BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Application	10

Exercice 1

Écrire une définition avec des quantificateurs

Dans cet exercice, g, h et k sont des fonctions dont on ne connaît aucune formule.

1.

On suppose g définie au voisinage de -2, sauf peut-être en -2. Écrire avec des quantificateurs la phrase « $\lim_{x\to -2} g(x) = 5$ ».

INDICE

Outil : la définition d'une limite finie en un point. **Point délicat :** lequel des deux réels ε et α est choisi en premier ? De quoi dépend l'autre ?

2.

On suppose h définie sur $]0, +\infty[$. Écrire avec des quantificateurs la phrase « $\lim_{x\to +\infty} h(x) = -\infty$ ».

INDICE

Outil : la définition d'une limite infinie en $+\infty$. Il faut un seuil A pour les valeurs et un seuil B pour la variable.

3.

La fonction k est définie au voisinage de 1, sauf en 1. Pour tout x tel que $0 < |x-1| < 0{,}01$, on a $|k(x) - 4| < 0{,}5$. Peut-on en conclure que $\lim_{x\to 1} k(x) = 4$?

INDICE

Outil : compare l'hypothèse à la définition. **Point délicat :** combien de valeurs de ε l'hypothèse traite-t-elle ?

Exercice 2

Polynômes et quotients en un point

Calculer chacune des limites suivantes ; justifier chaque réponse.

1.

$\lim_{x \to -1} (2x^3 - x + 4)$.

INDICE

Outil : la limite d'un polynôme en un point est sa valeur en ce point.

2.

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 1}{2x + 1}$.

INDICE

Outil : la limite d'une fonction rationnelle en un point. **Point délicat :** vérifie d'abord que le dénominateur ne s'annule pas en 2.

3.

$\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 4}$.

INDICE

Outil : même propriété ; le dénominateur vaut 4 en 0.

4.

$\lim_{x \to \sqrt{2}} (x^4 - 2x^2)$.

INDICE

Outil : la limite d'un polynôme en un point. Calcule $(\sqrt{2})^2$, puis $(\sqrt{2})^4$.

Exercice 3

À l'infini : le terme de plus haut degré

Déterminer les limites suivantes, en citant la règle utilisée à chaque étape.

1.

$\lim_{x\to+\infty}(-2x^3+5x^2+1)$.

INDICE

Outil : un polynôme a, à l'infini, la limite de son terme de plus haut degré.

2.

$\lim_{x\to-\infty}(x^4-7x^3)$.

INDICE

Outil : même règle. **Point délicat :** en $-\infty$, une puissance paire tend vers $+\infty$.

3.

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2+1}{1-3x^2}$.

INDICE

Outil : une fonction rationnelle a, à l'infini, la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

4.

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5x+1}{x^2+1}$.

INDICE

Outil : même règle, puis la limite de référence de $\dfrac{1}{x}$ en $-\infty$.

5.

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+1}{2x-3}$.

INDICE

Outil : même règle. **Point délicat :** simplifie le quotient des termes, puis regarde la parité de l'exposant restant.

Exercice 4

Un dénominateur qui tend vers zéro

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

1.

Déterminer les limites, quand x tend vers -1, du numérateur et du dénominateur de $f(x)$.

INDICE

Outil : la limite d'un polynôme en un point.

2.

Étudier le signe de $x+1$, puis calculer $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to -1^-} f(x)$.

INDICE

Outil : la règle du quotient quand le dénominateur tend vers 0 en gardant un signe constant.

3.

La fonction f admet-elle une limite en -1 ?

INDICE

Outil : la propriété qui relie la limite en un point aux limites à droite et à gauche.

4.

Calculer $\lim_{x \to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2}$.

INDICE

Outil : même démarche. **Point délicat :** un carré non nul est strictement positif, des deux côtés de 2.

Exercice 5

Lever une forme 0/0 par factorisation

Pour chaque limite, montrer qu'on obtient la forme $\frac{0}{0}$, puis la calculer.

1.

$\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$.

INDICE

Outil : factorise chaque trinôme par $x - 3$. **Début :** 3 est racine des deux.

2.

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1}$.

INDICE

Outil : factorise le numérateur en regroupant les termes deux par deux.

3.

$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x + 1}$.

INDICE

Outil : les racines du trinôme $2x^2 - x - 1$. **Point délicat :** écris la factorisation avec le facteur $2x + 1$.

Exercice 6

Limites trigonométriques directes

Les mesures sont en radians. Calculer les limites suivantes.

1.

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{3x}$.

INDICE

Outil : fais apparaître $\dfrac{\sin(7x)}{7x}$.

2.

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{4x}$.

INDICE

Outil : la limite usuelle de $\dfrac{\tan x}{x}$ en 0.

3.

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{5x^2}$.

INDICE

Outil : la limite usuelle de $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ en 0.

4.

$\lim_{x\to \pi/3} \left(2\cos x + \sin^2 x\right)$.

INDICE

Outil : les limites de $\sin$ et de $\cos$ en un réel, puis produit et somme.

Exercice 7

Un encadrement simple

Les deux questions sont indépendantes.

1.

Montrer que, pour tout $x>0$, $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2}$.

INDICE

Outil : $|\cos x| \leq 1$, puis la limite par comparaison.

2.

Montrer que, pour tout $x<0$, $\dfrac{3}{x} \leq \dfrac{2+\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$. En déduire $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2+\sin x}{x}$.

INDICE

Outil : encadre $2+\sin x$, puis divise par x. **Point délicat :** diviser par un réel négatif renverse les inégalités.

Exercice 8

Limites de référence et opérations

Calculer les limites suivantes ; aucune n'est une forme indéterminée.

1.

$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x \right)$.

INDICE

Outil : les limites de référence en 0 à droite, puis la règle de la somme.

2.

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3}$.

INDICE

Outil : la limite de référence de $\frac{1}{x^n}$ en 0 à gauche. **Point délicat :** la parité de n.

3.

$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - 3) \left(2 + \frac{1}{x} \right)$.

INDICE

Outil : la limite de chaque facteur, puis la règle du produit.

4.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x^2 + \sqrt{x}}$.

INDICE

Outil : la limite du dénominateur, puis la règle du quotient.

Exercice 9

Repérer une forme indéterminée

Pour chaque limite, dire si les règles d'opérations concluent directement ou si l'on obtient une forme indéterminée. Calculer ensuite la limite.

1.

$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2)$.

INDICE

Outil : repère la forme, puis factorise par x^2.

2.

$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + \sqrt{x})$.

INDICE

Outil : la règle de la somme. Les deux termes ont-ils des limites de signes opposés ?

3.

$\lim_{x \to 0^+} \left(x \times \dfrac{3}{x^2} \right)$.

INDICE

Outil : repère la forme, puis simplifie le produit pour $x > 0$.

4.

$\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x}$.

INDICE

Outil : repère la forme, puis simplifie par x, qui est non nul.

Exercice 10

La partie entière près d'un entier

On note $E(x)$ la partie entière du réel x.

1.

Calculer $\lim_{x\to 3^+} E(x)$ et $\lim_{x\to 3^-} E(x)$. La fonction partie entière admet-elle une limite en 3 ?

INDICE

Outil : la valeur de $E(x)$ sur $]3,4[$ et sur $]2,3[$.

2.

Calculer $\lim_{x\to \frac{1}{2}} E(x)$.

INDICE

Outil : autour de $\dfrac{1}{2}$, reste dans un intervalle où E est constante.

3.

Calculer les limites à droite et à gauche de $x - E(x)$ en 0. Conclure.

INDICE

Outil : écris $x - E(x)$ sans partie entière sur $]0,1[$, puis sur $]-1,0[$.