BURHAN

Résumé : Géométrie analytique de l'espace

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/resume

Chapitre	Semestre
Géométrie analytique de l'espace	Semestre 2

Base, repère et coordonnées

Ce Résumé reprend l'essentiel du chapitre : repérer un point de l'espace par trois nombres, puis décider par le calcul d'un alignement, d'une coplanarité ou d'une intersection.

Le cube $ABCDEFGH$ a pour faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), et pour arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$. Trace-le à main levée : ton dessin guide le calcul, mais aucune propriété ne se lit sur une perspective.

Théorème : Décomposition d'un vecteur suivant trois vecteurs non coplanaires

Soit $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs **non coplanaires** de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un **unique** triplet (x, y, z) de réels tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Définition : Base, repère et coordonnées

- Un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs **non coplanaires** est une **base** de l'espace. Les réels x, y, z tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ sont les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans cette base ; on note $\vec{u}(x, y, z)$.
- Un **repère** de l'espace est un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ formé d'un point O, l'**origine**, et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- Les **coordonnées** d'un point M dans ce repère sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$: on note $M(x, y, z)$ lorsque $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Le réel x est l'**abscisse**, y l'**ordonnée** et z la **cote** de M.

Exemple : Les sommets d'un cube

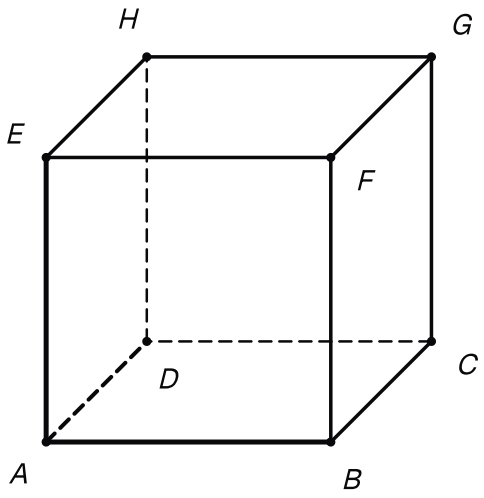
Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ du cube, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$ et $E(0, 0, 1)$. Les faces sont des parallélogrammes : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$. Par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE},\end{aligned}$$

donc $G(1, 1, 1)$. De même,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE},\end{aligned}$$

ce qui donne $H(0, 1, 1)$.



Les vecteurs AB, AD et AE portés par trois arêtes : chaque sommet du cube se lit par trois nombres.

Attention : Des coordonnées sans repère ne veulent rien dire

Un triplet de coordonnées n'a de sens qu'avec la base, ou le repère, qui le produit. Dans une autre base, le même vecteur a d'autres coordonnées. Écris toujours le repère choisi avant de calculer, et ne mélange jamais deux repères dans un même calcul.

Calculer avec les coordonnées ; colinéarité

Propriété : Coordonnées et opérations

Dans une base, soit $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs, et λ un réel. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points.

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$, et le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Vecteur défini par deux points

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Milieu de [AB]

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Somme de deux vecteurs

$$\vec{u} + \vec{v}\,(x + x', y + y', z + z')$$

Produit par un réel

$$\lambda\vec{u}\,(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

Exemple : Un vecteur, un milieu, un point

Soit $A(1, -2, 3)$ et $B(4, 0, -1)$. Alors $\overrightarrow{AB}(3, 2, -4)$, et le milieu de $[AB]$ est $I\left(\frac{5}{2}, -1, 1\right)$.

Le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ vérifie $x_D - 1 = 6$, $y_D + 2 = 4$ et $z_D - 3 = -8$: donc $D(7, 2, -5)$.

Propriété : Colinéarité de deux vecteurs en coordonnées

Dans une base, soit $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si les trois égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} xy' - x'y &= 0, \\ xz' - x'z &= 0, \\ yz' - y'z &= 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, les trois **déterminants extraits** suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}.$$

Méthode : Démontrer une colinéarité, ou la refuser

1. **Calcule** les coordonnées des deux vecteurs dans le même repère.
2. **Cherche** un réel λ qui multiplie les trois coordonnées de l'un pour donner celles de l'autre, ou calcule les trois déterminants extraits.
3. **Conclus** : trois déterminants nuls, ou λ trouvé, donnent la colinéarité ; un seul déterminant extrait non nul suffit pour la refuser.
4. **Traduis** : points alignés, droites parallèles, ou leur contraire.

Exemple : Aligné, puis non aligné

Soit $A(1, 0, 2)$, $B(3, 1, -1)$ et $C(7, 3, -7)$. On a $\overrightarrow{AB}(2, 1, -3)$ et $\overrightarrow{AC}(6, 3, -9)$, donc $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$: les points A, B, C sont alignés, avec $\lambda = 3$.

Avec $D(5, 2, -6)$, on a $\overrightarrow{AD}(4, 2, -8)$ et

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} = -16 + 12 = -4 \neq 0.$$

Ce déterminant extrait non nul prouve que A, B, D ne sont pas alignés.

Représentation paramétrique d'une droite

Propriété : Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère, soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point et $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur **non nul**. Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite $D(A, \vec{u})$ si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Ce système, où t parcourt $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** de la droite $D(A, \vec{u})$; le réel t est le **paramètre**.

Méthode : Écrire une droite et tester un point

1. **Choisis** un point de la droite et un vecteur directeur non nul ; pour la droite (AB), prends A et $\overrightarrow{AB}$.
2. **Écris** le système à un paramètre t, suivi de « $t \in \mathbb{R}$ ».
3. **Pour tester un point**, remplace ses coordonnées dans les trois équations.
4. **Conclus** : le point appartient à la droite exactement quand un même réel t satisfait les trois équations. Une équation sans t doit être vérifiée ; chacune des autres fournit une valeur de t, et ces valeurs doivent coïncider.

Exemple : Une droite, deux points testés

Soit $A(2, -1, 0)$ et $B(0, 1, 3)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(-2, 2, 3)$ dirige (AB) :

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour $M(-2, 3, 6)$, les trois équations donnent $t = 2$: $M \in (AB)$.

Pour $N(4, -3, 1)$, les deux premières donnent $t = -1$ et la troisième $t = \dfrac{1}{3}$: $N \notin (AB)$.

Attention : Deux écritures, peut-être une seule droite

Une même droite admet une infinité de représentations paramétriques : on peut partir d'un autre de ses points, ou multiplier le vecteur directeur par un réel non nul. Deux systèmes différents ne prouvent donc pas deux droites différentes. Compare les vecteurs directeurs, puis teste un point de l'une dans l'autre.

Déterminant de trois vecteurs

Définition : Déterminant de trois vecteurs

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace, et $\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{v}(x',y',z')$, $\vec{w}(x'',y'',z'')$ trois vecteurs. Le **déterminant** de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ dans cette base est le réel

$$\begin{aligned}&\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\\&=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}\\&=x\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x' & x''\\ z' & z''\end{vmatrix}\\&\quad+z\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix},\end{aligned}$$

où, pour tous réels a,b,c,d :

$$\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}=ad-bc.$$

Ce calcul est le **développement suivant la première colonne**.

Exemple : Un déterminant calculé pas à pas

Soit $\vec{u}(1,2,-1)$, $\vec{v}(3,0,2)$ et $\vec{w}(-2,1,4)$. On écrit les vecteurs en colonnes et on développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})&=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{vmatrix}\\&=1\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}\\&\quad-2\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{vmatrix}\\&\quad+(-1)\begin{vmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\&=1\times(-2)-2\times16\\&\quad+(-1)\times3\\&=-2-32-3\\&=-37.\end{aligned}$$

Propriété : Propriétés du déterminant

Dans une base fixée, pour tous vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tous réels α, β :

1. **Linéarité** : $\det(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) + \beta\det(\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w})$, et de même par rapport au deuxième et au troisième vecteur.
2. **Alternance** : échanger deux des trois vecteurs change le déterminant en son opposé. En particulier, un déterminant dont deux vecteurs sont égaux est nul.
3. On ne change pas un déterminant en ajoutant au troisième vecteur une combinaison linéaire des deux autres : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Remarque : Propriétés admises sous forme d'esquisse

Le cours ne donne de ces propriétés qu'une **idée de preuve** : les développements complets sont omis. Retiens surtout l'usage. Échanger deux vecteurs change le signe ; ainsi, avec les vecteurs de l'exemple précédent, $\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = 37$.

Méthode : Calculer un déterminant sans erreur de signe

1. **Range** les trois vecteurs en colonnes, dans l'ordre de l'énoncé.
2. **Développe** suivant la première colonne, avec les signes $+$, $-$, $+$.
3. **Calcule** les trois déterminants 2×2 par la règle $ad - bc$, puis la somme.
4. **Interprète** : déterminant nul, vecteurs coplanaires ; non nul, ils forment une base.

Déterminant et coplanarité

Théorème : Déterminant et coplanarité

Dans une base de l'espace, trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Remarque : Un théorème employé, esquissé au cours

Ce théorème n'est démontré qu'en **esquisse** dans le cours. Sont omis : le calcul du cas $c = 0$ du sens direct, celui de α et β dans la réciproque, et les autres déterminants extraits. Tu l'emploies librement, en le citant par son nom.

Propriété : Base, points coplanaires et déterminant

- Dans une base de l'espace, trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forment une **base** si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.

- Dans un repère, quatre points A, B, C, D sont **coplanaires** si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

Exemple : Quatre points dans un même plan

Soit $A(1,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(0,2,1)$ et $D(4,0,-1)$. Alors $\overrightarrow{AB}(1,1,-1)$, $\overrightarrow{AC}(-1,2,0)$ et $\overrightarrow{AD}(3,0,-2)$.

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&\quad - 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times (-4) - 1 \times 2 \\
&\quad + (-1) \times (-6) \\
&= -4 - 2 + 6 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Le déterminant est nul : les quatre points sont coplanaires.

À retenir : Ce que dit un déterminant

Un seul calcul, trois questions. Déterminant nul : trois vecteurs coplanaires, ou quatre points coplanaires. Déterminant non nul : les trois vecteurs forment une base, et les quatre points sont les sommets d'un tétraèdre.

Attention : Des vecteurs dans les colonnes, pas des points

Pour quatre points, le déterminant se calcule avec les coordonnées des **vecteurs** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, issus d'un même point. Placer dans les colonnes les coordonnées des points eux-mêmes donne un nombre qui ne décide de rien.

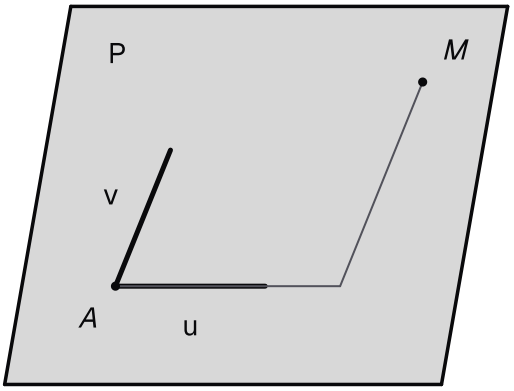
Représentation paramétrique et équation cartésienne d'un plan

Propriété : Représentation paramétrique d'un plan

Dans un repère, soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point, et $\vec{u}(a,b,c)$, $\vec{v}(a',b',c')$ deux vecteurs **non colinéaires**. Un point $M(x,y,z)$ appartient au plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement s'il existe deux réels s et t tels que

$$\begin{cases} x = x_A + sa + ta' \\ y = y_A + sb + tb' \\ z = z_A + sc + tc' \end{cases}$$

Ce système, où s et t parcourent $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.



Un point M du plan s'atteint depuis A par deux déplacements, l'un selon u, l'autre selon v.

Théorème : Équation cartésienne d'un plan

Dans un repère, tout plan P admet une équation de la forme

$$ax + by + cz + d = 0,$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$: un point $M(x, y, z)$ appartient à P si et seulement si ses coordonnées vérifient cette égalité. Une telle équation est une **équation cartésienne** du plan P.

Théorème : Plan défini par une équation cartésienne

Dans un repère, soit a, b, c, d quatre réels, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un **plan**.

Méthode : Trouver une équation cartésienne d'un plan

1. **Fixe** un point A du plan et deux vecteurs non colinéaires qui le dirigent, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. **Pose** $M(x, y, z)$ et écris $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.
3. **Développe** suivant la première colonne et réduis : tu obtiens $ax + by + cz + d = 0$.
4. **Contrôle** : chaque point donné doit vérifier l'équation.

Exemple : L'équation du plan (ABC)

Soit $A(1,0,2)$, $B(2,1,2)$ et $C(0,1,3)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(1,1,0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,1,1)$ ne sont pas colinéaires :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Pour $M(x,y,z)$:

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z-2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - y\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\times 1 - y \times 1 \\ &\quad + (z-2)\times 2 \\ &= x - y + 2z - 5. \end{aligned}$$

Le plan (ABC) a pour équation $x - y + 2z - 5 = 0$. Contrôle : $1 - 0 + 4 - 5 = 0$, $2 - 1 + 4 - 5 = 0$ et $0 - 1 + 6 - 5 = 0$.

Exemple : Le même plan, par deux paramètres

Avec le point A et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ de l'exemple précédent, le plan (ABC) admet la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + s - t \\ y = s + t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

Pour $s = 1$ et $t = 2$, on obtient le point $(0,3,4)$, qui vérifie bien $0 - 3 + 8 - 5 = 0$.

Attention : Une équation, un plan

Dans le plan, une équation $ax + by + c = 0$ décrit une droite. Dans l'espace, une équation $ax + by + cz + d = 0$ décrit toujours un **plan**. Même si une lettre manque, comme dans $x + y - 2 = 0$, c'est un plan. Une droite de l'espace demande deux équations, ou une représentation paramétrique.

Vecteurs de direction d'un plan ; équations d'une droite

Propriété : Vecteurs de direction d'un plan donné par une équation

Dans un repère, soit $P = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, et $\vec{w}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur. Le vecteur $\vec{w}$ est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

On dit alors que $\vec{w}$ est un **vecteur de direction** du plan P.

Méthode : Passer d'une équation à une représentation paramétrique

1. **Repère** dans $ax + by + cz + d = 0$ une inconnue dont le coefficient n'est pas nul.
2. **Isole**-la, et prends les deux autres inconnues comme paramètres s et t.
3. **Lis** sur le système un point (pour $s = t = 0$) et deux vecteurs de direction non colinéaires.
4. **Dans l'autre sens**, élimine s et t, ou développe $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Exemple : D'une équation à deux paramètres

Soit P le plan d'équation $2x - y + 3z - 4 = 0$. Le coefficient de y vaut -1 : on isole $y = 2x + 3z - 4$, puis on pose $x = s$ et $z = t$.

$$\begin{cases} x = s \\ y = -4 + 2s + 3t \\ z = t \end{cases} \quad s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

Le plan passe par $(0, -4, 0)$ et il est dirigé par $\vec{u}(1, 2, 0)$ et $\vec{v}(0, 3, 1)$.

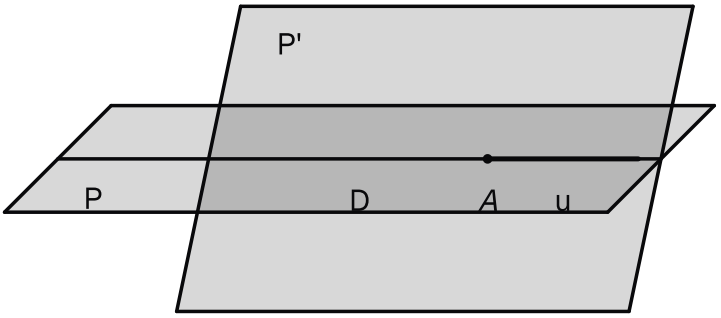
Contrôle par les vecteurs de direction : $2 \times 1 - 2 + 3 \times 0 = 0$ et $2 \times 0 - 3 + 3 \times 1 = 0$.

Propriété : Système d'équations cartésiennes d'une droite

Dans un repère, soit $D = D(A, \vec{u})$, avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{u}(a, b, c)$, où les réels a, b, c sont **tous non nuls**. Un point $M(x, y, z)$ appartient à D si et seulement si

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}.$$

Ce système de deux équations est un **système d'équations cartésiennes** de la droite D ; il présente D comme l'intersection de deux plans.



Deux plans sécants : leur intersection est la droite D, que dirige u.

Exemple : Une droite par deux équations

La droite passant par $A(1,-2,3)$, de vecteur directeur $\vec{u}(2,3,-1)$, a pour système d'équations cartésiennes

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}.$$

Le point de paramètre $t=1$ est $(3,1,2)$: les trois quotients valent $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$ et $\frac{-1}{-1}$, c'est-à-dire 1.

Deux droites ; une droite et un plan

Théorème : Droites coplanaires

Dans un repère, soit $D=D(A,\vec{u})$ et $D'=D(B,\vec{v})$ deux droites. Les droites D et D' sont **coplanaires** si et seulement si

$$\det(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v})=0.$$

Méthode : Étudier la position de deux droites

1. **Compare** les vecteurs directeurs. Colinéaires : les droites sont parallèles ; un point commun les rend confondues.
2. **Sinon**, calcule $\det(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v})$. Non nul : les droites ne sont pas coplanaires.
3. **Nul** : elles sont sécantes. Résous le système avec deux paramètres distincts t et t'.
4. **Conclus** en donnant le point d'intersection.

Exemple : Deux droites sécantes

Soit D passant par $A(1,0,-1)$ dirigée par $\vec{u}(1,2,1)$, et D' passant par $B(4,5,0)$ dirigée par $\vec{v}(1,1,-1)$. Un déterminant extrait n'est pas nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Avec $\overrightarrow{AB}(3,5,1)$:

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad - 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3\times(-3) - 5\times(-2) \\ &\quad + 1\times(-1) \\ &= -9 + 10 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les droites sont coplanaires et non parallèles : elles sont sécantes. Le système

$$\begin{cases} 1 + t = 4 + t' \\ 2t = 5 + t' \\ -1 + t = -t' \end{cases}$$

donne $t = 2$ et $t' = -1$: le point commun est $(3,4,1)$.

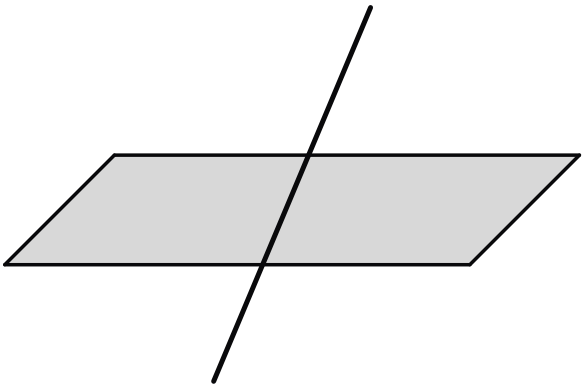
Attention : Un paramètre par droite

Quand tu cherches le point commun de deux droites, donne à leurs paramètres deux lettres différentes, t et t'. Avec la même lettre, tu imposes au point commun la même valeur du paramètre sur les deux droites. Rien ne le garantit : le système peut sembler impossible alors que les droites se coupent.

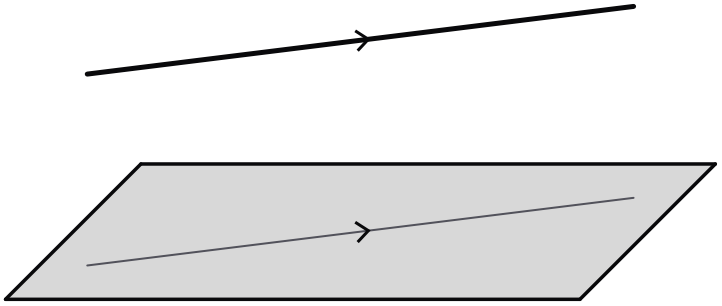
Propriété : Position relative d'une droite et d'un plan

Dans un repère, soit P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $D = D(A,\vec{u})$ une droite, avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ non nul. On pose $\delta = a\alpha + b\beta + c\gamma$.

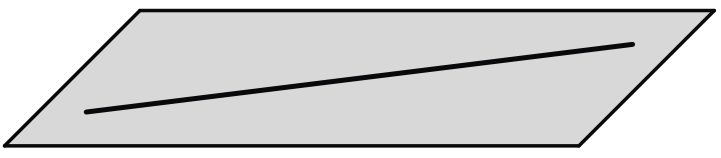
- Si $\delta \neq 0$, la droite D coupe le plan P en un **seul point**.
- Si $\delta = 0$, la droite D est parallèle à P : elle est **contenue** dans P si $A \in P$, et **strictement parallèle** à P, sans point commun, si $A \notin P$.



Premier cas : la droite perce le plan, un point commun.



Deuxième cas : la droite longe le plan à distance, aucun point commun.



Troisième cas : la droite est couchée dans le plan.

Méthode : Étudier la position d'une droite et d'un plan

1. **Prends** une représentation paramétrique de la droite et une équation cartésienne du plan.
2. **Substitue** ces expressions de x, y, z dans l'équation cartésienne : il reste une équation d'inconnue t.
3. **Compte** ses solutions : une seule, la droite coupe le plan, et tu calcules le point ; aucune, elle lui est strictement parallèle ; tout réel, elle y est contenue.
4. **Conclus** par une phrase qui nomme la position.

Exemple : Un point d'intersection, puis aucun

Soit P le plan d'équation $x + y + z - 6 = 0$ et D la droite $x = 2 + t$, $y = 1 - t$, $z = 3t$, $t \in \mathbb{R}$.

En remplaçant : $(2 + t) + (1 - t) + 3t - 6 = 3t - 3$. L'équation $3t - 3 = 0$ a une seule solution, $t = 1$: D coupe P au point $(3, 0, 3)$.

La droite passant par $(2, 1, 0)$, dirigée par $(1, -1, 0)$, donne $1 - 1 + 0 = 0$, mais $2 + 1 + 0 - 6 = -3 \neq 0$: elle est strictement parallèle à P.

Position relative de deux plans

Théorème : Plans parallèles en coordonnées

Dans un repère, soit P et P' les plans d'équations $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Les plans P et P' sont **parallèles** si et seulement si les triplets (a, b, c) et (a', b', c') sont **proportionnels** : il existe un réel λ tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$ et $c' = \lambda c$.

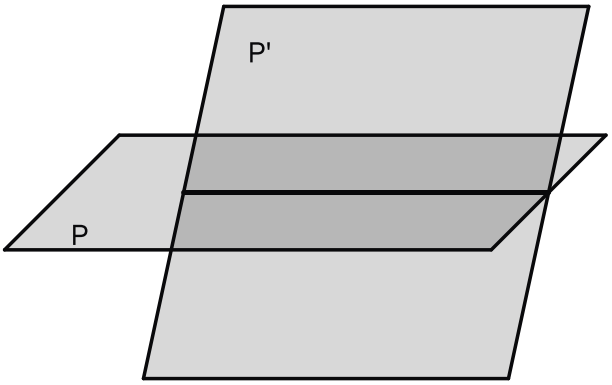
Propriété : Plans confondus, plans sécants

Dans un repère, soit P et P' les plans d'équations $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

- Si $(a', b', c', d') = \lambda(a, b, c, d)$ pour un réel λ, les plans sont **confondus**.
- Si $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$ et $d' \neq \lambda d$, les plans sont **strictement parallèles** : ils n'ont aucun point commun.
- Si (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels, les plans sont **sécants** : leur intersection est une droite.



Équations proportionnelles, constantes comprises : un seul et même plan.



Coefficients non proportionnels : les deux plans se coupent le long d'une droite.

Méthode : Étudier la position de deux plans

1. **Compare** les triplets (a, b, c) et (a', b', c') : proportionnels ou non.
2. **S'ils le sont**, avec $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$, compare d' et λd : plans confondus si $d' = \lambda d$, strictement parallèles sinon.
3. **Sinon**, les plans sont sécants : prends une inconnue comme paramètre et résous le système des deux équations.
4. **Conclus** par une représentation paramétrique de la droite d'intersection, puis vérifie un de ses points dans les deux équations.

Exemple : La droite commune à deux plans

Soit P : $x+y-z-1=0$ et P' : $2x-y+z-5=0$. Un déterminant extrait est non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Les triplets ne sont donc pas proportionnels : P et P' sont sécants. En ajoutant les deux équations, $3x-6=0$, donc $x=2$; puis $y=z-1$. Avec $z=t$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1+t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

Contrôle avec $(2,-1,0)$: $2-1-0-1=0$ et $4+1+0-5=0$.

Attention : Parallèles ne veut pas dire confondus

Des triplets proportionnels prouvent seulement que deux plans sont parallèles. Avec P : $x+y-z-1=0$, le plan $2x+2y-2z-2=0$ est confondu avec P ($\lambda=2$ et $-2=2\times(-1)$). Le plan $-x-y+z+4=0$ lui est strictement parallèle ($\lambda=-1$, mais $4\neq 1$).

L'essentiel

À retenir

Dans un repère, chaque question de géométrie devient un calcul que tu rédiges.

- **Alignement, parallélisme** : colinéarité, par un réel λ ou trois déterminants extraits.
- **Coplanarité, base** : un déterminant de trois vecteurs, nul ou non.
- **Droite** : un point, un vecteur directeur, un paramètre t.
- **Plan** : une équation $ax+by+cz+d=0$, ou deux paramètres s et t.
- **Intersections** : un système résolu par étapes, et une phrase sur le nombre de solutions.

Tu sais maintenant traduire l'espace en nombres, sans jamais rien lire sur un dessin. Le chapitre suivant ajoute un nouvel outil de calcul sur les vecteurs de l'espace. Ces acquis serviront encore en 2BAC SM.