2x+4}+2$ tend vers 4. Par la règle du quotient, ce quotient tend vers $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$. Par somme, $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. $f(0)=2$ et $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 4 5 pts

Deux fonctions trigonométriques à droite et à gauche de π/2

Les mesures sont en radians. On note $I = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ et, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2},$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

1. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel h, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \cos h$. En déduire que, pour tout réel $h \neq 0$, $f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \frac{1 - \cos h}{h^2}$.

INDICE

Outil : la formule d'addition de $\sin(a + b)$, avec $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ et $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

CORRIGÉ

Formule. Soit h un réel. Par la formule d'addition, avec $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ et $\cos\frac{\pi}{2} = 0$:

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right) \\
&= \sin\frac{\pi}{2}\cos h \\
&\quad + \cos\frac{\pi}{2}\sin h \\
&= 1 \times \cos h + 0 \times \sin h \\
&= \cos h.
\end{aligned}$$

Expression de f. Soit $h \neq 0$. Alors $\frac{\pi}{2} + h \in I$ et $\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - \frac{\pi}{2} = h$. Donc :

$$f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \frac{1 - \cos h}{h^2}.$$

Conclusion. Pour tout réel h, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \cos h$ et, pour tout réel $h \neq 0$, $f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \frac{1 - \cos h}{h^2}$.

2. 1 pts

En déduire $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$.

INDICE

Outil : se ramener à une limite en 0 en posant $x = \dfrac{\pi}{2} + h$, puis une limite trigonométrique usuelle.

CORRIGÉ

Forme. Par la limite de sinus en un réel, $1 - \sin x$ tend vers $1 - 1 = 0$ quand x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$; par la limite d'un polynôme en un point, le dénominateur tend aussi vers 0 : c'est la forme $\dfrac{0}{0}$.

Retour en 0. D'après la question 1 et par la limite usuelle de $\dfrac{1-\cos h}{h^2}$ en 0 :

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. D'après la propriété « se ramener en 0 », $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

3. 1 pts

Pour $x \in I$, on pose $k(x) = \dfrac{1-\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}$. Calculer $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} k(x)$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} k(x)$.

INDICE

Outil : écris $k(x) = f(x) \times \dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$, puis utilise la question 2, la règle du quotient et la règle du produit.

CORRIGÉ

Forme. En $\dfrac{\pi}{2}$, le numérateur et le dénominateur de $k(x)$ tendent vers 0 : c'est encore la forme $\dfrac{0}{0}$. Pour $x \in I$:

$$k(x) = f(x) \times \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}.$$

Limites des facteurs. D'après la question 2 et la propriété des limites à droite et à gauche, $f(x)$ tend vers $\dfrac{1}{2} > 0$ à droite et à gauche de $\dfrac{\pi}{2}$. Par la limite d'un polynôme en un point, $x - \dfrac{\pi}{2}$ tend vers 0.

- À droite : si $x > \dfrac{\pi}{2}$, alors $x - \dfrac{\pi}{2} > 0$. Par la règle du quotient, $\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$ tend vers $+\infty$. Par produit, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} k(x) = +\infty$.
- À gauche : si $x < \dfrac{\pi}{2}$, alors $x - \dfrac{\pi}{2} < 0$. Par la règle du quotient, $\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$ tend vers $-\infty$. Par produit, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} k(x) = -\infty$.

Conclusion. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} k(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} k(x) = -\infty$.

4. 1,25 pts

Montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$. Montrer ensuite que $g(x) = \sqrt{f(x)}$ si $x > \dfrac{\pi}{2}$, et que $g(x) = -\sqrt{f(x)}$ si $x < \dfrac{\pi}{2}$.

INDICE

Outil : $\sin x \leq 1$, et, pour tout réel t, $\sqrt{t^2} = |t|$.

CORRIGÉ

Signe de f. Soit $x \in I$. Comme $\sin x \leq 1$, on a $1 - \sin x \geq 0$; de plus $\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 > 0$. Donc $f(x) \geq 0$.

Racine de $f(x)$. Pour tout réel t, $\sqrt{t^2} = |t|$. Donc :

$$\begin{aligned}\sqrt{f(x)} &= \frac{\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1-\sin x}}{\left|x-\frac{\pi}{2}\right|}.\end{aligned}$$

- Si $x > \dfrac{\pi}{2}$, alors $\left|x - \dfrac{\pi}{2}\right| = x - \dfrac{\pi}{2}$, donc $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
- Si $x < \dfrac{\pi}{2}$, alors $\left|x - \dfrac{\pi}{2}\right| = -\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, donc $g(x) = -\sqrt{f(x)}$.

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$; de plus $g(x) = \sqrt{f(x)}$ si $x > \dfrac{\pi}{2}$, et $g(x) = -\sqrt{f(x)}$ si $x < \dfrac{\pi}{2}$.

5. 1 pts

En déduire $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} g(x)$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x)$. La fonction g admet-elle une limite finie en $\dfrac{\pi}{2}$?

CORRIGÉ

Limites de $\sqrt{f(x)}$. D'après les questions 2 et 4, f est positive sur I et $f(x)$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ à droite et à gauche de $\dfrac{\pi}{2}$. Par la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{f(x)}$ tend vers $\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ à droite et à gauche.

Limites de g. D'après la question 4 :

- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} g(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- par produit par -1, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Limite finie en $\dfrac{\pi}{2}$. Supposons que g admette une limite finie ℓ en $\dfrac{\pi}{2}$. D'après la propriété des limites à droite et à gauche, ℓ serait sa limite à droite et sa limite à gauche. Par unicité de la limite, on aurait $\ell = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\ell = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui est impossible.

Conclusion. Les limites à droite et à gauche de g en $\dfrac{\pi}{2}$ valent $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc g n'admet pas de limite finie en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 5 5 pts

Une fonction connue par un encadrement, en 1 et en +∞

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont on ne connaît pas l'expression. On sait seulement que, pour tout réel x :

$$2x - 1 \leq f(x) \leq x^2.$$

On note u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x^2$.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x, $2x - 1 \leq x^2$. Vérifier que les fonctions u et v vérifient l'encadrement de l'énoncé.

INDICE

Outil : une identité remarquable pour $x^2 - (2x - 1)$.

CORRIGÉ

Inégalité. Soit x un réel. Par l'identité remarquable, $x^2 - (2x - 1) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$. Donc $2x - 1 \leq x^2$.

Les fonctions u et v. Pour tout réel x :

- $u(x) = 2x - 1$, et $2x - 1 \leq 2x - 1 \leq x^2$;
- $v(x) = x^2$, et $2x - 1 \leq x^2 \leq x^2$.

Conclusion. Pour tout réel x, $2x - 1 \leq x^2$; les fonctions u et v vérifient l'encadrement de l'énoncé.

2. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to 1} f(x)$.

INDICE

Outil : la limite par encadrement.

CORRIGÉ

Par la limite d'un polynôme en un point, $\lim_{x \to 1}(2x - 1) = 1$ et $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$.

Pour tout réel x, $2x - 1 \leq f(x) \leq x^2$: les deux fonctions qui encadrent f ont la même limite 1 en 1. Par encadrement, $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 1.

Conclusion. $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

3. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. L'encadrement de l'énoncé permet-il de calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?

INDICE

Outil : la comparaison avec une fonction de limite $+\infty$. **Point délicat :** en $-\infty$, pense aux fonctions u et v.

CORRIGÉ

En $+\infty$. Par la règle du terme de plus haut degré, $\lim_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$. Comme $f(x)\geq 2x-1$ pour tout réel x, par comparaison, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

En $-\infty$. Par la règle du terme de plus haut degré, $2x-1$ tend vers $-\infty$; par la limite de référence, x^2 tend vers $+\infty$. Un minorant de limite $-\infty$ et un majorant de limite $+\infty$ ne fixent rien : ni la comparaison ni l'encadrement ne s'appliquent.

D'ailleurs, d'après la question 1, u et v vérifient l'encadrement, alors que $\lim_{x\to-\infty} u(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} v(x)=+\infty$. L'encadrement seul ne permet donc pas de calculer la limite de f en $-\infty$.

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; en $-\infty$, l'encadrement de l'énoncé ne suffit pas.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout $x>0$, $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\leq\dfrac{f(x)}{x^2}\leq 1$. En déduire que, si $\dfrac{f(x)}{x^2}$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$, alors $0\leq\ell\leq 1$.

INDICE

Outil : divise l'encadrement par $x^2>0$, puis passe à la limite dans chaque inégalité.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit $x>0$. Comme $x^2>0$, diviser l'encadrement par x^2 conserve le sens des inégalités :

$$\frac{2x-1}{x^2}\leq\frac{f(x)}{x^2}\leq\frac{x^2}{x^2}=1,$$

avec $\dfrac{2x-1}{x^2}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$.

Limite du minorant. Par les limites de référence de $\dfrac{1}{x}$ et de $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$, par produit et par somme, $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ tend vers 0 en $+\infty$.

Passage à la limite. On suppose que $\dfrac{f(x)}{x^2}$ tend vers un réel ℓ en $+\infty$. Les trois fonctions de l'encadrement ont alors des limites finies en $+\infty$: 0, ℓ et 1. Donc, d'après la propriété de passage à la limite dans une inégalité, $0\leq\ell$ et $\ell\leq 1$.

Conclusion. Pour tout $x>0$, $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\leq\dfrac{f(x)}{x^2}\leq 1$; si $\dfrac{f(x)}{x^2}$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$, alors $0\leq\ell\leq 1$.

5. 1 pts

Pour tout réel x, on pose $h(x) = 2x - 1 + (x-1)^2\big(x - E(x)\big)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Montrer que h vérifie l'encadrement de l'énoncé. Calculer $\lim_{x\to 1} h(x)$.

INDICE

Outil : pour tout réel x, $0 \leq x - E(x) < 1$.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit x un réel. On a $0 \leq x - E(x) < 1$ et $(x-1)^2 \geq 0$, donc :

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x-1)^2\big(x - E(x)\big) \\ &\leq (x-1)^2. \end{aligned}$$

En ajoutant $2x - 1$:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &\leq h(x) \\ &\leq 2x - 1 + (x-1)^2 \\ &= x^2. \end{aligned}$$

Limite en 1. La fonction h vérifie donc l'encadrement de l'énoncé. Le raisonnement de la question 2 s'applique à h : par encadrement, $\lim_{x\to 1} h(x) = 1$.

Remarque. La fonction h contient la partie entière, qui n'admet pas de limite en 1 : $E(x) = 1$ pour $1 \leq x < 2$ et $E(x) = 0$ pour $0 \leq x < 1$, donc ses limites à droite et à gauche valent 1 et 0. L'encadrement suffit pourtant à donner la limite de h en 1.

Conclusion. La fonction h vérifie l'encadrement de l'énoncé, et $\lim_{x\to 1} h(x) = 1$.

6. 1 pts

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{u(x)}{x^2}$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{v(x)}{x^2}$. Sans autre information sur f, peut-on remplacer le résultat $0 \leq \ell \leq 1$ de la question 4 par un encadrement plus étroit ?

CORRIGÉ

Limites. Pour $x > 0$, $\dfrac{u(x)}{x^2} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, qui tend vers 0 en $+\infty$ d'après la question 4. Et $\dfrac{v(x)}{x^2} = 1$: par la limite d'une fonction constante, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{v(x)}{x^2} = 1$.

Les bornes sont atteintes. D'après la question 1, u et v vérifient toutes deux l'encadrement de l'énoncé. Pour $f = u$, on obtient $\ell = 0$; pour $f = v$, on obtient $\ell = 1$.

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{u(x)}{x^2} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{v(x)}{x^2} = 1$. Les deux bornes 0 et 1 sont atteintes : sans autre information sur f, on ne peut pas remplacer $0 \leq \ell \leq 1$ par un encadrement plus étroit.