BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Entraînement	8

Exercice 1

Démontrer une limite en un point par la définition

On veut démontrer, à l'aide de la définition, que $\lim_{x \to 2}(x^2 + x) = 6$.

1.

Vérifier que, pour tout réel x, $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

INDICE

Outil : développe le second membre.

CORRIGÉ

Soit x un réel. On développe le second membre :

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 3) \\ = x^2 + 3x - 2x - 6 \\ = x^2 + x - 6.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

2.

Montrer que, si $|x - 2| < 1$, alors $|x + 3| < 6$.

INDICE

Outil : traduis $|x - 2| < 1$ par un encadrement de x, puis ajoute 3.

CORRIGÉ

Soit x un réel tel que $|x - 2| < 1$. Alors $-1 < x - 2 < 1$, soit $1 < x < 3$. En ajoutant 3 :

$$4 < x + 3 < 6.$$

En particulier $x + 3 > 0$, donc $|x + 3| = x + 3 < 6$.

Conclusion. Si $|x - 2| < 1$, alors $|x + 3| < 6$.

3.

Soit $\varepsilon > 0$. Proposer un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel x vérifiant $0 < |x-2| < \alpha$, on ait $|(x^2+x)-6| < \varepsilon$. Justifier ce choix, puis conclure.

INDICE

Outil : les questions 1 et 2. Pour utiliser la question 2, quelle condition sur α faut-il ? Sous cette condition, majore $|(x^2+x)-6|$ par un multiple de $|x-2|$: quelle seconde condition sur α donne alors une majoration par ε ? **Point délicat :** un seul réel α doit vérifier les deux conditions à la fois.

CORRIGÉ

Choix de α. On choisit pour α le plus petit des réels 1 et $\dfrac{\varepsilon}{6}$. Alors $\alpha > 0$, $\alpha \leq 1$ et $\alpha \leq \dfrac{\varepsilon}{6}$.

Vérification. Soit x un réel tel que $0 < |x-2| < \alpha$. Comme $\alpha \leq 1$, on a $|x-2| < 1$, donc $|x+3| < 6$ d'après la question 2. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} &|(x^2+x)-6| \\ &= |x-2| \times |x+3| \\ &< 6\alpha \leq 6 \times \frac{\varepsilon}{6} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

La première inégalité vient de $|x+3| < 6$ et de $0 < |x-2| < \alpha$.

Conclusion. Pour tout $\varepsilon > 0$, ce réel α convient. D'après la définition, $\lim_{x \to 2}(x^2+x) = 6$.

4.

Avec α le plus petit des réels 1 et $\dfrac{\varepsilon}{6}$, quelle valeur de α obtient-on pour $\varepsilon = 0{,}03$? Vérifier l'inégalité pour $x = 2{,}004$.

INDICE

Outil : compare 1 et $\dfrac{0{,}03}{6}$, puis calcule l'écart en $2{,}004$.

CORRIGÉ

Valeur de α. On a $\dfrac{0{,}03}{6} = 0{,}005$ et $0{,}005 < 1$, donc $\alpha = 0{,}005$.

Vérification en $x = 2{,}004$. On a $0 < |x-2| = 0{,}004 < 0{,}005$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} &|(x^2+x)-6| \\ &= |x-2| \times |x+3| \\ &= 0{,}004 \times 5{,}004 \\ &= 0{,}020016 < 0{,}03. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour $\varepsilon = 0{,}03$, on obtient $\alpha = 0{,}005$, et l'inégalité $|(x^2+x)-6| < 0{,}03$ est vérifiée en $x = 2{,}004$.

Exercice 2

Démontrer une limite en +∞ par la définition

Soit f la fonction définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5x-1}{x+2}$.

1.

Montrer que, pour tout $x>-2$, $f(x)-5=-\dfrac{11}{x+2}$.

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur.

CORRIGÉ

Soit $x>-2$. On réduit au même dénominateur $x+2$, qui est non nul :

$$\begin{aligned} f(x)-5 &= \frac{5x-1-5(x+2)}{x+2} \\ &= \frac{5x-1-5x-10}{x+2} \\ &= -\frac{11}{x+2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x>-2$, $f(x)-5=-\dfrac{11}{x+2}$.

2.

Soit $\varepsilon>0$ et $B=\dfrac{11}{\varepsilon}$. Montrer que, pour tout $x>B$, $|f(x)-5|<\varepsilon$. Qu'a-t-on démontré ?

INDICE

Outil : la question 1. **Point délicat :** compare $x+2$ et B, en justifiant que les deux sont strictement positifs.

CORRIGÉ

Position de $x+2$. Soit $x>B$. Comme $B>0$, on a $x+2>x>B>0$.

Majoration. D'après la question 1, $|f(x)-5|=\dfrac{11}{x+2}$. La fonction inverse est **strictement** décroissante sur $]0,+\infty[$ et $x+2>B$, donc $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{1}{B}$. Ainsi :

$$|f(x)-5|<\frac{11}{B}=\varepsilon.$$

Conclusion. Pour tout $\varepsilon>0$, le seuil $B=\dfrac{11}{\varepsilon}$ convient : pour tout $x>B$, $|f(x)-5|<\varepsilon$. On a donc démontré, à l'aide de la définition, que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$.

3.

Quel seuil obtient-on pour $\varepsilon = 10^{-2}$? Calculer $|f(1200) - 5|$ et vérifier qu'il est inférieur à 10^{-2}.

INDICE

Outil : la formule de B, puis celle de la question 1.

CORRIGÉ

Seuil. Pour $\varepsilon = 10^{-2}$:

$$B = \frac{11}{10^{-2}} = 1100.$$

Vérification. Comme $1200 > 1100$, la question 2 s'applique en 1200. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} |f(1200) - 5| &= \frac{11}{1202} \\ &\approx 0{,}0092. \end{aligned}$$

Conclusion. Le seuil vaut 1100, et $|f(1200) - 5| = \dfrac{11}{1202}$ est bien inférieur à $10^{-2} = 0{,}01$.

Exercice 3

La quantité conjuguée, en un point et en −∞

Les deux parties sont indépendantes.

1.

Calculer $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$.

INDICE

Outil : la quantité conjuguée $\sqrt{2x-1}+3$. **Point délicat :** $(2x-1)-9 = 2(x-5)$.

CORRIGÉ

Forme. Quand x tend vers 5, $\sqrt{2x-1}$ tend vers $\sqrt{9}=3$, par la limite de la racine carrée d'une fonction. Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 : c'est la forme $\dfrac{0}{0}$.

Quantité conjuguée. Soit $x \geq \dfrac{1}{2}$ avec $x \neq 5$. Le réel $\sqrt{2x-1}+3$ est strictement positif. On multiplie le numérateur et le dénominateur par ce réel :

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}\\ &= \frac{(2x-1)-9}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}\\ &= \frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}\\ &= \frac{2}{\sqrt{2x-1}+3}.\end{aligned}$$

Limite. Par somme, $\sqrt{2x-1}+3$ tend vers 6, qui est non nul. Par la règle du quotient, la limite vaut $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

Conclusion. $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5} = \dfrac{1}{3}$.

2.

Soit g la fonction définie sur $]-\infty,-6]$ par $g(x)=\sqrt{x^2+6x}+x$. Quelle forme indéterminée obtient-on en $-\infty$?

INDICE

Outil : la limite de x^2+6x en $-\infty$, puis la racine carrée d'une fonction.

CORRIGÉ

Par la règle du terme de plus haut degré, x^2+6x tend vers $+\infty$ en $-\infty$. Par la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{x^2+6x}$ tend vers $+\infty$.

Le second terme, x, tend vers $-\infty$.

Conclusion. En $-\infty$, on obtient la forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$.

3.

Montrer que, pour tout $x \leq -6$, $g(x) = \dfrac{-6}{\sqrt{1+\dfrac{6}{x}}+1}$. En déduire $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

INDICE

Outil : multiplie et divise par $\sqrt{x^2+6x}-x$. **Point délicat :** pour $x<0$, $\sqrt{x^2}=-x$.

CORRIGÉ

Soit $x \leq -6$.

Quantité conjuguée. Le réel $\sqrt{x^2+6x}-x$ est strictement positif, car $-x>0$. On multiplie et on divise par ce réel :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x^2+6x)-x^2}{\sqrt{x^2+6x}-x} \\ &= \frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}-x}. \end{aligned}$$

Racine carrée. Comme $x \leq -6 < 0$ et que la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty,0[$, on a $\dfrac{1}{x} \geq -\dfrac{1}{6}$. Pour $x \leq -6$, $\dfrac{6}{x} \geq -1$, donc $1+\dfrac{6}{x} \geq 0$. Comme $x^2+6x = x^2\left(1+\dfrac{6}{x}\right)$ et $\sqrt{x^2}=-x$ pour $x<0$:

$$\sqrt{x^2+6x} = -x\sqrt{1+\frac{6}{x}}.$$

Simplification. Le dénominateur s'écrit :

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2+6x}-x \\ &= -x\sqrt{1+\frac{6}{x}}-x \\ &= -x\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1\right). \end{aligned}$$

On simplifie par $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{6x}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{6}{x}}+1\right)} \\ &= \frac{-6}{\sqrt{1+\dfrac{6}{x}}+1}. \end{aligned}$$

Limite. Par la limite de référence et par produit, $\dfrac{6}{x}$ tend vers 0 en $-\infty$. Par somme puis par la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{1+\dfrac{6}{x}}$ tend vers 1. Par somme puis par la règle du quotient, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \dfrac{-6}{2} = -3$.

Conclusion. Pour tout $x \leq -6$, $g(x) = \dfrac{-6}{\sqrt{1+\dfrac{6}{x}}+1}$, et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3$.

Exercice 4

Une valeur absolue au dénominateur

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.

1.

Simplifier $f(x)$ lorsque $x > 1$, puis lorsque $x < 1$.

INDICE

Outil : la définition de la valeur absolue, puis $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

- Si $x > 1$, alors $|x - 1| = x - 1$. On simplifie par $x - 1 \neq 0$: $f(x) = x + 1$.
- Si $x < 1$, alors $|x - 1| = -(x - 1)$. On simplifie par $x - 1 \neq 0$: $f(x) = -(x + 1)$.

Conclusion. $f(x) = x + 1$ lorsque $x > 1$, et $f(x) = -(x + 1)$ lorsque $x < 1$.

2.

Calculer $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x)$. La fonction f admet-elle une limite en 1 ?

INDICE

Outil : la question 1, puis la propriété qui relie la limite aux limites à droite et à gauche.

CORRIGÉ

À droite de 1. Pour $x > 1$, $f(x) = x + 1$. Par la limite d'un polynôme en un point, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$.

À gauche de 1. Pour $x < 1$, $f(x) = -(x + 1)$. Par la limite d'un polynôme en un point, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -2$.

Conclusion. Les deux limites sont différentes : d'après la propriété des limites à droite et à gauche, f n'admet pas de limite en 1.

3.

Pour $x \neq 1$, on pose $g(x) = (x - 1) f(x)$. Montrer que g admet une limite en 1, et la donner.

INDICE

Outil : calcule les deux limites latérales de g à l'aide de la question 1.

CORRIGÉ

À droite de 1. Pour $x > 1$, $g(x) = (x - 1)(x + 1)$. Par la limite d'un polynôme en un point, $g(x)$ tend vers $0 \times 2 = 0$.

À gauche de 1. Pour $x < 1$, $g(x) = -(x - 1)(x + 1)$. Par la limite d'un polynôme en un point, $g(x)$ tend vers 0.

Conclusion. Les limites à droite et à gauche en 1 sont égales à 0. D'après la propriété des limites à droite et à gauche, g admet une limite en 1 : $\lim_{x \to 1} g(x) = 0$.

Exercice 5

Limites trigonométriques en un réel

Les mesures sont en radians.

1.

Calculer $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{x - \pi/2}$.

INDICE

Outil : pose $x = \dfrac{\pi}{2} + h$, puis développe $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + h\right)$.

CORRIGÉ

Changement de variable. Posons $h = x - \dfrac{\pi}{2}$, soit $x = \dfrac{\pi}{2} + h$; la condition $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ équivaut à $h \neq 0$.

Numérateur. Par la formule d'addition :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos h \\ &\quad - \sin\frac{\pi}{2}\sin h \\ &= -\sin h.\end{aligned}$$

Limite. Pour $h \neq 0$, le quotient vaut $-\dfrac{\sin h}{h}$. Par la limite de référence $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ et par produit par -1, il tend vers -1 quand h tend vers 0.

Conclusion. D'après la propriété « se ramener en 0 », $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

INDICE

Outil : développe le second membre par la formule d'addition ; $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Par la formule d'addition, puis avec $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\sin x\cos\frac{\pi}{4} \\ &\quad - \sqrt{2}\cos x\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x) \\ &= \sin x - \cos x.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3.

En déduire $\lim_{x \to \pi/4} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4}$.

INDICE

Outil : la question 2, puis pose $x = \dfrac{\pi}{4} + h$.

CORRIGÉ

Posons $x = \dfrac{\pi}{4} + h$, avec $h \neq 0$. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} &= \frac{\sqrt{2}\sin h}{h} \\ &= \sqrt{2} \times \frac{\sin h}{h}. \end{aligned}$$

Par la limite de référence $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ et par produit, ce quotient tend vers $\sqrt{2}$ quand h tend vers 0.

Conclusion. D'après la propriété « se ramener en 0 », $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$.

Exercice 6

Encadrer avec la partie entière

On note $E(x)$ la partie entière du réel x.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $0 \leq x - E(x) < 1$.

INDICE

Outil : la définition de la partie entière : $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Par définition de la partie entière, $E(x)$ est l'entier qui vérifie :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

En retranchant $E(x)$ à chaque membre :

$$0 \leq x - E(x) < 1.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $0 \leq x - E(x) < 1$.

2.

En déduire $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x - E(x)}{x}$.

INDICE

Outil : divise l'encadrement de la question 1 par $x > 0$, puis encadre.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit $x > 0$. On divise l'encadrement de la question 1 par $x > 0$, ce qui conserve le sens des inégalités :

$$0 \leq \frac{x - E(x)}{x} < \frac{1}{x}.$$

Limite. Par la limite de référence, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$, comme la fonction nulle. Par encadrement, $\dfrac{x - E(x)}{x}$ tend vers 0.

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x - E(x)}{x} = 0$.

3.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{2x-1}{3x} < \dfrac{E(x)+x}{3x} \leq \dfrac{2}{3}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{E(x)+x}{3x}$.

INDICE

Outil : l'encadrement $x - 1 < E(x) \leq x$, puis la limite par encadrement.

CORRIGÉ

Encadrement de $E(x)$. Soit $x > 0$. D'après la question 1, $x - 1 < E(x) \leq x$. En ajoutant x :

$$2x - 1 < E(x) + x \leq 2x.$$

Division par $3x$. Comme $3x > 0$, le sens des inégalités est conservé, et $\dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$:

$$\frac{2x-1}{3x} < \frac{E(x)+x}{3x} \leq \frac{2}{3}.$$

Limite. Par la règle des termes de plus haut degré, $\dfrac{2x-1}{3x}$ a la même limite en $+\infty$ que $\dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$. La fonction constante égale à $\dfrac{2}{3}$ a la même limite. Par encadrement, $\dfrac{E(x)+x}{3x}$ tend vers $\dfrac{2}{3}$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{2x-1}{3x} < \dfrac{E(x)+x}{3x} \leq \dfrac{2}{3}$, et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{E(x)+x}{3x} = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 7

Limites infinies par comparaison

Les trois questions sont indépendantes.

1.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $2x^2 - x\sin x \geq 2x^2 - x$. En déduire $\lim_{x\to+\infty}(2x^2 - x\sin x)$.

INDICE

Outil : $\sin x \leq 1$ et $x > 0$, puis la comparaison avec une fonction de limite $+\infty$.

CORRIGÉ

Inégalité. Soit $x > 0$. Comme $\sin x \leq 1$ et $x > 0$, on a $x\sin x \leq x$, donc $-x\sin x \geq -x$. En ajoutant $2x^2$:

$$2x^2 - x\sin x \geq 2x^2 - x.$$

Limite. Par la règle du terme de plus haut degré, $2x^2 - x$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Par comparaison, $2x^2 - x\sin x$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $2x^2 - x\sin x \geq 2x^2 - x$, et $\lim_{x\to+\infty}(2x^2 - x\sin x) = +\infty$.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $x^3 + 2\cos x \leq x^3 + 2$. En déduire $\lim_{x\to-\infty}(x^3 + 2\cos x)$.

INDICE

Outil : $\cos x \leq 1$, puis la comparaison avec une fonction de limite $-\infty$.

CORRIGÉ

Inégalité. Soit x un réel. Comme $\cos x \leq 1$, on a $2\cos x \leq 2$, donc :

$$x^3 + 2\cos x \leq x^3 + 2.$$

Limite. Par la règle du terme de plus haut degré, $x^3 + 2$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$. Par comparaison, $x^3 + 2\cos x$ tend vers $-\infty$.

Conclusion. Pour tout réel x, $x^3 + 2\cos x \leq x^3 + 2$, et $\lim_{x\to-\infty}(x^3 + 2\cos x) = -\infty$.

3.

Pour $x > 0$, on pose $h(x) = x - x\sin x$. Vérifier que $h(x) \geq 0$. Montrer que $h(x)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

INDICE

Outil : un raisonnement par l'absurde avec la définition, pour le seuil $A = 1$. **Point délicat :** calcule $h\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ pour un entier k.

CORRIGÉ

Signe de $h(x)$. Soit $x > 0$. On a $h(x) = x(1 - \sin x)$, avec $x > 0$ et $1 - \sin x \geq 0$ car $\sin x \leq 1$. Donc $h(x) \geq 0$.

Hypothèse. Raisonnons par l'absurde : supposons $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. D'après la définition, appliquée au seuil $A = 1$, il existe $B > 0$ tel que $h(x) > 1$ pour tout $x > B$.

Un point où h s'annule. Choisissons un entier k supérieur à $\frac{B}{2\pi}$, qui existe. Alors $k > 0$ et $2k\pi > B$. Posons $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$: on a $x_0 > B$ et $\sin x_0 = 1$, donc $h(x_0) = x_0(1 - 1) = 0$.

Contradiction. Comme $x_0 > B$, on devrait avoir $h(x_0) > 1$; or $h(x_0) = 0$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $h(x) \geq 0$, et $h(x)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 8

Passer à la limite dans une inégalité

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$, qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$, et telle que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{4x-1}{x+2} < f(x).$$

1.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4x-1}{x+2}$.

INDICE

Outil : la règle des termes de plus haut degré.

CORRIGÉ

Par la règle des termes de plus haut degré, la limite en $+\infty$ est celle de $\dfrac{4x}{x}$, qui vaut 4 pour $x \neq 0$. Par la limite d'une fonction constante, elle vaut 4.

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4x-1}{x+2} = 4$.

2.

En déduire que $\ell \geq 4$.

INDICE

Outil : la propriété de passage à la limite dans une inégalité, en $+\infty$.

CORRIGÉ

Pour tout $x > 0$, $\dfrac{4x-1}{x+2} < f(x)$, donc a fortiori $\dfrac{4x-1}{x+2} \leq f(x)$.

Les deux membres admettent une limite finie en $+\infty$: 4 d'après la question 1, et ℓ par hypothèse. D'après la propriété de passage à la limite dans une inégalité :

$$4 \leq \ell.$$

Conclusion. $\ell \geq 4$.

3.

Peut-on affirmer que $\ell > 4$? Étudier le cas où $f(x) = 4 + \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

INDICE

Outil : vérifie que cette fonction satisfait l'hypothèse, puis calcule sa limite.

CORRIGÉ

La fonction vérifie l'hypothèse. Soit $x > 0$. On a $4x - 1 < 4x + 8 = 4(x + 2)$. Comme $x + 2 > 0$, et $\dfrac{1}{x} > 0$:

$$\frac{4x - 1}{x + 2} < 4 < 4 + \frac{1}{x}.$$

Sa limite. Par la limite de référence, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$; par somme, $4 + \dfrac{1}{x}$ tend vers 4. Pour cette fonction, $\ell = 4$.

Conclusion. On ne peut pas affirmer que $\ell > 4$: cette fonction vérifie l'inégalité stricte de l'hypothèse, et pourtant $\ell = 4$. Une inégalité stricte devient large par passage à la limite.