BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Application	10

Exercice 1

Écrire une définition avec des quantificateurs

Dans cet exercice, g, h et k sont des fonctions dont on ne connaît aucune formule.

1.

On suppose g définie au voisinage de -2, sauf peut-être en -2. Écrire avec des quantificateurs la phrase « $\lim_{x\to -2} g(x) = 5$ ».

INDICE

Outil : la définition d'une limite finie en un point. **Point délicat :** lequel des deux réels ε et α est choisi en premier ? De quoi dépend l'autre ?

CORRIGÉ

D'après la définition d'une limite finie en un point, avec $a = -2$ et $\ell = 5$. Comme $|x-(-2)| = |x+2|$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\\ &\forall x \in D_g,\\ &\big(0 < |x+2| < \alpha\\ &\quad \Rightarrow |g(x) - 5| < \varepsilon\big).\end{aligned}$$

L'ordre compte : la tolérance ε est choisie d'abord, et l'écart α dépend de ε.

La condition $0 < |x+2|$ exclut $x = -2$: la valeur $g(-2)$, si elle existe, ne joue aucun rôle.

Conclusion. La phrase « $\lim_{x\to -2} g(x) = 5$ » s'écrit avec la formule ci-dessus.

2.

On suppose h définie sur $]0, +\infty[$. Écrire avec des quantificateurs la phrase « $\lim_{x\to +\infty} h(x) = -\infty$ ».

INDICE

Outil : la définition d'une limite infinie en $+\infty$. Il faut un seuil A pour les valeurs et un seuil B pour la variable.

CORRIGÉ

D'après la définition d'une limite égale à $-\infty$ en $+\infty$, avec $D_h =]0, +\infty[$: un seuil A pour les valeurs, un seuil B pour la variable.

$$\begin{aligned}&\forall A > 0,\ \exists B > 0,\\ &\forall x \in D_h,\\ &\big(x > B \Rightarrow h(x) < -A\big).\end{aligned}$$

Autrement dit, les valeurs $h(x)$ passent sous n'importe quel seuil $-A$ dès que x dépasse B.

Conclusion. La phrase « $\lim_{x\to +\infty} h(x) = -\infty$ » s'écrit avec la formule ci-dessus.

3.

La fonction k est définie au voisinage de 1, sauf en 1. Pour tout x tel que $0 < |x-1| < 0{,}01$, on a $|k(x) - 4| < 0{,}5$. Peut-on en conclure que $\lim_{x \to 1} k(x) = 4$?

INDICE

Outil : compare l'hypothèse à la définition. **Point délicat :** combien de valeurs de ε l'hypothèse traite-t-elle ?

CORRIGÉ

Non.

Ce que fournit l'hypothèse. Un écart, $0{,}01$, pour une seule tolérance, $0{,}5$. La définition de $\lim_{x \to 1} k(x) = 4$ exige un écart α pour **chaque** tolérance $\varepsilon > 0$, aussi petite soit-elle.

Contre-exemple. Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $k(x) = 4{,}2$. Elle vérifie l'hypothèse, car :

$$|4{,}2 - 4| = 0{,}2 < 0{,}5.$$

Par la limite d'une fonction constante, sa limite en 1 vaut $4{,}2$. Par unicité de la limite, elle ne vaut pas 4 .

Conclusion. L'hypothèse ne permet pas de conclure que $\lim_{x \to 1} k(x) = 4$.

Exercice 2

Polynômes et quotients en un point

Calculer chacune des limites suivantes ; justifier chaque réponse.

1.

$\lim_{x \to -1}(2x^3 - x + 4)$.

INDICE

Outil : la limite d'un polynôme en un point est sa valeur en ce point.

CORRIGÉ

Par la limite d'un polynôme en un point, la limite en -1 est la valeur du polynôme en -1 :

$$\begin{aligned}&\lim_{x \to -1}(2x^3 - x + 4)\\&= 2 \times (-1)^3 - (-1) + 4\\&= -2 + 1 + 4\\&= 3.\end{aligned}$$

Conclusion. $\lim_{x \to -1}(2x^3 - x + 4) = 3$.

2.

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 1}{2x + 1}$.

INDICE

Outil : la limite d'une fonction rationnelle en un point. **Point délicat :** vérifie d'abord que le dénominateur ne s'annule pas en 2.

CORRIGÉ

En 2, le dénominateur vaut $2 \times 2 + 1 = 5$, qui est non nul. Par la limite d'une fonction rationnelle en un point :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 1}{2x + 1} &= \frac{4 + 1}{5}\\&= 1.\end{aligned}$$

Conclusion. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 1}{2x + 1} = 1$.

3.

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-3x+2}{x+4}$.

INDICE

Outil : même propriété ; le dénominateur vaut 4 en 0.

CORRIGÉ

En 0, le dénominateur vaut 4, qui est non nul. Par la limite d'une fonction rationnelle en un point :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x+2}{x+4} &= \frac{0-0+2}{4}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-3x+2}{x+4} = \dfrac{1}{2}$.

4.

$\lim_{x\to \sqrt{2}} (x^4-2x^2)$.

INDICE

Outil : la limite d'un polynôme en un point. Calcule $(\sqrt{2})^2$, puis $(\sqrt{2})^4$.

CORRIGÉ

On a $(\sqrt{2})^2 = 2$, donc $(\sqrt{2})^4 = 2^2 = 4$. Par la limite d'un polynôme en un point :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \sqrt{2}} (x^4-2x^2) &= 4-2\times 2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Conclusion. $\lim_{x\to \sqrt{2}} (x^4-2x^2) = 0$.

Exercice 3

À l'infini : le terme de plus haut degré

Déterminer les limites suivantes, en citant la règle utilisée à chaque étape.

1.

$\lim_{x\to+\infty}(-2x^3+5x^2+1)$.

INDICE

Outil : un polynôme a, à l'infini, la limite de son terme de plus haut degré.

CORRIGÉ

Terme de plus haut degré. Par la règle du terme de plus haut degré, le polynôme a en $+\infty$ la même limite que $-2x^3$.

Limite de $-2x^3$. Par la limite de référence, $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$. Par produit par le réel $-2<0$, $-2x^3$ tend vers $-\infty$.

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty}(-2x^3+5x^2+1)=-\infty$.

2.

$\lim_{x\to-\infty}(x^4-7x^3)$.

INDICE

Outil : même règle. **Point délicat :** en $-\infty$, une puissance paire tend vers $+\infty$.

CORRIGÉ

Par la règle du terme de plus haut degré, la limite en $-\infty$ est celle de x^4.

L'exposant 4 est pair : par la limite de référence, $\lim_{x\to-\infty} x^4=+\infty$.

Conclusion. $\lim_{x\to-\infty}(x^4-7x^3)=+\infty$.

3.

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2+1}{1-3x^2}$.

INDICE

Outil : une fonction rationnelle a, à l'infini, la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

CORRIGÉ

Par la règle des termes de plus haut degré, la limite en $+\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré. Pour $x\neq 0$:

$$\frac{6x^2}{-3x^2}=-2.$$

Par la limite d'une fonction constante, ce quotient tend vers -2.

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2+1}{1-3x^2}=-2$.

4.

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5x+1}{x^2+1}$.

INDICE

Outil : même règle, puis la limite de référence de $\dfrac{1}{x}$ en $-\infty$.

CORRIGÉ

Par la règle des termes de plus haut degré, la limite en $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{5x}{x^2} = \frac{5}{x}.$$

Par la limite de référence, $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$; par produit par 5, $\dfrac{5}{x}$ tend vers 0 en $-\infty$.

Conclusion. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5x+1}{x^2+1} = 0$.

5.

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+1}{2x-3}$.

INDICE

Outil : même règle. **Point délicat :** simplifie le quotient des termes, puis regarde la parité de l'exposant restant.

CORRIGÉ

Par la règle des termes de plus haut degré, la limite en $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{x^3}{2x} = \frac{x^2}{2}.$$

L'exposant 2 est pair : par la limite de référence, $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$. Par produit par $\dfrac{1}{2} > 0$, $\dfrac{x^2}{2}$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+1}{2x-3} = +\infty$.

Exercice 4

Un dénominateur qui tend vers zéro

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

1.

Déterminer les limites, quand x tend vers -1, du numérateur et du dénominateur de $f(x)$.

INDICE

Outil : la limite d'un polynôme en un point.

CORRIGÉ

Par la limite d'un polynôme en un point, quand x tend vers -1 :

- le numérateur $x+2$ tend vers 1 ;
- le dénominateur $x+1$ tend vers 0.

Le numérateur a une limite non nulle : ce n'est pas une forme indéterminée. Il reste à étudier le signe du dénominateur près de -1.

Conclusion. Quand x tend vers -1, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur tend vers 0.

2.

Étudier le signe de $x+1$, puis calculer $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to -1^-} f(x)$.

INDICE

Outil : la règle du quotient quand le dénominateur tend vers 0 en gardant un signe constant.

CORRIGÉ

Signe de $x+1$. Si $x > -1$, alors $x+1 > 0$; si $x < -1$, alors $x+1 < 0$.

À droite de -1. Le numérateur tend vers $1 > 0$ et le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives. Par la règle du quotient :

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty.$$

À gauche de -1. Le numérateur tend vers $1 > 0$ et le dénominateur tend vers 0 par valeurs négatives. Par la règle du quotient :

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty.$$

Conclusion. Le réel $x+1$ est strictement positif à droite de -1 et strictement négatif à gauche ; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$.

3.

La fonction f admet-elle une limite en -1 ?

INDICE

Outil : la propriété qui relie la limite en un point aux limites à droite et à gauche.

CORRIGÉ

D'après la question 2, les limites à droite et à gauche en -1 existent : $+\infty$ et $-\infty$. Elles sont différentes.

D'après la propriété des limites à droite et à gauche, une limite de f en -1 serait à la fois sa limite à droite et sa limite à gauche : c'est impossible.

Conclusion. La fonction f n'admet pas de limite en -1.

4.

Calculer $\lim_{x \to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2}$.

INDICE

Outil : même démarche. **Point délicat :** un carré non nul est strictement positif, des deux côtés de 2.

CORRIGÉ

Numérateur. Il est constant, égal à $3 > 0$.

Dénominateur. Par la limite d'un polynôme en un point, $(x-2)^2$ tend vers 0 quand x tend vers 2. Pour tout $x \neq 2$, $(x-2)^2 > 0$: le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives, à droite comme à gauche de 2.

Limite. Par la règle du quotient, les limites à droite et à gauche en 2 valent toutes deux $+\infty$. D'après la propriété des limites à droite et à gauche :

$$\lim_{x \to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty.$$

Conclusion. La limite cherchée vaut $+\infty$.

Exercice 5

Lever une forme 0/0 par factorisation

Pour chaque limite, montrer qu'on obtient la forme $\frac{0}{0}$, puis la calculer.

1.

$\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

INDICE

Outil : factorise chaque trinôme par $x-3$. **Début :** 3 est racine des deux.

CORRIGÉ

Forme indéterminée. En 3, le numérateur vaut $9-9=0$ et le dénominateur vaut $9-6-3=0$: c'est la forme $\frac{0}{0}$.

Factorisation. Le réel 3 est racine des deux trinômes. Pour tout réel x, $x^2-9=(x-3)(x+3)$ et $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$.

Simplification. Pour $x\neq 3$ et $x\neq -1$:

$$\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\frac{x+3}{x+1}.$$

Limite. Le dénominateur $x+1$ vaut $4\neq 0$ en 3. Par la limite d'une fonction rationnelle en un point, la limite vaut $\frac{3+3}{3+1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

Conclusion. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\dfrac{3}{2}$.

2.

$\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}$.

INDICE

Outil : factorise le numérateur en regroupant les termes deux par deux.

CORRIGÉ

Forme indéterminée. En 1, le numérateur vaut $1-1+2-2=0$ et le dénominateur vaut 0 : c'est la forme $\frac{0}{0}$.

Factorisation. On regroupe les termes deux par deux. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &x^3-x^2+2x-2\\ &=x^2(x-1)+2(x-1)\\ &=(x-1)(x^2+2). \end{aligned}$$

Limite. Pour $x\neq 1$, le quotient vaut x^2+2. Par la limite d'un polynôme en un point, la limite vaut $1^2+2=3$.

Conclusion. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=3$.

3.

$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x + 1}$.

INDICE

Outil : les racines du trinôme $2x^2 - x - 1$. **Point délicat :** écris la factorisation avec le facteur $2x + 1$.

CORRIGÉ

Forme indéterminée. En $-\dfrac{1}{2}$, le numérateur vaut $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - 1 = 0$ et le dénominateur vaut 0 : c'est la forme $\dfrac{0}{0}$.

Factorisation. Le trinôme $2x^2 - x - 1$ a pour racines 1 et $-\dfrac{1}{2}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & 2x^2 - x - 1 \\ & = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1) \\ & = (2x + 1)(x - 1). \end{aligned}$$

Limite. Pour $x \neq -\dfrac{1}{2}$, le quotient vaut $x - 1$. Par la limite d'un polynôme en un point, la limite vaut $-\dfrac{1}{2} - 1$, soit $-\dfrac{3}{2}$.

Conclusion. $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x + 1} = -\dfrac{3}{2}$.

Exercice 6

Limites trigonométriques directes

Les mesures sont en radians. Calculer les limites suivantes.

1.

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{3x}$.

INDICE

Outil : fais apparaître $\dfrac{\sin(7x)}{7x}$.

CORRIGÉ

Pour $x \neq 0$, on fait apparaître $\dfrac{\sin(7x)}{7x}$:

$$\frac{\sin(7x)}{3x} = \frac{7}{3} \times \frac{\sin(7x)}{7x}.$$

Par la limite usuelle de $\dfrac{\sin(cx)}{cx}$ en 0, avec $c = 7$, le second facteur tend vers 1. Par produit, la limite vaut $\dfrac{7}{3} \times 1 = \dfrac{7}{3}$.

Conclusion. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{3x} = \dfrac{7}{3}$.

2.

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{4x}$.

INDICE

Outil : la limite usuelle de $\dfrac{\tan x}{x}$ en 0.

CORRIGÉ

Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ avec $x \neq 0$:

$$\frac{\tan x}{4x} = \frac{1}{4} \times \frac{\tan x}{x}.$$

Par la limite usuelle de $\dfrac{\tan x}{x}$ en 0, le second facteur tend vers 1. Par produit, la limite vaut $\dfrac{1}{4}$.

Conclusion. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{4x} = \dfrac{1}{4}$.

3.

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{5x^2}$.

INDICE

Outil : la limite usuelle de $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ en 0.

CORRIGÉ

Pour $x \neq 0$:

$$\frac{1-\cos x}{5x^2} = \frac{1}{5} \times \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Par la limite usuelle $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et par produit, la limite vaut $\dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10}$.

Conclusion. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{5x^2} = \dfrac{1}{10}$.

4.

$\lim_{x\to \pi/3} \left(2\cos x + \sin^2 x\right)$.

INDICE

Outil : les limites de $\sin$ et de $\cos$ en un réel, puis produit et somme.

CORRIGÉ

Par les limites de sinus et de cosinus en un réel, quand x tend vers $\dfrac{\pi}{3}$:

- $\cos x$ tend vers $\cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$;
- $\sin x$ tend vers $\sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Par produit, $\sin^2 x$ tend vers $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$. Par produit et par somme :

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \left(2\cos x + \sin^2 x\right) \\ &= 2 \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. La limite cherchée vaut $\dfrac{7}{4}$.

Exercice 7

Un encadrement simple

Les deux questions sont indépendantes.

1.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2}$.

INDICE

Outil : $|\cos x| \leq 1$, puis la limite par comparaison.

CORRIGÉ

Inégalité. Soit $x > 0$. On a $|\cos x| \leq 1$ et $x^2 > 0$. Donc :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| &= \frac{|\cos x|}{x^2} \\ &\leq \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

Limite. Par la limite de référence, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. Par comparaison, $\dfrac{\cos x}{x^2}$ tend vers 0 en $+\infty$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$, et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2} = 0$.

2.

Montrer que, pour tout $x < 0$, $\dfrac{3}{x} \leq \dfrac{2+\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$. En déduire $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2+\sin x}{x}$.

INDICE

Outil : encadre $2 + \sin x$, puis divise par x. **Point délicat :** diviser par un réel négatif renverse les inégalités.

CORRIGÉ

Encadrement. Pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$. Soit $x < 0$. Diviser par le réel strictement négatif x renverse les inégalités :

$$\frac{3}{x} \leq \frac{2+\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Limite. Par la limite de référence, $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; par produit par 3, $\dfrac{3}{x}$ tend aussi vers 0 en $-\infty$. Par encadrement, $\dfrac{2+\sin x}{x}$ tend vers 0.

Conclusion. Pour tout $x < 0$, $\dfrac{3}{x} \leq \dfrac{2+\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$, et $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2+\sin x}{x} = 0$.

Exercice 8

Limites de référence et opérations

Calculer les limites suivantes ; aucune n'est une forme indéterminée.

1.

$\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x\right)$.

INDICE

Outil : les limites de référence en 0 à droite, puis la règle de la somme.

CORRIGÉ

Par la limite de référence en 0 à droite, $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$. Par la limite d'un polynôme en un point, $\lim_{x\to 0^+}x=0$.

Par somme, la limite vaut $+\infty$.

Conclusion. $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x\right)=+\infty$.

2.

$\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^3}$.

INDICE

Outil : la limite de référence de $\dfrac{1}{x^n}$ en 0 à gauche. **Point délicat :** la parité de n.

CORRIGÉ

Ici $\dfrac{1}{x^3}$ est de la forme $\dfrac{1}{x^n}$ avec $n=3$, qui est impair.

Par la limite de référence de $\dfrac{1}{x^n}$ en 0 à gauche, pour n impair, la limite vaut $-\infty$.

Conclusion. $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^3}=-\infty$.

3.

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-3)\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$.

INDICE

Outil : la limite de chaque facteur, puis la règle du produit.

CORRIGÉ

Premier facteur. Par la limite de référence, $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$; par somme, $\sqrt{x}-3$ tend vers $+\infty$.

Second facteur. Par la limite de référence, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 ; par somme, $2+\dfrac{1}{x}$ tend vers $2>0$.

Produit. Par produit, la limite vaut $+\infty$.

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-3)\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$.

4.

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x^2 + \sqrt{x}}$.

INDICE

Outil : la limite du dénominateur, puis la règle du quotient.

CORRIGÉ

Par les limites de référence, x^2 et $\sqrt{x}$ tendent vers $+\infty$ en $+\infty$; par somme, le dénominateur $x^2 + \sqrt{x}$ tend vers $+\infty$.

Le numérateur est constant, égal à 4. Par la règle du quotient, la limite vaut 0.

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x^2 + \sqrt{x}} = 0$.

Exercice 9

Repérer une forme indéterminée

Pour chaque limite, dire si les règles d'opérations concluent directement ou si l'on obtient une forme indéterminée. Calculer ensuite la limite.

1.

$\lim_{x\to+\infty}(x^3-2x^2)$.

INDICE

Outil : repère la forme, puis factorise par x^2.

CORRIGÉ

Forme. Par les limites de référence, x^3 tend vers $+\infty$; par produit par -2, $-2x^2$ tend vers $-\infty$. C'est la forme $(+\infty)+(-\infty)$: les règles d'opérations ne concluent pas.

Factorisation. Pour tout réel x, $x^3-2x^2=x^2(x-2)$. Par la limite de référence, x^2 tend vers $+\infty$; par somme, $x-2$ tend vers $+\infty$. Par produit, $x^2(x-2)$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. On obtient une forme indéterminée, et $\lim_{x\to+\infty}(x^3-2x^2)=+\infty$.

2.

$\lim_{x\to+\infty}(x^2+\sqrt{x})$.

INDICE

Outil : la règle de la somme. Les deux termes ont-ils des limites de signes opposés ?

CORRIGÉ

Par les limites de référence, x^2 et $\sqrt{x}$ tendent tous deux vers $+\infty$ en $+\infty$. Les deux limites ont le même signe : ce n'est pas une forme indéterminée.

Par somme, la limite vaut $+\infty$.

Conclusion. Les règles d'opérations concluent directement : $\lim_{x\to+\infty}(x^2+\sqrt{x})=+\infty$.

3.

$\lim_{x\to 0^+}\left(x\times\dfrac{3}{x^2}\right)$.

INDICE

Outil : repère la forme, puis simplifie le produit pour $x>0$.

CORRIGÉ

Forme. Par la limite d'un polynôme en un point, le facteur x tend vers 0. Par la limite de référence de $\dfrac{1}{x^2}$ en 0 et par produit par 3, $\dfrac{3}{x^2}$ tend vers $+\infty$. C'est la forme $0\times(+\infty)$.

Simplification. Pour $x>0$:

$$x\times\frac{3}{x^2}=\frac{3}{x}.$$

Par la limite de référence en 0 à droite, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$; par produit par $3>0$, la limite vaut $+\infty$.

Conclusion. On obtient une forme indéterminée, et $\lim_{x\to 0^+}\left(x\times\dfrac{3}{x^2}\right)=+\infty$.

4.

$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x}$.

INDICE

Outil : repère la forme, puis simplifie par x, qui est non nul.

CORRIGÉ

Forme. Par la limite d'un polynôme en un point, le numérateur x^2+x et le dénominateur x tendent vers 0 : c'est la forme $\dfrac{0}{0}$.

Simplification. Pour $x\neq 0$:

$$\frac{x^2+x}{x}=\frac{x(x+1)}{x}=x+1.$$

Par la limite d'un polynôme en un point, la limite vaut $0+1=1$.

Conclusion. On obtient une forme indéterminée, et $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x}=1$.

Exercice 10

La partie entière près d'un entier

On note $E(x)$ la partie entière du réel x.

1.

Calculer $\lim_{x\to 3^+} E(x)$ et $\lim_{x\to 3^-} E(x)$. La fonction partie entière admet-elle une limite en 3 ?

INDICE

Outil : la valeur de $E(x)$ sur $]3,4[$ et sur $]2,3[$.

CORRIGÉ

À droite de 3. Si $3<x<4$, alors $E(x)=3$: la fonction E est constante sur $]3,4[$. Par la limite d'une fonction constante, $\lim_{x\to 3^+} E(x)=3$.

À gauche de 3. Si $2<x<3$, alors $E(x)=2$. Par la limite d'une fonction constante, $\lim_{x\to 3^-} E(x)=2$.

Limite en 3. Les deux limites diffèrent : d'après la propriété des limites à droite et à gauche, la partie entière n'admet pas de limite en 3.

Conclusion. $\lim_{x\to 3^+} E(x)=3$ et $\lim_{x\to 3^-} E(x)=2$; la fonction partie entière n'admet pas de limite en 3.

2.

Calculer $\lim_{x\to \frac{1}{2}} E(x)$.

INDICE

Outil : autour de $\dfrac{1}{2}$, reste dans un intervalle où E est constante.

CORRIGÉ

Pour tout $x\in]0,1[$, $E(x)=0$. Cet intervalle contient tous les réels x tels que $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$, donc tous les réels assez proches de $\dfrac{1}{2}$.

Près de $\dfrac{1}{2}$, la fonction E est donc constante, égale à 0. Par la limite d'une fonction constante, sa limite en $\dfrac{1}{2}$ vaut 0.

Conclusion. $\lim_{x\to \frac{1}{2}} E(x)=0$.

3.

Calculer les limites à droite et à gauche de $x - E(x)$ en 0. Conclure.

INDICE

Outil : écris $x - E(x)$ sans partie entière sur $]0, 1[$, puis sur $]-1, 0[$.

CORRIGÉ

À droite de 0. Si $0 < x < 1$, alors $E(x) = 0$, donc $x - E(x) = x$. Par la limite d'un polynôme en un point, la limite à droite vaut 0.

À gauche de 0. Si $-1 < x < 0$, alors $E(x) = -1$, donc $x - E(x) = x + 1$. Par la limite d'un polynôme en un point, la limite à gauche vaut $0 + 1 = 1$.

Conclusion. Les limites à droite et à gauche en 0 valent 0 et 1. Elles diffèrent : d'après la propriété des limites à droite et à gauche, la fonction $x \mapsto x - E(x)$ n'a pas de limite en 0.