BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Entraînement	8

Exercice 1

Démontrer une limite en un point par la définition

On veut démontrer, à l'aide de la définition, que $\lim_{x \to 2}(x^2 + x) = 6$.

1.

Vérifier que, pour tout réel x, $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

INDICE

Outil : développe le second membre.

2.

Montrer que, si $|x - 2| < 1$, alors $|x + 3| < 6$.

INDICE

Outil : traduis $|x - 2| < 1$ par un encadrement de x, puis ajoute 3.

3.

Soit $\varepsilon > 0$. Proposer un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel x vérifiant $0 < |x - 2| < \alpha$, on ait $|(x^2 + x) - 6| < \varepsilon$. Justifier ce choix, puis conclure.

INDICE

Outil : les questions 1 et 2. Pour utiliser la question 2, quelle condition sur α faut-il ? Sous cette condition, majore $|(x^2 + x) - 6|$ par un multiple de $|x - 2|$: quelle seconde condition sur α donne alors une majoration par ε ? **Point délicat :** un seul réel α doit vérifier les deux conditions à la fois.

4.

Avec α le plus petit des réels 1 et $\dfrac{\varepsilon}{6}$, quelle valeur de α obtient-on pour $\varepsilon = 0{,}03$? Vérifier l'inégalité pour $x = 2{,}004$.

INDICE

Outil : compare 1 et $\dfrac{0{,}03}{6}$, puis calcule l'écart en $2{,}004$.

Exercice 2

Démontrer une limite en +∞ par la définition

Soit f la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x-1}{x+2}$.

1.

Montrer que, pour tout $x > -2$, $f(x) - 5 = -\dfrac{11}{x+2}$.

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur.

2.

Soit $\varepsilon > 0$ et $B = \dfrac{11}{\varepsilon}$. Montrer que, pour tout $x > B$, $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Qu'a-t-on démontré ?

INDICE

Outil : la question 1. **Point délicat :** compare $x+2$ et B, en justifiant que les deux sont strictement positifs.

3.

Quel seuil obtient-on pour $\varepsilon = 10^{-2}$? Calculer $|f(1200) - 5|$ et vérifier qu'il est inférieur à 10^{-2}.

INDICE

Outil : la formule de B, puis celle de la question 1.

Exercice 3

La quantité conjuguée, en un point et en −∞

Les deux parties sont indépendantes.

1.

Calculer $\lim_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$.

INDICE

Outil : la quantité conjuguée $\sqrt{2x-1}+3$. **Point délicat :** $(2x-1)-9=2(x-5)$.

2.

Soit g la fonction définie sur $]-\infty,-6]$ par $g(x)=\sqrt{x^2+6x}+x$. Quelle forme indéterminée obtient-on en $-\infty$?

INDICE

Outil : la limite de x^2+6x en $-\infty$, puis la racine carrée d'une fonction.

3.

Montrer que, pour tout $x\le -6$, $g(x)=\dfrac{-6}{\sqrt{1+\dfrac{6}{x}}+1}$. En déduire $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

INDICE

Outil : multiplie et divise par $\sqrt{x^2+6x}-x$. **Point délicat :** pour $x<0$, $\sqrt{x^2}=-x$.

Exercice 4

Une valeur absolue au dénominateur

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$.

1.

Simplifier $f(x)$ lorsque $x>1$, puis lorsque $x<1$.

INDICE

Outil : la définition de la valeur absolue, puis $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

2.

Calculer $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x)$. La fonction f admet-elle une limite en 1 ?

INDICE

Outil : la question 1, puis la propriété qui relie la limite aux limites à droite et à gauche.

3.

Pour $x\neq 1$, on pose $g(x)=(x-1)f(x)$. Montrer que g admet une limite en 1, et la donner.

INDICE

Outil : calcule les deux limites latérales de g à l'aide de la question 1.

Exercice 5

Limites trigonométriques en un réel

Les mesures sont en radians.

1.

Calculer $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{x - \pi/2}$.

INDICE

Outil : pose $x = \dfrac{\pi}{2} + h$, puis développe $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + h\right)$.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

INDICE

Outil : développe le second membre par la formule d'addition ; $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.

En déduire $\lim_{x \to \pi/4} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4}$.

INDICE

Outil : la question 2, puis pose $x = \dfrac{\pi}{4} + h$.

Exercice 6

Encadrer avec la partie entière

On note $E(x)$ la partie entière du réel x.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $0 \leq x - E(x) < 1$.

INDICE

Outil : la définition de la partie entière : $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

2.

En déduire $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x - E(x)}{x}$.

INDICE

Outil : divise l'encadrement de la question 1 par $x > 0$, puis encadre.

3.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{2x - 1}{3x} < \dfrac{E(x) + x}{3x} \leq \dfrac{2}{3}$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{E(x) + x}{3x}$.

INDICE

Outil : l'encadrement $x - 1 < E(x) \leq x$, puis la limite par encadrement.

Exercice 7

Limites infinies par comparaison

Les trois questions sont indépendantes.

1.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $2x^2 - x\sin x \geq 2x^2 - x$. En déduire $\lim_{x\to+\infty}(2x^2 - x\sin x)$.

INDICE

Outil : $\sin x \leq 1$ et $x > 0$, puis la comparaison avec une fonction de limite $+\infty$.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $x^3 + 2\cos x \leq x^3 + 2$. En déduire $\lim_{x\to-\infty}(x^3 + 2\cos x)$.

INDICE

Outil : $\cos x \leq 1$, puis la comparaison avec une fonction de limite $-\infty$.

3.

Pour $x > 0$, on pose $h(x) = x - x\sin x$. Vérifier que $h(x) \geq 0$. Montrer que $h(x)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

INDICE

Outil : un raisonnement par l'absurde avec la définition, pour le seuil $A = 1$. **Point délicat :** calcule $h\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ pour un entier k.

Exercice 8

Passer à la limite dans une inégalité

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$, qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$, et telle que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{4x-1}{x+2} < f(x).$$

1.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4x-1}{x+2}$.

INDICE

Outil : la règle des termes de plus haut degré.

2.

En déduire que $\ell \geq 4$.

INDICE

Outil : la propriété de passage à la limite dans une inégalité, en $+\infty$.

3.

Peut-on affirmer que $\ell > 4$? Étudier le cas où $f(x) = 4 + \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

INDICE

Outil : vérifie que cette fonction satisfait l'hypothèse, puis calcule sa limite.