BURHAN

Limite d'une fonction numérique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limite-d-une-fonction/cours

Chapitre	Semestre
Limite d'une fonction numérique	Semestre 1

Que vaut une fonction là où elle n'est pas définie ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$.

En 2, le dénominateur s'annule : $f(2)$ n'existe pas. Pourtant, rien n'empêche de calculer $f(x)$ pour x proche de 2.

À gauche de 2, pour $x = 1{,}9$ puis $x = 1{,}99$, on trouve $f(x) = 11{,}41$ puis $f(x) = 11{,}9401$.

À droite de 2, pour $x = 2{,}1$ puis $x = 2{,}01$, on trouve $f(x) = 12{,}61$ puis $f(x) = 12{,}0601$.

Que se passe-t-il quand x se rapproche encore de 2 ?

Devine : Une prédiction

D'après ces valeurs, de quel nombre $f(x)$ semble-t-il se rapprocher quand x se rapproche de 2 ?

A. De 0, car $2^3 - 8 = 0$.

Faux.

Le numérateur tend vers 0, mais le dénominateur aussi. Les valeurs calculées restent proches de 12.

B. De 1, car « $\dfrac{0}{0} = 1$ ».

Faux.

L'écriture « $\dfrac{0}{0}$ » n'a pas de valeur. Les valeurs calculées ne sont pas proches de 1.

C. De 12, des deux côtés de 2.

Juste.

Juste : à gauche comme à droite de 2, les valeurs se resserrent autour de 12.

D. D'aucun nombre, car $f(2)$ n'existe pas.

Faux.

La valeur en 2 ne compte pas : on regarde $f(x)$ pour x proche de 2, et différent de 2.

Correction

Les valeurs $11{,}41$; $11{,}9401$; $12{,}0601$; $12{,}61$ se resserrent autour de 12. On dira que $f(x)$ **tend vers** 12 quand x tend vers 2.

Ce n'est encore qu'une impression : un tableau ne montre que quelques valeurs. Ce chapitre donne un sens précis à « se rapprocher », puis des règles pour calculer.

Dans ce chapitre, tu apprends à justifier ce qu'un tableau de valeurs suggère. Que devient $f(x)$ près d'un point où f n'est pas définie ? Et quand x devient très grand ?

Tu emploies les quantificateurs du chapitre « Notions de logique ». Tu retrouves la partie entière et les fonctions de référence du chapitre « Généralités sur les fonctions numériques ». Tu réutilises aussi les formules du chapitre « Calcul trigonométrique ».

Rappels : distance, valeur absolue, quantificateurs

Distance et valeur absolue

Petit rappel. Pour deux réels x et a, $|x-a|$ est la distance entre x et a sur la droite des réels.

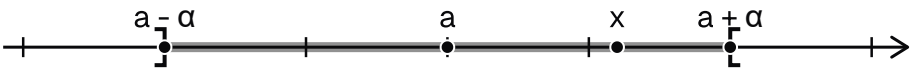
Soit $\alpha > 0$. L'inégalité $|x-a| < \alpha$ équivaut à $a-\alpha < x < a+\alpha$, c'est-à-dire :

$$x \in]a-\alpha, a+\alpha[\,.$$

La condition $0 < |x-a|$ signifie seulement $x \neq a$.

Enfin, pour tous réels u et v, l'**inégalité triangulaire** s'écrit :

$$|u+v| \leq |u| + |v|.$$



Les réels x situés à moins de α de a remplissent l'intervalle ouvert centré en a, de a – α à a + α.

Vérifie : Lire une distance

Quel est l'ensemble des réels x tels que $0 < |x-3| < 0{,}1$?

A. $]2{,}9, 3{,}1[$

Faux.

Cet intervalle contient 3. Or $|3-3| = 0$, et $0 < 0$ est faux.

B. $]3, 3{,}1[$

Faux.

Il manque les réels situés à gauche de 3, comme $2{,}95$.

C. $[2{,}9, 3{,}1]$

Faux.

Les bornes sont exclues : $|2{,}9-3| = 0{,}1$, qui n'est pas strictement inférieur à $0{,}1$.

D. $]2{,}9, 3[\cup]3, 3{,}1[$

Juste.

Juste : les réels à moins de $0{,}1$ de 3, sauf 3 lui-même.

Correction
La condition $|x-3|<0{,}1$ équivaut à $2{,}9<x<3{,}1$. La condition $0<|x-3|$ exclut $x=3$. L'ensemble cherché est donc :

$$]2{,}9,3[\cup]3,3{,}1[\,.$$

C'est un intervalle ouvert centré en 3, privé de son centre : exactement ce que décrit la condition des définitions de ce chapitre.

L'ordre des quantificateurs

L'ordre compte. Au chapitre « Notions de logique », tu as vu que l'ordre des quantificateurs change le sens.

Dans « $\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0$ », le réel α est choisi **après** ε : il peut en dépendre.

Dans « $\exists \alpha>0,\ \forall \varepsilon>0$ », un même α doit servir pour tous les ε.

Les définitions de ce chapitre ont la première forme. Pour les démontrer, on écrit donc toujours d'abord : « Soit $\varepsilon>0$ ».

À toi : Deux nombres proches d'un même réel

Soit ℓ, ℓ' et y trois réels tels que $|y-\ell|<0{,}5$ et $|y-\ell'|<0{,}5$. Montre que $|\ell-\ell'|<1$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris $\ell-\ell'$ comme une somme de deux différences où figure y.
Indice 2
On a $\ell-\ell'=(\ell-y)+(y-\ell')$: applique l'inégalité triangulaire.
Indice 3
Point délicat : $|\ell-y|=|y-\ell|$, car une distance ne dépend pas de l'ordre.

Réponse
Soit ℓ, ℓ' et y comme dans l'énoncé. On écrit :

$$\begin{aligned}&\ell-\ell'\\&=(\ell-y)+(y-\ell').\end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}&|\ell-\ell'|\\&\leq|\ell-y|+|y-\ell'|.\end{aligned}$$

Or $|\ell-y|=|y-\ell|<0{,}5$ et $|y-\ell'|<0{,}5$.

Conclusion. $|\ell-\ell'|<0{,}5+0{,}5=1$. Retiens ce geste : il resservira pour l'unicité de la limite.

Limite finie en un point

Se rapprocher, mais à quelle distance ?

En clair. Reprends la fonction f de l'entrée. Pour $x \neq 2$:

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4),$$

donc $f(x)$ vaut x^2+2x+4.

Dire que $f(x)$ tend vers 12, c'est jouer à un jeu en deux temps. On fixe d'abord une **tolérance** autour de 12, aussi petite qu'on veut. On cherche ensuite un **écart** autour de 2 : pour tout $x \neq 2$ dans cet écart, $f(x)$ respecte la tolérance. C'est un zoom.

Devine : Quel écart pour cette tolérance ?

On veut $|f(x) - 12| < 0{,}1$. Quelle condition sur x suffit, d'après toi ?

A. $x = 2$

Faux.
$f(2)$ n'existe pas : la condition porte sur des x différents de 2.

B. $0 < |x-2| < 0{,}1$

Faux.
Trop large : pour $x = 2{,}09$, $f(x) - 12 = 0{,}09 \times 6{,}09 = 0{,}5481$, qui dépasse $0{,}1$.

C. $0 < |x-2| < 0{,}01$

Juste.
Juste : alors $|f(x) - 12| = |x-2||x+4| < 0{,}01 \times 6{,}01 < 0{,}1$.

D. Aucune : $f(x)$ n'est jamais à moins de $0{,}1$ de 12.

Faux.
Les valeurs de l'entrée montrent le contraire : $f(1{,}99) = 11{,}9401$.

Correction
Pour $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} f(x) - 12 &= x^2 + 2x - 8 \\ &= (x-2)(x+4). \end{aligned}$$

Si $0 < |x-2| < 0{,}01$, alors $|x+4| < 6{,}01$, donc :

$$\begin{aligned} |f(x) - 12| &< 0{,}01 \times 6{,}01 \\ &= 0{,}0601 < 0{,}1. \end{aligned}$$

Pour une tolérance plus petite, il faudra un écart plus petit : l'écart dépend de la tolérance.

La définition

Définition : Limite finie en un point

Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a : il existe un réel $r > 0$ tel que $]a-r, a[\cup]a, a+r[\subset D_f$. Soit ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite** ℓ **en** a, ou que $f(x)$ **tend vers** ℓ **quand** x **tend vers** a, et on écrit $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f,\ \big(0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\big).$$

Autrement dit, $f(x)$ est aussi proche de ℓ qu'on le veut dès que x, distinct de a, est assez proche de a. Le réel α est choisi **après** ε : il dépend de ε. La valeur $f(a)$, si elle existe, ne joue aucun rôle.

Remarque

La définition ne regarde que les x proches de a et distincts de a.

Deux fonctions égales sur un ensemble $]a-r, a[\cup]a, a+r[$ ont donc la même limite en a. C'est ce qui permet de simplifier par $x - a$.

Exemple : Exemple guidé : une limite par la définition

Énoncé. Montrons que $\lim_{x \to 2}(3x - 1) = 5$.

Majoration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} |(3x-1) - 5| &= |3x - 6| \\ &= 3|x - 2|. \end{aligned}$$

Choix de l'écart. Posons $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{3}$; alors $\alpha > 0$.

Vérification. Soit x tel que $0 < |x-2| < \alpha$. Alors :

$$\begin{aligned} |(3x-1) - 5| &= 3|x-2| \\ &< 3\alpha = \varepsilon. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la définition, $\lim_{x \to 2}(3x-1) = 5$.

Méthode, puis à toi

Méthode : démontrer une limite par la définition

1. **Écrire** « Soit $\varepsilon > 0$ » : ε est donné, quelconque.
2. **Majorer** $|f(x) - \ell|$ par une expression simple en $|x - a|$, par exemple $k|x-a|$. Au besoin, se restreindre d'abord à $|x-a| < 1$.
3. **Choisir** α en fonction de ε : par exemple $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$, ou le plus petit des réels 1 et $\dfrac{\varepsilon}{k}$.

4. **Conclure** : pour tout $x \in D_f$ tel que $0 < |x - a| < \alpha$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

À toi : Une limite par la définition

Démontre, par la définition, que $\lim_{x \to 1}(5 - 2x) = 3$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par « Soit $\varepsilon > 0$ », puis calcule $|(5 - 2x) - 3|$.
Indice 2
On trouve $|2 - 2x| = 2|x - 1|$: cherche α en fonction de ε.
Indice 3
Point délicat : α est choisi après ε, et doit être strictement positif.

Réponse
Majoration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &|(5 - 2x) - 3| \\ &= |2 - 2x| \\ &= 2|x - 1|. \end{aligned}$$

Choix de l'écart. Posons $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2}$; alors $\alpha > 0$.

Vérification. Soit x tel que $0 < |x - 1| < \alpha$. Alors :

$$\begin{aligned} |(5 - 2x) - 3| &= 2|x - 1| \\ &< 2\alpha = \varepsilon. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la définition, $\lim_{x \to 1}(5 - 2x) = 3$.

Une seule limite

Le tableau de l'entrée suggère 12. Pourrait-il suggérer aussi un autre nombre ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve raisonne par l'absurde. Elle choisit une tolérance égale à la moitié de l'écart entre deux limites supposées. Un même $f(x)$ ne peut pas être si près des deux à la fois.

Propriété : Unicité de la limite

Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a. Si f admet une limite finie en a, cette limite est **unique** : si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to a} f(x) = \ell'$, alors $\ell = \ell'$. Il en est de même pour une limite finie à droite ou à gauche en a.

Démonstration

Étape 1. Raisonnons par l'absurde : supposons $\ell \neq \ell'$, et posons $\varepsilon = \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$; alors $\varepsilon > 0$.

Étape 2. D'après FO1 appliquée à ℓ, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in D_f$, $0 < |x-a| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$. De même pour ℓ', avec un réel $\alpha_2 > 0$.

Étape 3. Soit $r > 0$ tel que $]a-r, a[\cup]a, a+r[\subset D_f$, et α le plus petit des réels α_1, α_2 et r. Le réel $x = a + \dfrac{\alpha}{2}$ appartient à D_f et vérifie $0 < |x-a| < \alpha$. Il est à droite de a : la même preuve vaut pour une limite à droite, avec $]a, a+r[\subset D_f$; à gauche, on prend $x = a - \dfrac{\alpha}{2}$.

Étape 4. Par l'inégalité triangulaire, $|\ell - \ell'| \leq |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| < 2\varepsilon = |\ell - \ell'|$. C'est une contradiction : donc $\ell = \ell'$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour séparer deux réels distincts ℓ et ℓ', on prend :

$$\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{2}.$$

Un même $f(x)$ à moins de ε de chacun donnerait, par l'inégalité triangulaire, $|\ell - \ell'| < 2\varepsilon$: c'est absurde.

Retiens aussi le choix de α : le plus petit des réels en jeu.

Vérifie : Le choix de la tolérance

Dans la preuve, pourquoi choisit-on $\varepsilon = \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$?

A. Pour aboutir à $|\ell - \ell'| < |\ell - \ell'|$.

Juste.

Juste : l'inégalité triangulaire donne $|\ell - \ell'| < 2\varepsilon$, et $2\varepsilon = |\ell - \ell'|$.

B. Parce que ε doit être plus petit que 1.

Faux.

Rien n'impose $\varepsilon < 1$: si ℓ et ℓ' sont loin l'un de l'autre, ce ε est grand.

C. Pour que $a + \dfrac{\alpha}{2}$ appartienne à D_f.

Faux.

C'est le choix de α, plus petit que r, qui le garantit.

D. Parce que la définition impose ce réel.

Faux.

La définition vaut pour tout $\varepsilon > 0$: c'est la preuve qui choisit celui-ci.

Correction

Avec $\varepsilon = \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$, la preuve trouve un x tel que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$. L'inégalité triangulaire donne alors :

$$|\ell - \ell'| < 2\varepsilon = |\ell - \ell'|.$$

> Un réel n'est pas strictement inférieur à lui-même : c'est la contradiction cherchée.

Exemple : $5{,}1$ n'est pas la limite

On a montré que $\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$. Par l'unicité, $5{,}1$ n'est pas une limite de $3x-1$ en 2. Vérifions-le avec $\varepsilon = 0{,}05$.

Soit $\alpha > 0$. Le réel

$$x = 2 + \frac{1}{2}\min\left(\alpha, \frac{1}{60}\right)$$

vérifie $0 < |x-2| < \alpha$. De plus, $0 < x - 2 \leq \dfrac{1}{120}$, donc :

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 5 + 3(x-2) \\ &\leq 5 + \frac{1}{40} < 5{,}05. \end{aligned}$$

Ainsi $|(3x-1) - 5{,}1| > 0{,}05$: aucun α ne convient. La définition n'est pas vérifiée avec $5{,}1$.

Limites de référence ; un exemple plus fin

Démontrer chaque limite par la définition serait long. On part donc de quelques limites de **référence**, très simples.

Par exemple, x^3 vaut $0{,}001$ pour $x = 0{,}1$, et $-0{,}000001$ pour $x = -0{,}01$. Les puissances de x s'écrasent vers 0 quand x tend vers 0.

Propriété : Limites de référence en un point : constantes et puissances

- Pour tous réels a et c : $\lim_{x\to a} c = c$ (fonction constante).
- Pour tout entier $n \geq 1$: $\lim_{x\to 0} x^n = 0$.
- $\lim_{x\to 0}|x| = 0$.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : se restreindre d'abord à $\lvert x - a \rvert < 1$

Énoncé. Montrons, par la définition, que $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2} = 12$.

Majoration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \neq 2$, le quotient vaut x^2+2x+4, et son écart avec 12 vaut :

$$|x-2| \times |x+4|.$$

Le facteur $|x+4|$ n'est pas constant : on se restreint d'abord à $|x-2|<1$. Alors $1<x<3$, donc $|x+4|<7$.

Choix de l'écart. Posons $\alpha=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{7}\right)$; alors $\alpha>0$.

Vérification. Soit x tel que $0<|x-2|<\alpha$. Comme $\alpha\leq 1$, on a $|x+4|<7$. L'écart est donc strictement inférieur à 7α, et $7\alpha\leq\varepsilon$.

Conclusion. D'après la définition, la limite vaut 12.

Se ramener en 0

Changer de variable

Devine : Poser x = 2 + h

On pose $x=2+h$. Quand x tend vers 2, que fait h, et que devient x^2 ?

A. h tend vers 0, et $x^2=4+4h+h^2$.

Juste.
Juste : $h=x-2$, et l'identité remarquable donne $(2+h)^2=4+4h+h^2$.

B. h tend vers 2, et $x^2=4+h^2$.

Faux.
$h=x-2$: quand x se rapproche de 2, h se rapproche de 0.

C. h tend vers 0, et $x^2=4+h^2$.

Faux.
$(2+h)^2=4+4h+h^2$: le double produit $4h$ manque.

D. h tend vers -2, et $x^2=4-4h+h^2$.

Faux.
$h=x-2$ se rapproche de $2-2=0$.

Correction
Avec $x=2+h$, on a $h=x-2$: « x proche de 2 » devient « h proche de 0 ». Par l'identité remarquable :

$$x^2=(2+h)^2=4+4h+h^2.$$

Étudier x^2 près de 2 revient donc à étudier $4+4h+h^2$ près de 0, où les termes $4h$ et h^2 deviennent petits.

Étudier f près de a, ou étudier $h\mapsto f(a+h)$ près de 0 : est-ce la même chose ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve compare les deux définitions. Avec $x=a+h$, la condition sur h et la condition sur x sont les mêmes.

Se ramener en 0

Propriété : Se ramener à une limite en 0

Soit a et ℓ deux réels, et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a.

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell$.
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x\to a} \big(f(x) - \ell\big) = 0$, si et seulement si $\lim_{x\to a} |f(x) - \ell| = 0$.
3. Soit g une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut-être en 0, et c un réel non nul. Si $\lim_{t\to 0} g(t) = \ell$, alors $\lim_{x\to 0} g(cx) = \ell$.

Démonstration

Étape 1. Posons $x = a + h$; la fonction $h \mapsto f(a+h)$ est définie sur $]-r, 0[\cup]0, r[$. Pour h réel, $0 < |h| < \alpha$ équivaut à $0 < |x - a| < \alpha$, et $f(a+h) = f(x)$. Les deux propositions de F01 qui définissent les limites du point 1 sont donc les mêmes.

Étape 2. Pour tout $x \in D_f$, $\big|(f(x) - \ell) - 0\big| = |f(x) - \ell| = \big||f(x) - \ell| - 0\big|$: les trois propositions de F01 du point 2 sont identiques.

Étape 3. Soit $\varepsilon > 0$. D'après F01, il existe $\alpha > 0$ tel que $|g(t) - \ell| < \varepsilon$ pour tout $t \in D_g$ vérifiant $0 < |t| < \alpha$. Posons $\beta = \dfrac{\alpha}{|c|}$; la fonction $x \mapsto g(cx)$ est définie au voisinage de 0, sauf peut-être en 0. Soit x tel que $cx \in D_g$ et $0 < |x| < \beta$: alors $0 < |cx| < \alpha$, donc $|g(cx) - \ell| < \varepsilon$. C'est la définition de $\lim_{x\to 0} g(cx) = \ell$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un changement de variable affine ne change pas la définition : il la récrit.

- Avec $x = a + h$, « x proche de a » devient « h proche de 0 ».
- Avec $t = cx$, les écarts sont multipliés par $|c|$: on prend $\beta = \dfrac{\alpha}{|c|}$.

On peut donc toujours **se ramener en** 0.

Vérifie : Le bon écart

Au point 3, on sait que $|g(t) - \ell| < \varepsilon$ dès que $0 < |t| < \alpha$. Avec $c = 4$, quel écart β convient pour $g(4x)$?

A. $\beta = 4\alpha$

Faux.
Pour $|x|$ proche de 4α, $|4x|$ est proche de 16α : trop loin.

B. $\beta = \alpha$

Faux.

Pour $|x|$ proche de α, $|4x|$ dépasse α.

C. $\beta = \alpha - 4$

Faux.

Ce réel peut être négatif, et il ne tient pas compte du facteur 4.

D. $\beta = \dfrac{\alpha}{4}$

Juste.

Juste : si $0 < |x| < \dfrac{\alpha}{4}$, alors $0 < |4x| < \alpha$.

Correction

Posons $\beta = \dfrac{\alpha}{4}$. Soit x tel que $0 < |x| < \beta$.

Alors $|4x| = 4|x| < \alpha$, et $4x \neq 0$. Donc $|g(4x) - \ell| < \varepsilon$.

C'est la définition de $\lim_{x \to 0} g(4x) = \ell$.

S'en servir

Exemple : trois écritures d'une même limite

On a montré que $\lim_{x \to 2}(3x - 1) = 5$.

- D'après le point 1, avec $x = 2 + h$: $3(2 + h) - 1 = 5 + 3h$. Donc $\lim_{h \to 0}(5 + 3h) = 5$.
- D'après le point 2, $\lim_{x \to 2}\big((3x - 1) - 5\big) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x \to 2}(3x - 6) = 0$.
- Toujours d'après le point 2, $\lim_{x \to 2}|3x - 6| = 0$.

Ces trois limites disent la même chose. On choisit l'écriture la plus commode.

À toi : Se ramener en 0, puis conclure

En posant $x = -1 + h$, ramène $\lim_{x \to -1}(4x + 7) = 3$ à une limite en 0. Démontre ensuite cette limite en 0 par la définition. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Remplace x par $-1 + h$ dans $4x + 7$, puis simplifie.

Indice 2

Tu obtiens $3 + 4h$: calcule $|(3 + 4h) - 3|$ en fonction de $|h|$.

Indice 3

Point délicat : la condition porte sur h, $0 < |h| < \alpha$, avec α choisi après ε.

Réponse

Changement de variable. Avec $x = -1 + h$:

$$\begin{aligned} &4x+7 \\ &= -4+4h+7 \\ &= 3+4h. \end{aligned}$$

D'après le point 1, il suffit de montrer que $\lim_{h\to 0}(3+4h)=3$.

Limite en 0. Soit $\varepsilon>0$, et posons $\alpha=\dfrac{\varepsilon}{4}$. Soit h tel que $0<|h|<\alpha$. Alors :

$$\begin{aligned} |(3+4h)-3| &= 4|h| \\ &< 4\alpha = \varepsilon. \end{aligned}$$

Conclusion. $\lim_{h\to 0}(3+4h)=3$, donc $\lim_{x\to -1}(4x+7)=3$.

Limite infinie ; limites à droite et à gauche

Plus grand que tout

En clair. Calcule $\dfrac{1}{x^2}$ pour $x=0{,}1$, puis $0{,}01$, puis $0{,}001$. Tu obtiens 100, puis 10^4, puis 10^6. Pour x négatif, ce sont les mêmes valeurs, car $(-x)^2=x^2$.

Plus x est proche de 0, plus $\dfrac{1}{x^2}$ est grand. Il ne se rapproche d'aucun réel : il dépasse tout seuil fixé à l'avance.

Devine : Dépasser un seuil

Pour quels réels $x\neq 0$ a-t-on $\dfrac{1}{x^2}>10^6$?

A. Pour $0<x<10^{-3}$ seulement.

Faux.

Les réels négatifs proches de 0 conviennent aussi, car $(-x)^2=x^2$.

B. Pour $0<|x|<10^{-3}$.

Juste.

Juste : $\dfrac{1}{x^2}>10^6$ équivaut à $x^2<10^{-6}$.

C. Pour $0<|x|<10^{-6}$.

Faux.

Ces réels conviennent, mais pas eux seuls : pour $x=10^{-4}$, $\dfrac{1}{x^2}=10^8$.

D. Pour aucun réel : 10^6 est trop grand.

Faux.

Pour $x=10^{-4}$, $\dfrac{1}{x^2}=10^8$, qui dépasse 10^6.

Correction

Soit $x\neq 0$. Comme $x^2>0$, l'inégalité $\dfrac{1}{x^2}>10^6$ équivaut à $x^2<10^{-6}$, c'est-à-dire à $|x|<10^{-3}$.

Pour chaque seuil, on cherche un tel écart : c'est l'idée de la définition qui suit.

Limite infinie, limites latérales

Définition : Limite infinie en un point

Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a.

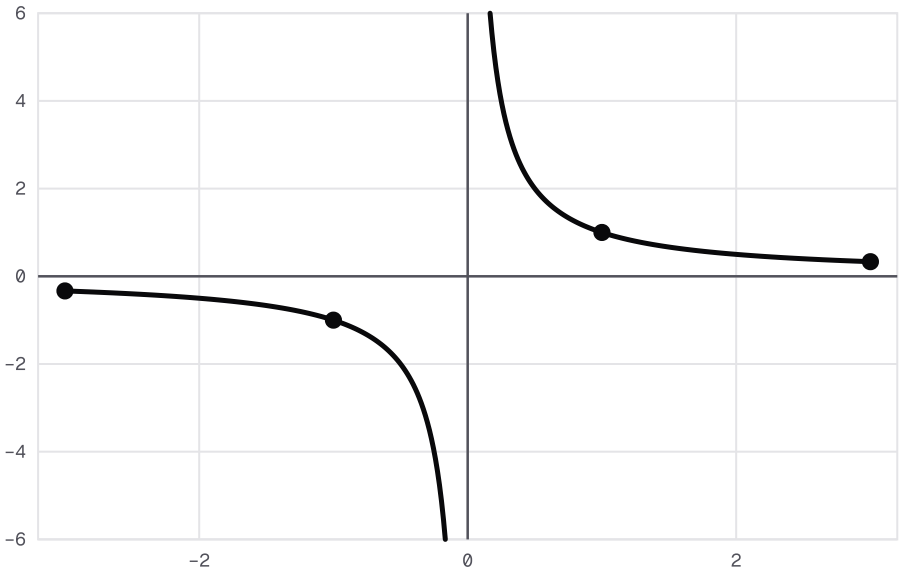
- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si : $\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f,\ \big(0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) > A\big)$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ si : $\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f,\ \big(0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A\big)$.

Autrement dit, $f(x)$ dépasse n'importe quel seuil A (pour $-\infty$: passe sous $-A$) dès que x, distinct de a, est assez proche de a. Une limite infinie n'est pas un réel.

Définition : Limite à droite, limite à gauche

Soit a et ℓ deux réels.

- Soit f une fonction telle que $]a, a+r[\subset D_f$ pour un réel $r > 0$. On dit que f admet ℓ pour **limite à droite** en a, et on écrit $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$, si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f,\ \big(a < x < a+\alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\big)$.
- Soit f une fonction telle que $]a-r, a[\subset D_f$ pour un réel $r > 0$. La **limite à gauche**, notée $\lim_{x\to a^-} f(x)$, se définit de même, la condition $a < x < a+\alpha$ étant remplacée par $a-\alpha < x < a$.
- Les limites infinies à droite et à gauche se définissent de même, la condition $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ étant remplacée, pour tout $A > 0$, par $f(x) > A$ (limite $+\infty$) ou par $f(x) < -A$ (limite $-\infty$).



Avant de lire : que fait la courbe juste à droite de 0, puis juste à gauche ? Courbe de x ↦ 1/x sur [−3, 0[et sur]0, 3]. À droite de 0, les ordonnées dépassent tout seuil ; à gauche de 0, elles descendent sous tout seuil négatif. Les points (1, 1) et (−1, −1) sont marqués.

Recoller les deux côtés

Une limite en a regarde les deux côtés à la fois. Peut-on l'étudier côté par côté ?

Pourquoi est-ce vrai ? Dans un sens, il suffit de restreindre x à un côté. Dans l'autre, la preuve prend le plus petit des deux écarts. Elle raisonne ensuite par disjonction des cas : $x > a$ ou $x < a$.

Propriété : Limite et limites à droite et à gauche

Soit a et ℓ deux réels, et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a. Alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell \right).$$

Il en est de même pour une limite $+\infty$ ou $-\infty$. En particulier, si les limites à droite et à gauche en a sont deux réels différents, f n'admet pas de limite finie en a.

Démonstration

Étape 1. Supposons $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$, et $\alpha > 0$ donné par F01. Si $a < x < a + \alpha$, alors $0 < |x - a| < \alpha$, donc $|f(x) - \ell| < \varepsilon$: c'est la limite à droite (F06). De même à gauche.

Étape 2. Réciproquement, supposons les deux limites égales à ℓ, et soit $\varepsilon > 0$. D'après F06, il existe $\alpha_1 > 0$ (à droite) et $\alpha_2 > 0$ (à gauche) ; soit α le plus petit des deux.

Étape 3. Soit $x \in D_f$ tel que $0 < |x - a| < \alpha$. Par disjonction des cas : si $x > a$, alors $a < x < a + \alpha_1$; si $x < a$, alors $a - \alpha_2 < x < a$. Dans les deux cas, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$: donc $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ (F01).

Étape 4. Pour une limite infinie, même preuve avec $f(x) > A$ ou $f(x) < -A$ (F05). Enfin, une limite finie L en a donnerait deux limites latérales égales à L (étape 1 ; unicité, F02).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour recoller deux côtés, on prend pour α le plus petit des écarts α_1 (à droite) et α_2 (à gauche).

On sépare ensuite deux cas, $x > a$ et $x < a$, qui couvrent tous les $x \neq a$.

Dans l'autre sens, une limite en a donne aussitôt les deux limites latérales.

Vérifie : Pourquoi le plus petit ?

Dans la preuve, pourquoi prend-on pour α le plus petit des réels α_1 et α_2 ?

A. Parce qu'un α plus petit rend ε plus petit.
Faux.
ε est fixé avant α : le choix de α ne le modifie pas.

B. Parce que α_1 et α_2 sont toujours égaux.
Faux.
Les deux écarts n'ont aucune raison d'être égaux : une fonction peut varier plus vite d'un côté.

C. Pour qu'un x proche de a le soit assez de son côté.
Juste.
Juste : si $x > a$, alors $x - a < \alpha \leq \alpha_1$; si $x < a$, alors $a - x < \alpha \leq \alpha_2$.

D. Pour que x appartienne à D_f.
Faux.
Dans la preuve, x est pris dans D_f dès le départ.

Correction
Soit $x \in D_f$ tel que $0 < |x - a| < \alpha$.

- Si $x > a$, alors $a < x < a + \alpha_1$, car $\alpha \leq \alpha_1$: la limite à droite donne $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
- Si $x < a$, alors $a - \alpha_2 < x < a$, car $\alpha \leq \alpha_2$: la limite à gauche donne la même inégalité.

Un seul écart sert donc pour les deux côtés.

Exemple : la partie entière en 2

Rappel : $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. Pour $2 \leq x < 3$, $E(x) = 2$; pour $1 \leq x < 2$, $E(x) = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, et posons $\alpha = 1$.

- **À droite.** Si $2 < x < 3$, alors $|E(x) - 2| = 0 < \varepsilon$. Donc $\lim_{x \to 2^+} E(x) = 2$.
- **À gauche.** Si $1 < x < 2$, alors $|E(x) - 1| = 0 < \varepsilon$. Donc $\lim_{x \to 2^-} E(x) = 1$.

Conclusion. Ces deux limites sont différentes. D'après la propriété précédente, E n'a pas de limite finie en 2, bien que $E(2) = 2$ existe.

Limites de référence en 0

Propriété : Limites de référence en 0, à droite et à gauche

- $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
- $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$; la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'admet donc pas de limite en 0.
- Pour tout entier $n \geq 1$: $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n}$ vaut $+\infty$ si n est pair et $-\infty$ si n est impair. En particulier, $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : $\dfrac{1}{x - 1}$ près de 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$. Soit $A > 0$, et posons $\alpha = \dfrac{1}{A}$.

- **À droite.** Si $1 < x < 1 + \alpha$, alors $0 < x - 1 < \dfrac{1}{A}$, donc $\dfrac{1}{x - 1} > A$. Ainsi $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.
- **À gauche.** Si $1 - \alpha < x < 1$, alors $-\dfrac{1}{A} < x - 1 < 0$, donc $\dfrac{1}{x - 1} < -A$. Ainsi $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

Le signe de $x - 1$ décide de tout, et f n'a pas de limite en 1.

Méthode et piège

Attention : le signe du dénominateur

✗ « En 1, $\dfrac{1}{x - 1}$ tend vers $\dfrac{1}{0} = +\infty$. »

✓ L'écriture « $\frac{1}{0}$ » n'a pas de sens. Quand le dénominateur tend vers 0, la limite dépend de son **signe**.

Ici $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$: la fonction n'a pas de limite en 1.

Étudie toujours le signe du dénominateur à droite et à gauche.

Méthode : quotient dont le dénominateur tend vers 0

1. **Calculer** la limite du numérateur. Si elle est nulle, c'est une forme $\frac{0}{0}$: on apprendra plus loin à la lever. Sinon, notons-la $\ell \neq 0$.
2. **Étudier le signe** du dénominateur près de a, à droite et à gauche (tableau de signes).
3. **Conclure** à droite et à gauche : par la définition, comme dans l'exemple, ou par la règle du quotient de la section « Opérations sur les limites ». Si les deux limites diffèrent, f n'a pas de limite en a.

À toi : Des limites infinies par la définition

Démontre, par la définition, que $\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$. Trouve ensuite la limite à gauche en 2, et conclus. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Soit $A > 0$. Pour $x > 2$, transforme $\frac{3}{x-2} > A$ en une condition sur $x - 2$.

Indice 2

Pour $x > 2$, $\frac{3}{x-2} > A$ équivaut à $0 < x - 2 < \frac{3}{A}$: prends $\alpha = \frac{3}{A}$.

Indice 3

Point délicat : à gauche, $x - 2 < 0$; le quotient est négatif, et il faut montrer qu'il passe sous $-A$.

Réponse

À droite. Soit $A > 0$, et posons $\alpha = \frac{3}{A}$. Si $2 < x < 2 + \alpha$, alors $0 < x - 2 < \frac{3}{A}$, donc $\frac{3}{x-2} > A$. Ainsi :

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty.$$

À gauche. Si $2 - \alpha < x < 2$, alors $-\frac{3}{A} < x - 2 < 0$, donc $\frac{3}{x-2} < -A$. Ainsi :

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty.$$

Conclusion. Les deux limites latérales diffèrent : la fonction n'a pas de limite en 2.

Limites en +∞ et en −∞

Une fonction qui se stabilise

En clair. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$. On trouve :

- $f(10) = \dfrac{21}{13}$, environ $1{,}62$;
- $f(100) = \dfrac{201}{103}$, environ $1{,}95$;
- $f(1000) = \dfrac{2001}{1003}$, environ $1{,}995$.

Pour $x > -3$, $f(x)$ s'écrit $2 - \dfrac{5}{x+3}$. L'écart entre $f(x)$ et 2 vaut donc $\dfrac{5}{x+3}$: il devient aussi petit qu'on veut quand x devient grand.

Devine : Vers quel nombre ?

Le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{2x+1}{x+3}$ deviennent tous deux très grands. Vers quel nombre le quotient se rapproche-t-il quand x devient très grand ?

A. $\dfrac{1}{3}$

Faux.

C'est la valeur en 0, pas le comportement pour x très grand.

B. 1, car « $\dfrac{+\infty}{+\infty} = 1$ »

Faux.

L'écriture « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » n'a pas de valeur : tout dépend de la vitesse de chaque terme.

C. 2

Juste.

Juste : l'écart avec 2 vaut $\dfrac{5}{x+3}$, qui devient petit.

D. $+\infty$, car le numérateur devient très grand

Faux.

Le dénominateur grandit aussi : le quotient reste borné.

Correction

Pour $x > -3$:

$$\frac{2x+1}{x+3} = 2 - \frac{5}{x+3}.$$

Pour $x = 1000$, l'écart avec 2 vaut $\dfrac{5}{1003}$, moins de $0{,}005$.

Pour toute tolérance, on trouvera un **seuil** au-delà duquel l'écart est plus petit : c'est la définition qui suit.

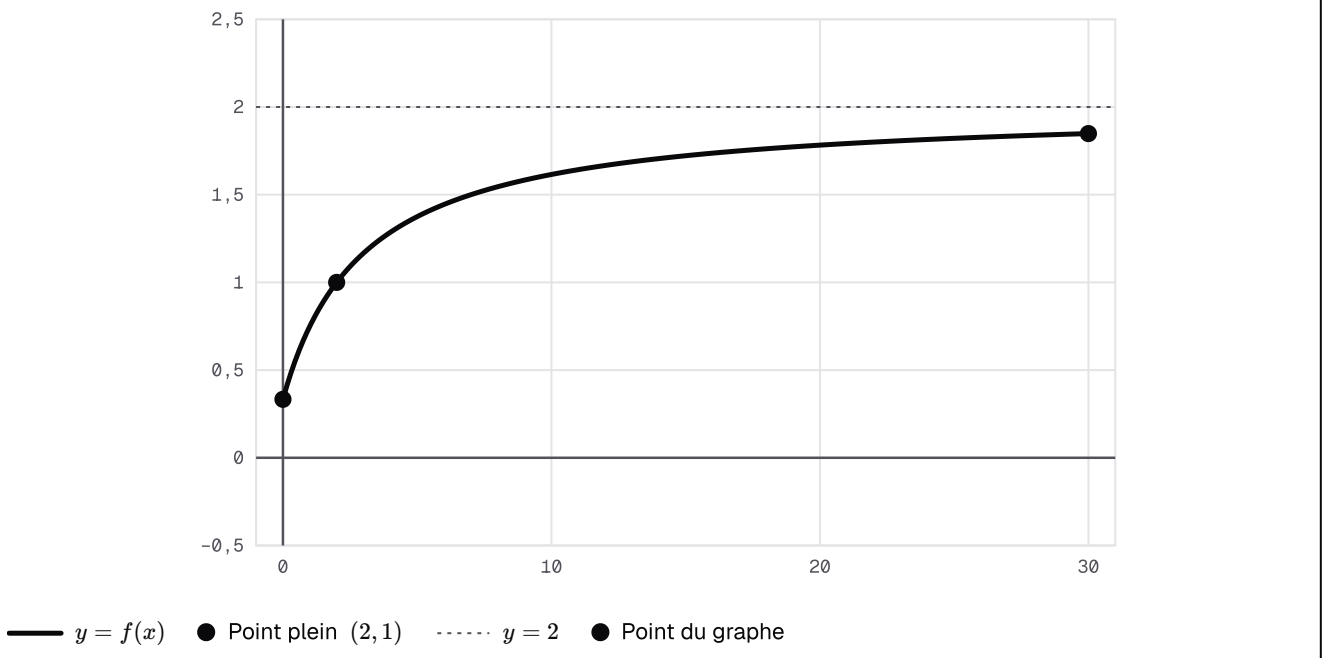
Les définitions

Définition : Limite finie en +∞ et en −∞

Soit ℓ un réel.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $]b, +\infty[$. On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$, et on écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in D_f,\ \big(x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\big)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, b[$. On écrit $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in D_f,\ \big(x < -B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\big)$.

Autrement dit, $f(x)$ est aussi proche de ℓ qu'on le veut dès que x est assez grand (pour $-\infty$: dès que $-x$ est assez grand).



Courbe de f : x ↦ (2x + 1)/(x + 3) sur [0, 30], avec la droite d'équation y = 2. La courbe monte et se rapproche de la droite sans l'atteindre ; le point (2, 1) est marqué.

Définition : Limite infinie en +∞ et en −∞

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]b, +\infty[$.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si : $\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in D_f,\ \big(x > B \Rightarrow f(x) > A\big)$.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si : $\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in D_f,\ \big(x > B \Rightarrow f(x) < -A\big)$.

Pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, b[$, les limites infinies en $-\infty$ se définissent de même, la condition $x > B$ étant remplacée par $x < -B$.

Exemple : un seuil B par la définition

Énoncé. Montrons que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x+3} = 2$.

Majoration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x > 0$:

$$\left|\frac{2x+1}{x+3} - 2\right| = \frac{5}{x+3} < \frac{5}{x}.$$

Choix du seuil. Posons $B = \dfrac{5}{\varepsilon}$; alors $B > 0$.

Vérification. Soit $x > B$. Alors $\dfrac{5}{x} < \dfrac{5}{B} = \varepsilon$, donc $\left|\dfrac{2x+1}{x+3} - 2\right| < \varepsilon$.

Conclusion. D'après la définition, la limite en $+\infty$ vaut 2.

Limites de référence à l'infini

Propriété : Limites de référence à l'infini

Pour tout réel c : $\lim_{x\to+\infty} c = c$ et $\lim_{x\to-\infty} c = c$. Pour tout entier $n \geq 1$:

- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^n$ vaut $+\infty$ si n est pair et $-\infty$ si n est impair ;
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$;
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Remarque

Ce résultat est admis.

Vérifie : Lire les limites de référence

Laquelle de ces égalités est vraie ?

A. $\lim_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$

Faux.
L'exposant 3 est impair : $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$. Par exemple, $(-10)^3 = -1000$.

B. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Faux.
$\sqrt{x}$ devient grand, donc $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ devient petit : la limite vaut 0.

C. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=-\infty$

Faux.

$\dfrac{1}{x^2}$ est positif et devient petit : la limite vaut 0.

D. $\lim_{x\to-\infty}x^4=+\infty$

Juste.

Juste : l'exposant 4 est pair.

Correction

D'après les limites de référence, $\lim_{x\to-\infty}x^n$ vaut $+\infty$ si n est pair, et $-\infty$ si n est impair. Donc $\lim_{x\to-\infty}x^4=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$.

Les inverses $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\dfrac{1}{x^2}$ tendent vers 0.

Un piège, puis à toi

Attention : croissante ne veut pas dire « tend vers l'infini »

✗ « $x\mapsto 2-\dfrac{1}{x}$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. »

✓ Cette fonction est croissante, mais elle reste sous 2 : pour $x>0$, $2-\dfrac{1}{x}<2$.

Sa limite en $+\infty$ vaut 2 : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ (limite de référence), donc, par somme :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2.$$

Une limite se démontre ; elle ne se devine pas sur le sens de variation.

À toi : Un seuil par la définition

Démontre, par la définition, que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x+1}=3$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule $\dfrac{3x}{x+1}-3$ en réduisant au même dénominateur.

Indice 2

Pour $x>0$, l'écart vaut $\dfrac{3}{x+1}$, qui est inférieur à $\dfrac{3}{x}$: cherche B en fonction de ε.

Indice 3

Point délicat : B est choisi après ε, et il doit être strictement positif.

Réponse

Majoration. Soit $\varepsilon>0$. Pour $x>0$:

$$\begin{aligned}&\frac{3x}{x+1} - 3\\ &= \frac{3x - 3x - 3}{x+1}\\ &= -\frac{3}{x+1}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{3x}{x+1} - 3\right|\\ &= \frac{3}{x+1} < \frac{3}{x}.\end{aligned}$$

Choix du seuil. Posons $B = \dfrac{3}{\varepsilon}$; alors $B > 0$.

Vérification. Soit $x > B$. Alors $\dfrac{3}{x} < \dfrac{3}{B} = \varepsilon$, donc $\left|\dfrac{3x}{x+1} - 3\right| < \varepsilon$.

Conclusion. D'après la définition, la limite de $\dfrac{3x}{x+1}$ en $+\infty$ vaut 3.

Opérations sur les limites ; formes indéterminées

Les limites suivent les opérations

En clair. Si $f(x)$ est proche de 3 et $g(x)$ proche de 4, alors $f(x) + g(x)$ est proche de 7, et $f(x)g(x)$ est proche de 12. Les limites suivent donc les opérations.

Mais avec des limites infinies, certains cas restent ouverts : on ne peut rien dire d'avance.

Devine : Peut-on conclure ?

On sait que $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Ces deux limites, seules, permettent-elles de trouver la limite de $x^2 - x$ en $+\infty$?

A. Oui : la limite vaut 0, car l'infini moins lui-même fait 0.

Faux.

« $(+\infty) + (-\infty)$ » ne vaut pas 0. Par exemple, $(x+3) - x = 3$ pour tout x.

B. Non : ces deux limites, seules, ne suffisent pas.

Juste.

Juste : il faut transformer l'écriture, par exemple en factorisant.

C. Oui : la limite vaut $+\infty$, car x^2 est plus grand.

Faux.

La limite vaut bien $+\infty$, mais pas d'après ces deux limites seules : il faut comparer x^2 et x.

D. Oui : il n'y a pas de limite.

Faux.

Une forme indéterminée n'empêche pas la limite d'exister : elle oblige à transformer.

Correction

> En $+\infty$, les expressions $x^2 - x$, $x - x^2$ et $(x+3) - x$ ont toutes la forme « $(+\infty) + (-\infty)$ ». Leurs limites sont pourtant $+\infty$, $-\infty$ et 3.
>
> Les limites des deux termes ne suffisent donc pas : c'est une **forme indéterminée**. On transforme l'écriture avant de conclure.

Les règles

Propriété : Opérations sur les limites finies

Soit f et g deux fonctions, et ℓ, ℓ', k trois réels. On suppose $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$, les deux limites étant prises au même endroit : en un réel a, à droite ou à gauche en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$. Alors, au même endroit :

- $\lim(f+g) = \ell + \ell'$ et $\lim(kf) = k\ell$;
- $\lim(fg) = \ell\ell'$;
- si $\ell' \neq 0$: $\lim \dfrac{f}{g} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Démonstration

Idée de la preuve. On l'écrit en un réel a ; ailleurs, seule la condition sur x change (F06, F09).

Somme. Soit $\varepsilon > 0$. D'après F01, appliquée avec $\dfrac{\varepsilon}{2}$, il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que $|f(x) - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ si $0 < |x-a| < \alpha_1$, et $|g(x) - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ si $0 < |x-a| < \alpha_2$. Pour $0 < |x-a| < \alpha$, où α est le plus petit des deux, l'inégalité triangulaire donne $\big|f(x) + g(x) - (\ell + \ell')\big| < \varepsilon$.

Étapes omises. Le produit et le quotient demandent de majorer $|g(x)|$, ou de le minorer par un réel strictement positif, près de a ; ces étapes, plus longues, sont admises dans ce chapitre. Le produit kf est le cas où g est constante (F03, F11).

Exemple : nommer la règle

Somme. Par les limites de référence, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} 2 = 2$. Par somme :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2 - 0 = 2.$$

Produit. Par produit :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(2 - \frac{1}{x}\right) &= 0 \times 2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Quotient. Comme $2 \neq 0$, par quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

Propriété : Opérations et limites infinies ; formes indéterminées

Les limites sont prises au même endroit : a, a^+, a^-, $+\infty$ ou $-\infty$; ℓ et ℓ' désignent des réels.

- **Somme.** Si $\lim f = \ell$ ou $\lim f = +\infty$, et si $\lim g = +\infty$, alors $\lim(f+g) = +\infty$. De même en remplaçant partout $+\infty$ par $-\infty$.
- **Produit.** Si $\lim f$ est un réel non nul ou est infinie, et si $\lim g$ est infinie, alors $\lim(fg)$ est infinie, de signe donné par la règle des signes d'un produit.
- **Quotient.** Si $\lim f = \ell$ et si $\lim g$ est infinie, alors $\lim \dfrac{f}{g} = 0$. Si $\lim f$ est infinie et $\lim g = \ell'$ avec $\ell' \neq 0$, alors $\lim \dfrac{f}{g}$ est infinie. Si $\lim f$ est un réel non nul ou est infinie, si $\lim g = 0$ et si $g(x)$ garde un signe strict constant près de l'endroit considéré, alors $\lim \dfrac{f}{g}$ est infinie. Le signe suit la règle des signes d'un quotient.
- **Formes indéterminées.** Dans les cas « $(+\infty)+(-\infty)$ », « $0\times(+\infty)$ », « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » et « $\dfrac{0}{0}$ », et leurs variantes de signe, ces règles ne permettent pas de conclure : il faut transformer l'écriture.

Démonstration

Idée de la preuve. On traite un cas, en $+\infty$: $\lim f = \ell$ et $\lim g = +\infty$.

Étape 1. D'après F09, appliquée avec $\varepsilon = 1$, il existe $B_1 > 0$ tel que $f(x) > \ell - 1$ pour tout $x > B_1$ du domaine.

Étape 2. Soit $A > 0$. D'après F10, appliquée au seuil $A + |\ell| + 1$, il existe $B_2 > 0$ tel que $g(x) > A + |\ell| + 1$ pour tout $x > B_2$. Pour x plus grand que B_1 et que B_2 : $f(x) + g(x) > \ell - 1 + A + |\ell| + 1 \geq A$. Donc $\lim(f+g) = +\infty$ (F10).

Étapes omises. Les autres cas se traitent de la même façon, en minorant ou en majorant l'un des termes ou l'un des facteurs ; ils sont admis dans ce chapitre.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour une somme de deux limites finies, on partage la tolérance : $\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour chaque fonction, puis l'inégalité triangulaire.

Pour « réel plus $+\infty$ », on minore d'abord le premier terme une fois pour toutes. Puis on pousse le second au-delà d'un seuil plus grand.

Les autres cas suivent la même idée ; ils sont admis.

Vérifie : Forme indéterminée ou non ?

En $+\infty$, laquelle de ces expressions est une forme indéterminée ?

A. $\frac{1}{x} \times x^2$

Juste.

Juste : c'est la forme « $0 \times (+\infty)$ ».

B. $x^2 + x$

Faux.

Somme de deux limites $+\infty$: la règle de la somme donne $+\infty$.

C. $\frac{3}{x^2}$

Faux.

Un réel divisé par une limite infinie : la règle du quotient donne 0.

D. $x^2\left(2 - \frac{1}{x}\right)$

Faux.

Produit de $+\infty$ par $2 \neq 0$: la règle du produit donne $+\infty$.

Correction

Le facteur $\frac{1}{x}$ tend vers 0 et x^2 vers $+\infty$: c'est la forme « $0 \times (+\infty)$ », que les règles ne tranchent pas.

Ici, on transforme : pour $x \neq 0$, $\frac{1}{x} \times x^2 = x$, donc la limite vaut $+\infty$.

Les trois autres expressions relèvent directement d'une règle.

Formes indéterminées

Attention : une forme indéterminée n'est pas un résultat

✗ « En $+\infty$, $x^2 - x$ est de la forme $(+\infty) + (-\infty)$, donc sa limite vaut 0. »

✓ Une forme indéterminée n'a pas de valeur : on transforme l'écriture. Ici $x^2 - x = x(x-1)$. Par somme, $x - 1$ tend vers $+\infty$; par produit, $\lim_{x \to +\infty}(x^2 - x) = +\infty$.

De même, $x - x^2 = -x(x-1)$ tend vers $-\infty$, et $(x+3) - x = 3$ tend vers 3.

Exemple : le signe d'un dénominateur

Calculons $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-2}{x}$.

À droite. Par somme, le numérateur tend vers -2. Le dénominateur tend vers 0, et $x > 0$ à droite de 0. Par la règle du quotient, avec un numérateur de limite négative et un dénominateur positif :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x-2}{x} = -\infty.$$

À gauche. À gauche de 0, $x < 0$. Par la même règle :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x-2}{x} = +\infty.$$

À toi

À toi : Nommer chaque règle

Calcule, en nommant chaque règle : (a) $\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 + \frac{1}{x} \right)$; (b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x^2}$; (c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{x}$.
Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour chaque terme, cherche d'abord sa limite de référence.
Indice 2
Choisis ensuite la règle : somme, produit ou quotient. Vérifie qu'aucune forme n'est indéterminée.
Indice 3
Point délicat : en (b), le dénominateur tend vers 0 ; regarde son signe.

Réponse
(a) $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ (exposant impair) et $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, par les limites de référence. Par somme, la limite vaut $-\infty$.

(b) $\lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$, avec $x^2 > 0$. Le numérateur vaut $3 > 0$. Par la règle du quotient, la limite vaut $+\infty$.

(c) Par somme, le numérateur tend vers 2 ; le dénominateur tend vers $+\infty$. Par la règle du quotient, la limite vaut 0.

Remarque : Coin devoir : rédiger un calcul de limite

En devoir, chaque égalité de limite se justifie. Écris par exemple :

« $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ (limites de référence) ; donc, par somme, $\lim_{x \to +\infty} \left(x^3 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$. »

Ne remplace jamais une règle par une flèche. N'écris jamais « $\frac{1}{0}$ » : écris le signe du dénominateur.

Polynômes et fonctions rationnelles

Une limite qui se calcule

Devine : Une limite en un réel

Que vaut, d'après toi, $\lim_{x\to 2}(x^3-2x)$?

A. 8, la limite du terme de plus haut degré.
Faux.
Le terme de plus haut degré ne sert qu'à l'infini. En 2, le terme $-2x$ compte aussi.

B. $+\infty$, car x^3 grandit vite.
Faux.
Ici, x reste proche de 2 : rien ne devient très grand.

C. 4, la valeur du polynôme en 2.
Juste.
Juste : $2^3-2\times 2=4$.

D. On ne peut rien dire sans tableau de valeurs.
Faux.
Les règles du chapitre permettent de calculer, sans tableau.

Correction
Près de 2, x^3 est proche de 8 et $2x$ est proche de 4. Par différence, x^3-2x est proche de $8-4=4$.

On s'attend à ce qu'un polynôme ait pour limite sa valeur : c'est le résultat qui suit.

Calculer $P(a)$ semble naturel pour un polynôme.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve part de $\lim_{x\to a} x=a$, obtenue en se ramenant en 0. Elle n'utilise ensuite que les règles du produit et de la somme. À l'infini, elle met le terme de plus haut degré en facteur.

En un réel, puis à l'infini

Propriété : Limite d'un polynôme, d'une fonction rationnelle en un point

Soit a un réel.

- Pour toute fonction polynôme P : $\lim_{x\to a} P(x)=P(a)$. En particulier, $\lim_{x\to a} x=a$.
- Soit P et Q deux fonctions polynômes telles que $Q(a)\neq 0$. Alors $\lim_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(a)}{Q(a)}$.

Démonstration

Étape 1. D'après F04 (point 1), $\lim_{x\to a} x=a$ équivaut à $\lim_{h\to 0}(a+h)=a$. Or $\lim_{h\to 0} a=a$ et $\lim_{h\to 0} h=0$ (F03) : par somme (F12), $\lim_{h\to 0}(a+h)=a$.

Étape 2. Par récurrence sur k, avec la règle du produit (F12), $\lim_{x\to a} x^k=a^k$ pour tout entier $k\geq 1$. Pour $P(x)=c_nx^n+\cdots+c_1x+c_0$, où $\lim_{x\to a} c_0=c_0$ (F03), les règles du produit par un réel et de la somme (F12) donnent $\lim_{x\to a} P(x)=P(a)$.

Étape 3. Le polynôme Q, non nul en a, n'a qu'un nombre fini de racines : la fonction $\dfrac{P}{Q}$ est donc définie au voisinage de a. Comme $\lim_{x\to a} Q(x) = Q(a) \neq 0$, la règle du quotient (F12) donne $\lim_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$.

Et à l'infini ? Pour $x = 1000$:

$$x^2 - 5x = 995 \times 1000,$$

alors que $x^2 = 1000 \times 1000$. Le terme $-5x$ ne pèse presque rien devant x^2 : le terme de plus haut degré impose la limite.

Propriété : Polynômes et fonctions rationnelles à l'infini

Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ deux polynômes, où n et m sont des entiers naturels, $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. En $+\infty$, et de même en $-\infty$:

- $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n$: un polynôme a la limite de son **terme de plus haut degré** ;
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$: une fonction rationnelle a la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Démonstration

Étape 1. Pour $x \neq 0$, $P(x) = a_n x^n\big(1 + u(x)\big)$, où $u(x)$ est la somme des termes $\dfrac{a_k}{a_n} \times \dfrac{1}{x^{n-k}}$ pour $0 \leq k < n$ (nulle si $n = 0$).

Étape 2. Chaque $\dfrac{1}{x^{n-k}}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$ (F11), donc $\lim u(x) = 0$ et $\lim\big(1 + u(x)\big) = 1$ (F12).

Étape 3. La limite de $a_n x^n$ est un réel si $n = 0$, infinie sinon (F11 ; produit par $a_n \neq 0$, F13). Par la règle du produit (F12 ou F13), le facteur de limite 1 ne change pas cette limite : $\lim P(x) = \lim a_n x^n$.

Étape 4. De même, $Q(x) = b_m x^m\big(1 + v(x)\big)$ avec $\lim v(x) = 0$; pour x assez grand, $Q(x) \neq 0$ (Q n'a qu'un nombre fini de racines), donc $1 + v(x) \neq 0$ et $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n}{b_m} x^{n-m} \times \dfrac{1 + u(x)}{1 + v(x)}$, où le second facteur tend vers 1 (F12) ; on conclut comme à l'étape 3.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

En un réel a, tout repose sur $\lim_{x\to a} x = a$ et sur les règles de la somme et du produit.

À l'infini, on factorise par le terme de plus haut degré :

$$P(x) = a_n x^n\big(1 + u(x)\big),$$

où $u(x)$ tend vers 0. Le facteur $1+u(x)$ tend vers 1, et il ne change pas la limite.

Vérifie : Le reste tend vers 0

Dans la preuve, $P(x)=a_n x^n\big(1+u(x)\big)$. Pourquoi $u(x)$ tend-il vers 0 en $+\infty$?

A. Parce que $a_n \neq 0$.

Faux.

Cette hypothèse permet de diviser par a_n, mais elle ne donne aucune limite.

B. Chacun de ses termes est un réel fois $\dfrac{1}{x^{n-k}}$, avec $n-k \geq 1$.

Juste.

Juste : chaque $\dfrac{1}{x^{n-k}}$ tend vers 0, puis la règle de la somme conclut.

C. Parce que $P(x)$ tend vers $+\infty$.

Faux.

C'est faux en général : $-x^2$ tend vers $-\infty$. Et ce serait employer le résultat à démontrer.

D. Parce que x^n devient plus grand que a_n.

Faux.

Comparer x^n et a_n ne dit rien de la somme $u(x)$.

Correction

Pour $x \neq 0$, $u(x)$ est la somme des termes $\dfrac{a_k}{a_n}\times\dfrac{1}{x^{n-k}}$, pour $0 \leq k < n$.

Comme $n-k \geq 1$, chaque $\dfrac{1}{x^{n-k}}$ tend vers 0 (limite de référence). Par produit par un réel, puis par somme, $\lim_{x\to+\infty} u(x)=0$.

Lever une forme 0/0

Exemple **: Exemple guidé : une forme $\dfrac{0}{0}$**

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$. Calculons $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Forme. En 1, le numérateur tend vers $1-4+3=0$, et le dénominateur vers 0 (limite d'un polynôme) : c'est une forme $\dfrac{0}{0}$.

Factorisation. Comme 1 est racine de x^2-4x+3, on factorise :

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3).$$

Pour $x\neq 1$, $f(x)$ vaut donc $x-3$.

Conclusion. Par la limite d'un polynôme, $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x-3)=-2$.

Méthode : lever une forme $\dfrac{0}{0}$ en un point

1. **Vérifier** que le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 en a : c'est une forme indéterminée.
2. **Factoriser** par $x-a$ chaque polynôme qui s'annule en a : il s'écrit $(x-a)Q(x)$, avec Q obtenu par division ou par identification des coefficients. Par exemple, x^3-3x+2 s'annule en 1, et $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$.
3. **Simplifier** par $x-a$, ce qui est permis car $x\neq a$. Puis calculer la limite de la fonction rationnelle obtenue.
4. **Adapter** : devant une racine carrée, utiliser la quantité conjuguée ; devant $\sin$, $\cos$ ou $\tan$, les limites trigonométriques usuelles.

À l'infini

Exemple : une forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{4x^2-x}{2x^2+5}$. En $+\infty$, le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée.

Par la règle du terme de plus haut degré :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{2x^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty} 2 = 2.\end{aligned}$$

Le même calcul donne $\lim_{x\to-\infty} g(x)=2$.

Méthode : polynôme ou fonction rationnelle à l'infini

1. **Repérer** le terme de plus haut degré du polynôme, ou de chacun des deux polynômes.
2. **Remplacer** le polynôme par ce terme, ou la fonction rationnelle par le quotient de ces termes. Puis simplifier.
3. **Conclure** par les limites de référence. Cette méthode ne vaut qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$, jamais en un réel.

Attention : le terme de plus haut degré ne sert qu'à l'infini

✗ « $\lim_{x\to 2}(x^2-5x)=\lim_{x\to 2} x^2=4$, par le terme de plus haut degré. »

✓ Cette règle ne vaut qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$. En un réel, un polynôme a pour limite sa valeur :

$$\lim_{x\to 2}(x^2-5x) = 4-10 = -6.$$

Limites latérales, puis à toi

Exemple : limites à droite et à gauche d'un quotient

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ par $h(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$.

En -3, le numérateur tend vers -5 (limite d'un polynôme), et le dénominateur vers 0. Or $x+3>0$ pour $x>-3$, et $x+3<0$ pour $x<-3$.

Par la règle du quotient, à droite de -3 :

$$\lim_{x\to -3^+} h(x) = -\infty.$$

À gauche de -3 :

$$\lim_{x\to -3^-} h(x) = +\infty.$$

Conclusion. Ces deux limites diffèrent : h n'a pas de limite en -3.

À toi : La limite devinée au début

Soit $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$, la fonction de l'entrée. Calcule $\lim_{x\to 2} f(x)$, puis $\lim_{x\to -\infty} f(x)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

En 2, vérifie la forme $\dfrac{0}{0}$: 2 est racine de x^3-8.

Indice 2

Factorise : $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$. Vérifie-le en développant.

Indice 3

Point délicat : en $-\infty$, ne factorise pas ; prends le quotient des termes de plus haut degré.

Réponse

En 2. Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 : forme $\dfrac{0}{0}$. Pour $x\neq 2$:

$$\begin{aligned} &x^3-8 \\ &= (x-2)(x^2+2x+4), \end{aligned}$$

donc $f(x)$ vaut x^2+2x+4. Par la limite d'un polynôme :

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 2} f(x) \\ &= 4+4+4 = 12. \end{aligned}$$

La prédiction de l'entrée est démontrée.

En $-\infty$. Par la règle du terme de plus haut degré :

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x)\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x}\\ &= \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty.\end{aligned}$$

Remarque : Coin devoir : lever une forme $\dfrac{0}{0}$

En devoir, annonce la forme avant de transformer. Écris :

« En a, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 : forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour $x \neq a$, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$. Comme $Q_1(a) \neq 0$, la limite vaut $\frac{P_1(a)}{Q_1(a)}$. »

La mention « pour $x \neq a$ » justifie la simplification.

La limite de sin x / x en 0

Un quotient de deux petits nombres

En clair. Mesure x en radians, et calcule $\frac{\sin x}{x}$ pour $x = 0{,}5$, puis $0{,}1$, puis $0{,}01$. Tu obtiens environ $0{,}9589$, puis $0{,}9983$, puis $0{,}99998$.

Pour $-x$, c'est la même valeur, car :

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Le numérateur et le dénominateur sont tous deux proches de 0 : la forme $\frac{0}{0}$ ne dit rien d'avance.

Devine : Une limite à deviner

D'après ces valeurs, de quel nombre $\frac{\sin x}{x}$ semble-t-il se rapprocher quand x tend vers 0 ?

A. De 1.

Juste.

Juste : les valeurs se resserrent autour de 1, des deux côtés de 0.

B. De 0, car $\sin 0 = 0$.

Faux.

Le dénominateur tend aussi vers 0 : « $\frac{0}{0}$ » ne vaut pas 0.

C. De $+\infty$, car on divise par un nombre proche de 0.

Faux.

Le numérateur est lui aussi proche de 0 : les valeurs calculées restent proches de 1.

D. D'aucun nombre, car le quotient n'est pas défini en 0.

Faux.

La valeur en 0 ne compte pas pour une limite en 0.

Correction

Les valeurs $0{,}9589$, $0{,}9983$ et $0{,}99998$ se rapprochent de 1. Pour x petit, $\sin x$ et x sont presque égaux : leur quotient est proche de 1.

Ce résultat ne se démontre pas avec les outils de ce chapitre : il est admis.

La limite de référence

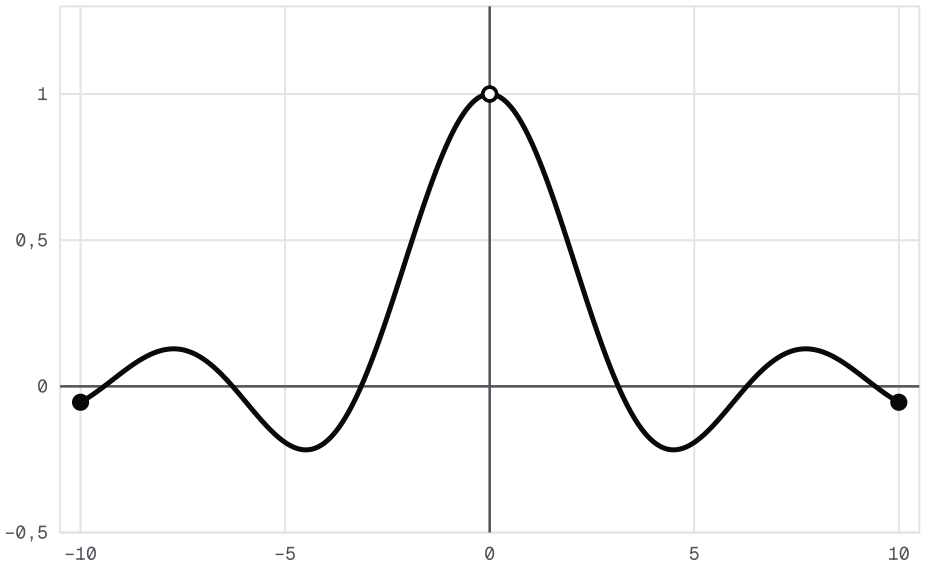
Propriété : Limite de référence : sin x / x en 0

Le réel x désignant une mesure d'angle en radians :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Remarque

Ce résultat est admis.



$y = \frac{\sin x}{x}$ ○ Point creux $(0, 1)$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

Avant de lire : le point d'abscisse 0 appartient-il à la courbe ? Courbe de x ↦ (sin x)/x sur [−10, 0[∪]0, 10], x en radians. Près de 0, les ordonnées se rapprochent de 1 ; le point creux (0, 1) marque cette limite, car la fonction n'est pas définie en 0.

Point creux en x = 0, à l'ordonnée estimée ≈ 1 : ce point n'appartient pas à la courbe.

Point creux en x = 0, à l'ordonnée estimée ≈ 1 : limite à gauche estimée numériquement.

Sinus et cosinus

On connaît la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ en 0. Que dire de $\sin x$ et de $\cos x$ eux-mêmes ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve écrit $\sin x$ comme un produit, puis applique la règle du produit. Pour $\cos x$, elle passe par la formule de duplication du chapitre « Calcul trigonométrique ».

Propriété : Limites des fonctions sinus et cosinus

- $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ et $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.
- Pour tout réel a : $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$ et $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$.

Démonstration

Étape 1. Pour $x \neq 0$, $\sin x = x \times \dfrac{\sin x}{x}$. Or $\lim_{x\to 0} x = 0$ (F03) et $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (F16) : par produit (F12), $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

Étape 2. Par la formule de duplication (chapitre « Calcul trigonométrique »), $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$. D'après F04 (point 3, avec $c = \dfrac{1}{2}$) et l'étape 1, $\lim_{x\to 0} \sin \dfrac{x}{2} = 0$; par produit (F12), $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0$, donc $\cos x = 1 - (1 - \cos x)$ tend vers 1 (F12).

Étape 3. Par les formules d'addition, $\sin(a + h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h$, qui tend vers $\sin a$ quand h tend vers 0 (étapes 1 et 2, F12) : donc $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$ (F04, point 1). De même, $\cos(a + h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h$ tend vers $\cos a$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Trois gestes, sans aucune nouvelle limite admise :

- écrire $\sin x = x \times \dfrac{\sin x}{x}$, pour faire apparaître la limite de référence ;
- écrire $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$;
- en un réel a, poser $x = a + h$ et développer par les formules d'addition.

Vérifie : Quelle formule ?

Pour passer de $\lim_{h\to 0} \cos h = 1$ et $\lim_{h\to 0} \sin h = 0$ à $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$, quelle formule la preuve emploie-t-elle ?

A. $\cos(a + h) = \cos a + \cos h$

Faux.
Cette formule est fausse : pour $a = h = 0$, elle donne $1 = 2$.

B. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Faux.
Elle est vraie, mais elle ne fait pas apparaître $a + h$.

C. $\cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h$

Juste.

Juste : c'est une formule d'addition ; chaque terme a une limite connue.

D. $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$

Faux.

Elle sert pour la limite de $\cos x$ en 0, pas pour passer en a.

Correction

Par la formule d'addition :

$$\cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h.$$

Quand h tend vers 0, $\cos h$ tend vers 1 et $\sin h$ vers 0. Par produit et par somme, $\cos(a+h)$ tend vers $\cos a$.

En se ramenant en 0 avec $x = a + h$, on obtient $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$.

En un réel, puis à toi

Exemple : la limite de référence ne sert qu'en 0

Calculons $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}$.

D'après la propriété précédente, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \dfrac{\pi}{2} = 1$. Et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} x = \dfrac{\pi}{2}$, avec $\dfrac{\pi}{2} \neq 0$. Par la règle du quotient :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Ce n'est pas 1 : la limite de référence ne vaut qu'en 0.

À toi : Sinus et cosinus

Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x}$, puis $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} (\sin x + \cos x)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris $\dfrac{x}{\sin x}$ comme l'inverse de $\dfrac{\sin x}{x}$.

Indice 2

Pour la première, applique la règle du quotient ; pour la seconde, la limite de $\sin$ et de $\cos$ en un réel.

Indice 3

Point délicat : avant la règle du quotient, vérifie que la limite du dénominateur n'est pas nulle.

Réponse

Première limite. Pour $0 < |x| < \pi$, $\sin x \neq 0$ et :

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}.$$

Par la limite de référence, le dénominateur tend vers 1, et $1 \neq 0$. Par la règle du quotient, $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$.

Seconde limite. Par la limite de $\sin$ et de $\cos$ en un réel, puis par somme :

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} (\sin x + \cos x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Limites trigonométriques usuelles

D'autres quotients

Devine : Un facteur dans le sinus

D'après toi, que vaut $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$?

A. 3

Juste.

Juste : $\dfrac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \dfrac{\sin(3x)}{3x}$.

B. 1, par la limite de référence.

Faux.

La limite de référence porte sur $\dfrac{\sin t}{t}$: ici le sinus porte sur $3x$, mais on divise par x.

C. $\dfrac{1}{3}$

Faux.

Pour $x = 0{,}01$, le quotient vaut environ $2{,}9996$: loin de $\dfrac{1}{3}$.

D. 0, car $\sin 0 = 0$.

Faux.

Le dénominateur tend aussi vers 0 : c'est une forme $\dfrac{0}{0}$.

Correction

Pour $x \neq 0$:

$$\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x}.$$

Quand x tend vers 0, $3x$ tend aussi vers 0, et $\dfrac{\sin(3x)}{3x}$ se rapproche de 1. La limite vaut donc 3. Le résultat qui suit le justifie.

La limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ en 0 en entraîne d'autres.

Pourquoi est-ce vrai ? Pour $\tan x$, la preuve écrit un produit de deux quotients connus. Pour $\sin(cx)$, elle se ramène en 0 avec $t = cx$. Pour $1 - \cos x$, elle reprend la formule de duplication.

Les limites usuelles

Propriété : Limites trigonométriques usuelles

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Pour tout réel c non nul : $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(cx)}{cx} = 1$, donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(cx)}{x} = c$.

Démonstration

Étape 1. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x \neq 0$, $\dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{1}{\cos x}$. Comme $\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \neq 0$ (F17), les règles du produit et du quotient (F12) et F16 donnent la limite $1 \times 1 = 1$.

Étape 2. Soit $c \neq 0$. F04 (point 3), appliquée à $g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$, de limite 1 en 0 (F16), donne $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(cx)}{cx} = 1$. Comme $\dfrac{\sin(cx)}{x} = c \times \dfrac{\sin(cx)}{cx}$, sa limite est c (F12).

Étape 3. Pour $x \neq 0$, $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$ (formule de duplication), donc $\dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$. Par l'étape 2 avec $c = \dfrac{1}{2}$, et par produit (F12), cette expression tend vers $\dfrac{1}{2} \times 1^2 = \dfrac{1}{2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On ne crée aucune nouvelle limite : on **fait apparaître** $\dfrac{\sin t}{t}$, avec le bon t.

Si $t = cx$, il faut diviser par cx, pas par x : on multiplie et on divise par c.

Pour $1 - \cos x$, la duplication donne $2\sin^2 \dfrac{x}{2}$, avec $t = \dfrac{x}{2}$.

Vérifie : Le facteur qui manque

Dans la preuve, comment obtient-on $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$?

A. Par la règle du quotient, avec les limites de $1 - \cos x$ et de x^2.

Faux.

Ces deux limites valent 0 : c'est une forme $\dfrac{0}{0}$, où la règle ne s'applique pas.

B. En écrivant le quotient comme $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$.

Juste.

Juste : la formule de duplication fait apparaître $\dfrac{\sin t}{t}$ avec $t = \dfrac{x}{2}$.

C. En remplaçant $\cos x$ par sa limite 1.

Faux.

On obtiendrait $\dfrac{0}{x^2} = 0$: remplacer un morceau par sa limite est une erreur.

D. Par la limite de $\dfrac{\tan x}{x}$.

Faux.

$\tan x$ n'apparaît pas dans ce quotient.

Correction

Pour $x \neq 0$, la formule de duplication donne $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$. Donc :

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Avec $c = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ tend vers 1. Par produit, le quotient tend vers $\dfrac{1}{2} \times 1^2 = \dfrac{1}{2}$.

Exemple **: Exemple guidé : combiner deux limites usuelles**

Énoncé. Soit f la fonction définie, pour tout réel x qui n'est pas un multiple entier de π, par $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x \sin x}$. Calculons $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Forme. En 0, c'est une forme $\dfrac{0}{0}$.

Transformation. Pour $0 < |x| < \pi$, on a $\sin x \neq 0$, et $f(x)$ s'écrit :

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{x}{\sin x}.$$

Limites. Or $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (limite usuelle). Et $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ (limite de référence et règle du quotient).

Conclusion. Par produit, $\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Méthode et piège

Méthode **: calculer une limite trigonométrique**

1. **En** 0, faire apparaître $\dfrac{\sin(cx)}{cx}$, $\dfrac{\tan x}{x}$ ou $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. On multiplie et on divise par le facteur qui manque.
2. **En un réel** $a \neq 0$, poser $x = a + h$ et développer par les formules d'addition. On se ramène ainsi à une limite en 0.

3. **Conclure** par les opérations, en nommant chaque limite de référence employée.

Exemple : en un réel, poser $x = a + h$

Calculons $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

Changement de variable. Posons $x = \dfrac{\pi}{2} + h$: x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ si et seulement si h tend vers 0. Par la formule d'addition :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = -\sin h.$$

Donc, pour $h \neq 0$, le quotient vaut $-\dfrac{\sin h}{h}$.

Conclusion. Par la limite de référence, ce quotient tend vers -1. Ainsi la limite cherchée vaut -1.

Attention : $\dfrac{\sin x}{x}$ tend vers 1 en 0 seulement

✗ « $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, par la limite de référence. »

✓ La limite de référence ne vaut qu'en 0, pour x en radians.

En $+\infty$, on a $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$: la section suivante montre que la limite vaut 0.

En π, par la limite de $\sin$ en un réel et la règle du quotient, la limite vaut $\dfrac{\sin \pi}{\pi} = 0$.

À toi

À toi : Faire apparaître les limites usuelles

Calcule (a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(5x)}{2x}$; (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

En (a), fais apparaître $\dfrac{\sin(5x)}{5x}$.

Indice 2

En (b), factorise : $\tan x - \sin x = \tan x\,(1 - \cos x)$, car $\sin x = \tan x \cos x$.

Indice 3

Point délicat : en (b), découpe $x^3 = x \times x^2$, et associe chaque facteur à une limite usuelle.

Réponse

(a) Pour $x \neq 0$:

$$\frac{\sin(5x)}{2x} = \frac{5}{2} \times \frac{\sin(5x)}{5x}.$$

La limite usuelle, avec $c = 5$, donne 1. Par produit, la limite vaut $\frac{5}{2}$.

(b) Pour $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, on a $\tan x - \sin x = \tan x\,(1 - \cos x)$. Donc :

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\tan x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Par les limites usuelles et par produit, la limite vaut $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Remarque : Coin devoir : une limite trigonométrique

En devoir, nomme la limite usuelle et la transformation. Écris :

« Pour $x \neq 0$, $\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x}$. Or $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$ (limite usuelle, avec $c = 3$). Donc, par produit, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$. »

Les mesures sont toujours en radians.

Limites par comparaison et par encadrement

Coincé entre deux

En clair. Imagine un nombre coincé entre deux autres. Si ces deux nombres se rapprochent tous deux de ℓ, le nombre coincé n'a pas le choix : il se rapproche aussi de ℓ.

C'est l'image des deux gendarmes qui encadrent un suspect. Elle permet de trouver une limite sans la calculer directement.

Devine : Deux gendarmes

Pour tout $x \neq 0$, on sait seulement que $1 - x^2 \leq g(x) \leq 1 + x^2$. Que peut-on prévoir pour la limite de g en 0 ?

A. Rien : il faut connaître la formule de g.

Faux.

L'encadrement suffit : les deux bornes tendent vers 1.

B. Elle vaut 0, car x^2 tend vers 0.

Faux.

C'est $g(x)$ qui est encadré, pas x^2 : les bornes tendent vers 1.

C. Elle vaut 2, la somme des limites des bornes.

Faux.

Additionner les bornes n'a pas de sens ici : $g(x)$ est entre elles.

D. Elle vaut 1.

Juste.
Juste : $g(x)$ est coincé entre deux expressions de limite 1.

Correction
Par somme, $\lim_{x\to 0}(1-x^2)=1$ et $\lim_{x\to 0}(1+x^2)=1$.

Le réel $g(x)$ est coincé entre ces deux expressions : sa limite en 0 vaut aussi 1. Le résultat qui suit le démontre.

Comparaison et encadrement

L'image des gendarmes est-elle une preuve ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve part de la définition : elle majore l'écart $|f(x)-\ell|$ par une quantité qui tend vers 0. Pour l'encadrement, elle raisonne par disjonction des cas : $f(x)\geq\ell$, ou $f(x)<\ell$.

Propriété : Limite par comparaison ; encadrement

Soit a et ℓ deux réels, et f, u, v trois fonctions définies sur un même ensemble $]a-r,a[\cup]a,a+r[$, avec $r>0$.

1. Si $|f(x)-\ell|\leq u(x)$ pour tout x de cet ensemble, et si $\lim_{x\to a}u(x)=0$, alors $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$.
2. Si $u(x)\leq f(x)\leq v(x)$ pour tout x de cet ensemble, et si $\lim_{x\to a}u(x)=\lim_{x\to a}v(x)=\ell$, alors $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$.

Ces résultats restent vrais à droite ou à gauche en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$, l'inégalité étant supposée sur un intervalle $]a,a+r[$, $]a-r,a[$, $]b,+\infty[$ ou $]-\infty,b[$.

Démonstration
On l'écrit en un réel a ; ailleurs, seule la condition sur x change (F06, F09) : $a<x<a+\alpha$, $a-\alpha<x<a$, $x>B$ ou $x<-B$.

Étape 1. Point 1. Soit $\varepsilon>0$. Comme $\lim_{x\to a}u(x)=0$, il existe $\alpha>0$ tel que $|u(x)|<\varepsilon$ pour $0<|x-a|<\alpha$ (F01) ; quitte à le remplacer par le plus petit des réels α et r, on suppose $\alpha\leq r$. Pour un tel x, $|f(x)-\ell|\leq u(x)\leq|u(x)|<\varepsilon$: c'est la définition (F01) de $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$.

Étape 2. Point 2. Soit x dans l'ensemble. Par disjonction des cas : si $f(x)\geq\ell$, $|f(x)-\ell|=f(x)-\ell\leq v(x)-\ell\leq|v(x)-\ell|$; sinon, $|f(x)-\ell|=\ell-f(x)\leq\ell-u(x)\leq|u(x)-\ell|$. Dans les deux cas, $|f(x)-\ell|\leq w(x)$, où $w(x)=|u(x)-\ell|+|v(x)-\ell|$.

Étape 3. Soit $\varepsilon>0$. D'après F01, appliquée avec $\dfrac{\varepsilon}{2}$ à u et à v, $w(x)<\varepsilon$ pour x assez proche de a : donc $\lim_{x\to a}w(x)=0$. Le point 1, appliqué avec w, donne $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer que f tend vers ℓ sans calculer, il suffit de **majorer** $|f(x)-\ell|$ par $u(x)$, où u est une fonction de limite 0.

Un encadrement $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ se ramène à ce cas. On majore alors $|f(x)-\ell|$ par :

$$|u(x)-\ell| + |v(x)-\ell|.$$

Vérifie : Le bon gendarme

À l'étape 2 de la preuve, dans le cas $f(x) \geq \ell$, quelle inégalité donne la majoration de $|f(x)-\ell|$?

A. $f(x)-\ell \leq v(x)-\ell$

Juste.

Juste : comme $f(x) \leq v(x)$, l'écart positif $f(x)-\ell$ est majoré par $v(x)-\ell$.

B. $f(x)-\ell \leq u(x)-\ell$

Faux.

On a $u(x) \leq f(x)$: cette inégalité est dans le mauvais sens.

C. $\ell - f(x) \leq \ell - u(x)$

Faux.

Elle est vraie, mais elle sert dans l'autre cas, quand $f(x) < \ell$.

D. $|f(x)| \leq |v(x)|$

Faux.

Rien ne le garantit, et cette inégalité ne fait pas apparaître ℓ.

Correction

Si $f(x) \geq \ell$, alors $|f(x)-\ell| = f(x)-\ell$. Comme $f(x) \leq v(x)$:

$$f(x)-\ell \leq v(x)-\ell \leq |v(x)-\ell|.$$

Dans l'autre cas, on utilise $u(x) \leq f(x)$ de la même façon.

Un facteur borné

Exemple : un facteur borné

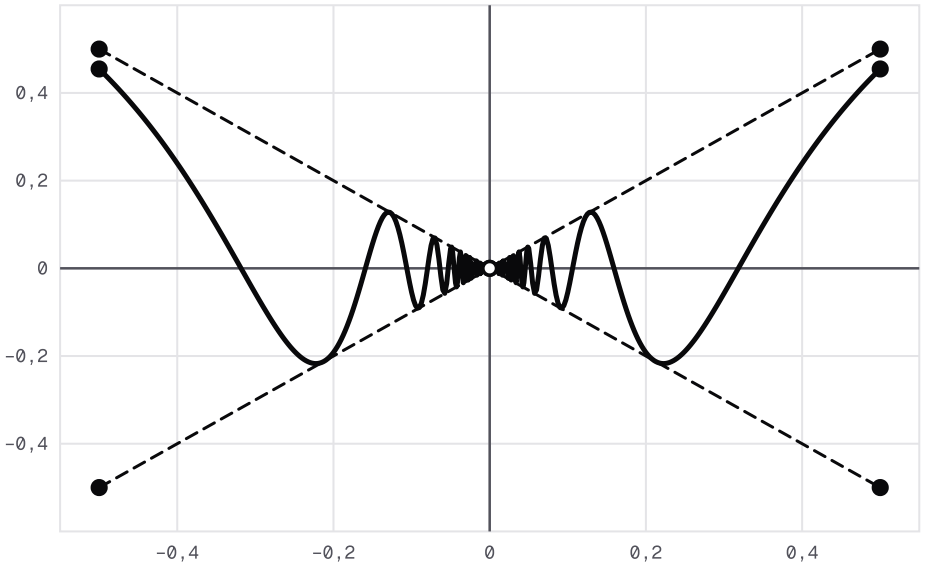
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$.

Majoration. Pour tout $x \neq 0$, $\left|\sin \dfrac{1}{x}\right| \leq 1$. Donc :

$$\begin{aligned} |f(x)-0| &= |x| \left|\sin \frac{1}{x}\right| \\ &\leq |x|. \end{aligned}$$

Conclusion. Or $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ (limite de référence). Par comparaison, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Pourtant, $\sin\dfrac{1}{x}$ oscille sans cesse entre -1 et 1 près de 0 : c'est le facteur x qui écrase tout.



$y = x\sin\frac{1}{x}$ $y = |x|$ $y = -|x|$ Point du graphe Point exclu du graphe

Courbe de x ↦ x sin(1/x) sur [−1/2, 0[et]0, 1/2], entre les droites brisées y = |x| et y = −|x|. La courbe oscille de plus en plus vite près de 0, mais reste coincée entre les deux gendarmes, qui se rejoignent en 0.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0.

Méthode, puis à toi

Méthode : limite par comparaison ou par encadrement

1. **Encadrer** ou majorer l'expression par des inégalités connues : $-1 \le \sin t \le 1$, $-1 \le \cos t \le 1$, $x - 1 < E(x) \le x$.
2. **Pour une limite finie** ℓ, majorer $|f(x) - \ell|$ par une fonction de limite 0, ou encadrer $f(x)$ entre deux fonctions de même limite.
3. **Pour une limite infinie**, minorer $f(x)$ par une fonction de limite $+\infty$, ou la majorer par une fonction de limite $-\infty$.
4. **Préciser** l'ensemble sur lequel l'inégalité est vraie.

Exemple : $\dfrac{E(x)}{x}$ en $+\infty$

Pour tout réel x, $x - 1 < E(x) \le x$. Pour $x > 0$, on divise par x : $\dfrac{x-1}{x} < \dfrac{E(x)}{x} \le 1$, soit :

$$1 - \frac{1}{x} < \frac{E(x)}{x} \le 1.$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$, par la limite de référence et par somme. Et la constante 1 a pour limite 1.

Par encadrement, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{E(x)}{x}=1$.

À toi : Encadrer un terme borné

Montre que (a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$; (b) $\lim_{x\to0}x^2\cos\dfrac{1}{x}=0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Encadre $\sin x$ et $\cos\dfrac{1}{x}$ entre -1 et 1.

Indice 2

Pour $x>0$, $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le\dfrac{1}{x}$; pour $x\neq0$, $\left|x^2\cos\dfrac{1}{x}\right|\le x^2$.

Indice 3

Point délicat : précise l'ensemble où l'inégalité est vraie, $x>0$ en (a) et $x\neq0$ en (b).

Réponse

(a) Pour $x>0$, $|\sin x|\le1$, donc :

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|\le\frac{1}{x}.$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ (limite de référence). Par comparaison, la limite vaut 0.

(b) Pour $x\neq0$, $\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\le1$, donc :

$$\left|x^2\cos\frac{1}{x}-0\right|\le x^2.$$

Or $\lim_{x\to0}x^2=0$ (limite de référence). Par comparaison, la limite vaut 0.

Comparaison et limites infinies

Pousser vers l'infini

Devine : Au-dessus d'une courbe qui monte

On sait seulement que $g(x)\ge\sqrt{x}$ pour tout $x>0$. Que peut-on dire de la limite de g en $+\infty$?

A. Rien : il faut connaître la formule de g.

Faux.

L'inégalité suffit : $\sqrt{x}$ dépasse tout seuil, et $g(x)$ est au-dessus.

B. Rien : g pourrait osciller.

Faux.

Elle peut osciller, mais toujours au-dessus de $\sqrt{x}$, qui dépasse tout seuil.

C. Elle vaut $+\infty$.

Juste.

Juste : $g(x)$ est minoré par une expression de limite $+\infty$.

D. Elle vaut 0.

Faux.

$g(x) \geq \sqrt{x}$, et $\sqrt{100} = 10$: $g(x)$ ne peut pas rester proche de 0.

Correction

Soit $A > 0$. Comme $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ (limite de référence), il existe $B > 0$ tel que $\sqrt{x} > A$ pour tout $x > B$. Alors, pour tout $x > B$, $g(x) \geq \sqrt{x} > A$.

Ainsi $g(x)$ dépasse tout seuil pour x assez grand : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Une **minoration** suffit, sans formule.

Minorer par une fonction qui tend vers $+\infty$ suffit-il toujours ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve reprend la définition avec un seuil A : si $u(x) > A$, alors $f(x) \geq u(x) > A$. Pour $-\infty$, elle remplace f par $-f$.

Le résultat

Propriété : Comparaison et limites infinies

Soit f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle $]b, +\infty[$.

1. Si $f(x) \geq u(x)$ pour tout $x > b$, et si $\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Si $f(x) \leq v(x)$ pour tout $x > b$, et si $\lim_{x \to +\infty} v(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Ces résultats restent vrais en $-\infty$, en un réel a, à droite ou à gauche en a, l'inégalité étant supposée sur l'ensemble correspondant.

Démonstration

On l'écrit en $+\infty$; ailleurs, seule la condition sur x change (F05, F06, F10).

Étape 1. Soit $A > 0$. Comme $\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, il existe $B > 0$ tel que $u(x) > A$ pour tout $x > B$ du domaine (F10). Soit B' le plus grand des réels B et $|b|$. Pour tout $x > B'$: $x > b$, donc $f(x) \geq u(x) > A$. Ainsi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (F10).

Étape 2. Pour tout $A > 0$, $v(x) < -A$ équivaut à $-v(x) > A$: d'après F10, $\lim_{x \to +\infty} v(x) = -\infty$ équivaut à $\lim_{x \to +\infty} \big(-v(x)\big) = +\infty$. Or $-f(x) \geq -v(x)$ pour tout $x > b$: l'étape 1 donne $\lim_{x \to +\infty} \big(-f(x)\big) = +\infty$, c'est-à-dire $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une minoration suffit pour $+\infty$, une majoration pour $-\infty$.

Le seuil trouvé pour u convient pour f, à condition que x soit aussi dans l'ensemble où l'inégalité est vraie. D'où le plus grand des réels B et $|b|$.

Exemple : $x + \sin x$ à l'infini

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin x$. Pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc :

$$x - 1 \leq f(x) \leq x + 1.$$

En $+\infty$. Or $\lim_{x \to +\infty}(x - 1) = +\infty$ (limite d'un polynôme). Par comparaison, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

En $-\infty$. De même, $f(x) \leq x + 1$ et $\lim_{x \to -\infty}(x + 1) = -\infty$. Donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Les règles d'opérations ne suffisaient pas, car $\sin x$ oscille.

Vérifier, puis à toi

Vérifie : Le bon sens de l'inégalité

Pour montrer $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ par comparaison, que faut-il ?

A. Une fonction u telle que $f(x) \geq u(x)$ et $\lim u = -\infty$.

Faux.
Être au-dessus d'une fonction qui descend n'empêche pas f de rester grande.

B. Une fonction v telle que $f(x) \leq v(x)$ et $\lim v = -\infty$.

Juste.
Juste : $f(x)$ est sous $v(x)$, qui passe sous tout seuil $-A$.

C. Que f soit décroissante.

Faux.
Une fonction décroissante peut avoir une limite finie : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

D. Que $f(x) < 0$ pour tout x.

Faux.
$-\dfrac{1}{x}$ est strictement négatif sur $]0, +\infty[$, et tend vers 0.

Correction
Le point 2 de la propriété demande une **majoration** : $f(x) \leq v(x)$ pour $x > b$, avec $\lim_{x \to +\infty} v(x) = -\infty$.

Alors, pour tout $A > 0$, $f(x) \leq v(x) < -A$ dès que x est assez grand.

À toi : Minorer ou majorer

Calcule (a) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+3\cos x\right)$; (b) $\lim_{x\to-\infty}\left(x+E(x)\right)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Minore ou majore le terme qui oscille : $\cos x \geq -1$, et $E(x) \leq x$.
Indice 2
On obtient $x^2+3\cos x \geq x^2-3$, et $x+E(x) \leq 2x$.
Indice 3
Point délicat : pour une limite $-\infty$, il faut une majoration, pas une minoration.

Réponse
(a) Pour tout réel x, $\cos x \geq -1$, donc :

$$x^2+3\cos x \geq x^2-3.$$

Or $\lim_{x\to+\infty}(x^2-3)=+\infty$ (limite d'un polynôme). Par comparaison, la limite vaut $+\infty$.

(b) Pour tout réel x, $E(x) \leq x$, donc :

$$x+E(x) \leq 2x.$$

Or $\lim_{x\to-\infty} 2x=-\infty$ (limite de référence, produit par $2>0$). Par comparaison, la limite vaut $-\infty$.

Passer à la limite dans une inégalité

Une inégalité à la limite

Devine : Que reste-t-il de l'inégalité ?

Pour tout $x\neq 0$, $f(x)\leq 2+x^2$, et f a une limite finie ℓ en 0. Que peut-on affirmer ?

A. $\ell<2$

Faux.
La fonction constante égale à 2 vérifie l'hypothèse, et sa limite vaut 2.

B. $\ell=2$

Faux.
La fonction nulle vérifie l'hypothèse, et sa limite vaut 0.

C. Rien sur ℓ.

Faux.
L'inégalité passe à la limite : elle dit quelque chose de ℓ.

D. $\ell\leq 2$

Juste.
Juste : la limite de $2+x^2$ en 0 vaut 2.

Correction
Par somme, $\lim_{x\to 0}(2+x^2)=2$. On s'attend à ce que l'inégalité $f(x)\leq 2+x^2$ donne $\ell\leq 2$.

> On ne peut pas dire mieux : la fonction constante égale à 2 donne $\ell = 2$, et la fonction nulle donne $\ell = 0$.

Une inégalité vraie près de a passe-t-elle toujours aux limites ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve raisonne par l'absurde. Si $\ell > \ell'$, une tolérance égale à la moitié de l'écart sépare les deux limites. Un x proche de a donnerait alors $g(x) < f(x)$.

Le résultat

Propriété : Limites et ordre : passage à la limite dans une inégalité

Soit a un réel, et f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $]a-r, a[\cup]a, a+r[$, avec $r > 0$, telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de cet ensemble. Si f et g ont en a des limites finies ℓ et ℓ', alors $\ell \leq \ell'$.

En particulier, si $g(x) \geq 0$ pour tout x de cet ensemble et si $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$, alors $\ell' \geq 0$. Ces résultats restent vrais à droite ou à gauche en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Démonstration

On l'écrit en un réel a ; ailleurs, seule la condition sur x change (F06, F09) : le point x de l'étape 2 devient $a - \dfrac{\alpha}{2}$ à gauche, ou un réel assez grand en $+\infty$ (assez petit en $-\infty$).

Étape 1. Raisonnons par l'absurde : supposons $\ell > \ell'$, et posons $\varepsilon = \dfrac{\ell - \ell'}{2}$; alors $\varepsilon > 0$.

Étape 2. D'après F01, il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ si $0 < |x - a| < \alpha_1$, et $|g(x) - \ell'| < \varepsilon$ si $0 < |x - a| < \alpha_2$. Soit α le plus petit des réels α_1, α_2 et r, et $x = a + \dfrac{\alpha}{2}$.

Étape 3. Alors $f(x) > \ell - \varepsilon = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$ et $g(x) < \ell' + \varepsilon = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$, donc $g(x) < f(x)$: cela contredit $f(x) \leq g(x)$. Donc $\ell \leq \ell'$.

Étape 4. Le cas particulier s'obtient en prenant pour f la fonction nulle, de limite 0 (F03).

> **À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**
>
> Encore la moitié de l'écart : le choix
>
> $$\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{2}$$
>
> place $f(x)$ au-dessus de $\dfrac{\ell + \ell'}{2}$, et $g(x)$ en dessous. C'est le geste de l'unicité de la limite.
>
> On passe à la limite dans une inégalité **large**, et le résultat est large.

> **Vérifie : Le nombre qui sépare**

Dans la preuve, avec $\varepsilon = \dfrac{\ell - \ell'}{2}$, quel nombre sépare $f(x)$ et $g(x)$?

A. $\dfrac{\ell + \ell'}{2}$

Juste.

Juste : c'est le milieu de ℓ' et ℓ.

B. $\ell - \ell'$

Faux.

C'est l'écart entre les limites, pas un nombre situé entre elles.

C. 0

Faux.

Rien n'indique que les limites sont de signes contraires.

D. ε

Faux.

ε est une tolérance, pas une valeur de la fonction.

Correction

D'après la définition, $f(x) > \ell - \varepsilon$ et $g(x) < \ell' + \varepsilon$. Or :

$$\ell - \varepsilon = \ell' + \varepsilon = \frac{\ell + \ell'}{2}.$$

Le milieu $\dfrac{\ell + \ell'}{2}$ sépare donc $g(x)$, en dessous, et $f(x)$, au-dessus. Cela contredit $f(x) \leq g(x)$.

Exemple : Contre-exemple : une inégalité stricte

Pour tout $x \neq 0$, $x^2 > 0$. Pourtant $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ (limite de référence) : la limite n'est pas strictement positive.

La propriété donne seulement $0 \geq 0$: l'inégalité stricte $x^2 > 0$ est devenue large à la limite.

Un piège, puis à toi

Attention : une inégalité stricte devient large

✗ « Pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$, donc $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} > 0$. »

✓ Par la limite de référence, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Si $f(x) < g(x)$ près de a, on peut seulement conclure $\ell \leq \ell'$: l'inégalité stricte $\ell < \ell'$ ne se déduit pas, en général.

À toi : Encadrer une limite

Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$, telle que $1-\dfrac{1}{x} \leq f(x) < 3$ pour tout $x>0$. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, avec ℓ réel. Montre que $1 \leq \ell \leq 3$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Passe à la limite dans chacune des deux inégalités.

Indice 2

Par somme, $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 1$; et la constante 3 a pour limite 3.

Indice 3

Point délicat : l'inégalité stricte $f(x) < 3$ ne donne que $\ell \leq 3$.

Réponse

Minoration. Par la limite de référence et par somme, $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 1$. Comme $1-\dfrac{1}{x} \leq f(x)$ pour $x>0$, le passage à la limite donne $1 \leq \ell$.

Majoration. Comme $f(x) < 3$, on a aussi $f(x) \leq 3$: le passage à la limite donne $\ell \leq 3$.

Conclusion. Ainsi $1 \leq \ell \leq 3$. On ne peut pas conclure $\ell < 3$.

Racine carrée d'une fonction ; quantité conjuguée

Une différence de deux grands nombres

Devine : Deux grands nombres presque égaux

D'après toi, que vaut $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$?

A. $+\infty$, car $\sqrt{x^2+1}$ tend vers $+\infty$.

Faux.

Le terme $-x$ tend vers $-\infty$: c'est une forme $(+\infty)+(-\infty)$.

B. 1, car on retranche x à $\sqrt{x^2+1}$.

Faux.

Pour $x=100$, la différence vaut environ $0{,}005$: loin de 1.

C. 0

Juste.

Juste : $\sqrt{x^2+1}$ et x sont presque égaux pour x grand.

D. Elle n'existe pas : c'est une forme indéterminée.

Faux.

Une forme indéterminée oblige à transformer ; elle n'empêche pas la limite d'exister.

Correction

Pour $x=100$, $\sqrt{10001}-100$ vaut environ $0{,}005$. Les deux termes deviennent grands, mais leur différence devient petite.

Pour le démontrer, il faut deux outils : la limite de la racine carrée d'une fonction, et la quantité conjuguée.

On sait que $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$. Mais si l'on connaît la limite de $f(x)$, que dire de celle de $\sqrt{f(x)}$?

Pourquoi est-ce vrai ? Pour une limite $\ell>0$, la preuve emploie la quantité conjuguée, puis la comparaison. Pour $\ell=0$, elle part de la définition, avec la tolérance ε^2.

Racine carrée d'une fonction

Propriété : Limite de la racine carrée d'une fonction

Soit f une fonction positive sur un ensemble $]a-r,a[\cup]a,a+r[$, avec $r>0$.

- Si $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$, alors $\ell\geq 0$ et $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$.
- Si $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=+\infty$.

Ces résultats restent vrais à droite ou à gauche en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$, f étant positive sur l'ensemble correspondant.

Démonstration

On l'écrit en un réel a ; ailleurs, seule la condition sur x change.

Étape 1. D'après F21, $\ell\geq 0$. Si $\ell>0$: pour x dans l'ensemble, $\sqrt{f(x)}-\sqrt{\ell}=\dfrac{f(x)-\ell}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{\ell}}$, donc $\left|\sqrt{f(x)}-\sqrt{\ell}\right|\leq\dfrac{|f(x)-\ell|}{\sqrt{\ell}}$. Le second membre tend vers 0 (F04, point 2 ; F12) : F19 (point 1) conclut.

Étape 2. Si $\ell=0$: soit $\varepsilon>0$. D'après F01, appliquée avec ε^2, il existe $\alpha>0$ tel que $0\leq f(x)<\varepsilon^2$ pour $0<|x-a|<\alpha$; la racine carrée étant strictement croissante, $\sqrt{f(x)}<\varepsilon$: donc $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=0$ (F01).

Étape 3. Si $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$: soit $A>0$. D'après F05, appliquée au seuil A^2, $f(x)>A^2$ pour x assez proche de a, donc $\sqrt{f(x)}>A$: $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=+\infty$ (F05).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées réutilisables.

La quantité conjuguée. L'égalité

$$\sqrt{f(x)}-\sqrt{\ell}=\frac{f(x)-\ell}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{\ell}}$$

ramène la racine à $f(x)-\ell$.

La stricte croissance de la racine carrée. L'inégalité $f(x) < \varepsilon^2$ donne $\sqrt{f(x)} < \varepsilon$, et $f(x) > A^2$ donne $\sqrt{f(x)} > A$.

Vérifie : Pourquoi la tolérance au carré ?

Dans le cas $\ell = 0$, pourquoi applique-t-on la définition avec la tolérance ε^2 ?

A. Parce que $0 \leq f(x) < \varepsilon^2$ donne $\sqrt{f(x)} < \varepsilon$.

Juste.

Juste : la racine carrée est strictement croissante, et $\sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$.

B. Parce que $\varepsilon^2 < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Faux.

C'est faux pour $\varepsilon > 1$: par exemple $2^2 = 4 > 2$.

C. Pour que $f(x)$ soit positif.

Faux.

La positivité de f est une hypothèse de l'énoncé, pas une conséquence du choix.

D. Parce que la définition impose une tolérance au carré.

Faux.

La définition vaut pour toute tolérance : la preuve choisit ε^2 pour viser $\sqrt{f(x)} < \varepsilon$.

Correction

On veut $\sqrt{f(x)} < \varepsilon$. Comme la racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, il suffit d'avoir $0 \leq f(x) < \varepsilon^2$.

La définition de $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, appliquée avec la tolérance $\varepsilon^2 > 0$, fournit l'écart α.

La quantité conjuguée

Méthode : utiliser la quantité conjuguée

1. **Repérer** une forme indéterminée qui contient $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, ou $\sqrt{A} - C$. Multiplier le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, ou $\sqrt{A} + C$.
2. **Développer** : $\left(\sqrt{A} - \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right) = A - B$, qui ne contient plus de racine.
3. **Simplifier**, puis conclure par les opérations et par la limite de la racine carrée d'une fonction.

Exemple : Exemple guidé : une forme $(+\infty) + (-\infty)$

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$. Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Forme. On a $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ (limite d'un polynôme), donc $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ (racine carrée d'une fonction). C'est une forme $(+\infty) + (-\infty)$.

Quantité conjuguée. Pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} > |x| \geq -x$, donc $\sqrt{x^2+1}+x > 0$. En multipliant par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}. \end{aligned}$$

Conclusion. Par somme, le dénominateur tend vers $+\infty$. Par la règle du quotient, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exemple : une forme $\dfrac{0}{0}$ avec une racine

Soit g la fonction définie sur $[-4,0[\,\cup\,]0,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

Forme. Par somme, $\lim_{x\to 0}(x+4) = 4$, donc $\lim_{x\to 0}\sqrt{x+4} = 2$ (racine carrée d'une fonction) : c'est une forme $\dfrac{0}{0}$.

Quantité conjuguée. Pour $x \neq 0$ dans cet ensemble :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x+4)-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Par somme puis par quotient, $\lim_{x\to 0} g(x) = \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$.

L'hypothèse, puis à toi

Exemple : Contre-exemple : une racine qui n'existe pas

L'hypothèse « f positive » est nécessaire. Pour $x \neq 0$, $-x^2 < 0$, et pourtant $\lim_{x\to 0}\left(-x^2\right) = 0$.

Or $\sqrt{-x^2}$ n'existe pour aucun $x \neq 0$: on ne peut pas parler de sa limite en 0.

Vérifie toujours que $f(x) \geq 0$ près du point avant d'écrire $\sqrt{f(x)}$.

À toi : Quantité conjuguée

Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Multiplie et divise par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2+x}+x$.

Indice 2

Tu obtiens $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$. Pour $x>0$, écris $\sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$.

Indice 3

Point délicat : $\sqrt{x^2} = x$ seulement pour $x \geq 0$; simplifie ensuite par x.

Réponse
Forme. C'est une forme $(+\infty) + (-\infty)$.

Quantité conjuguée. Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+x} + x > 0$, et $\sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$. Donc :

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+x} - x\\ &= \frac{(x^2+x) - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x}\\ &= \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}} + x}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}.\end{aligned}$$

Limite. Par la limite de référence de $\dfrac{1}{x}$ et par somme, $1 + \dfrac{1}{x}$ tend vers 1 ; par la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ tend vers 1.

Conclusion. Par somme et par quotient, la limite vaut $\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

Remarque : Coin devoir : la quantité conjuguée

En devoir, écris la quantité conjuguée, et vérifie qu'elle ne s'annule pas. Écris :

« Pour tout $x > 0$, $\sqrt{A(x)} + B(x) > 0$, donc $\sqrt{A(x)} - B(x) = \dfrac{A(x) - B(x)^2}{\sqrt{A(x)} + B(x)}$. »

Simplifie ensuite, et nomme chaque règle : somme, quotient, racine carrée d'une fonction.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quelle forme

- Limite par la définition : « Soit $\varepsilon > 0$ » ; majorer $|f(x) - \ell|$; choisir α, ou un seuil B.
- Polynôme, ou fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas en a : la valeur en a.
- Dénominateur de limite 0, numérateur de limite non nulle : signe à droite et à gauche.
- Forme $\dfrac{0}{0}$ en a : factoriser par $x - a$; avec une racine, quantité conjuguée ; avec $\sin$, $\cos$ ou $\tan$, limites usuelles.
- À l'infini : terme de plus haut degré ; avec une racine, quantité conjuguée.
- Terme qui oscille, comme $\sin x$, $\cos x$ ou $E(x)$: comparaison ou encadrement.

Le mot du prof. Tu sais maintenant donner un sens précis à « $f(x)$ tend vers ℓ ». Tu sais aussi calculer une limite en nommant chaque règle.

Ces outils servent aussitôt. Les chapitres suivants reposent sur des limites de la forme $\frac{0}{0}$. Le chapitre « Étude de fonctions » emploie les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Garde l'habitude : la forme d'abord, la règle ensuite.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Limite d'une fonction numérique » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)