BURHAN

Géométrie analytique de l'espace : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique de l'espace	Niveau examen	5

Exercice 1 — 9 pts

Problème : Un tétraèdre et la droite des milieux

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(2,1,0)$, $B(0,3,1)$, $C(1,0,2)$ et $D(3,2,4)$. On note I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[BC]$.

1. — 1 pts

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis montre que les points A, B, C ne sont pas alignés.

INDICE

Un déterminant extrait non nul de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ suffit.

2. — 1,5 pts

Montre que $ABCD$ est un tétraèdre, c'est-à-dire que les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AD}$, puis $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ en développant suivant la première colonne. Garde les parenthèses autour des nombres négatifs, et les signes $+$, $-$, $+$ du développement.

3. — 1,5 pts

Montre qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $5x + 3y + 4z - 13 = 0$.

INDICE

Pose $M(x,y,z)$ et écris $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. Termine par un contrôle avec B et C.

4. — 1 pts

Calcule les coordonnées de I et de J, puis donne une représentation paramétrique de la droite (IJ).

INDICE

Pour éviter les fractions dans le vecteur directeur, tu peux prendre un multiple non nul de $\overrightarrow{IJ}$.

5. — 1 pts

Montre que la droite (IJ) coupe le plan (ABC) en un seul point, et que ce point est J.

INDICE

Remplace la représentation de (IJ) dans l'équation de (ABC). Regroupe les termes constants avec soin : ce sont des fractions.

6. — 1 pts

Soit P le plan parallèle à (ABC) passant par D. Montre que P a pour équation $5x + 3y + 4z - 37 = 0$.

INDICE

Un plan parallèle à (ABC) a une équation de la forme $5x + 3y + 4z + d = 0$. Le point D fixe la valeur de d.

7. 1 pts

Détermine les coordonnées du point K d'intersection de la droite (IJ) et du plan P.

INDICE

Même démarche qu'à la question 5 ; seul le terme constant change.

8. 1 pts

En déduire que I est le milieu du segment $[JK]$.

INDICE

Utilise les coordonnées de J (question 5) et de K (question 7).

Exercice 2 8 pts

Problème : Deux droites et un paramètre

Dans un repère de l'espace, m désigne un réel. On considère la droite D passant par $A(1,0,2)$, de vecteur directeur $\vec{u}(1,-1,1)$, et la droite D_m passant par $B_m(2,-4,m)$, de vecteur directeur $\vec{v}(1,2,0)$.

1. 1 pts

Montre que, pour tout réel m, les droites D et D_m ne sont pas parallèles.

INDICE

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Le vecteur $\vec{v}$ ne dépend pas de m.

2. 1,5 pts

Montre que $\det(\overrightarrow{AB_m},\vec{u},\vec{v}) = 3m - 12$.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AB_m}$: sa troisième coordonnée contient m. Développe suivant la première colonne en gardant m comme une lettre.

3. 1 pts

En déduire, selon les valeurs de m, la position relative des droites D et D_m.

INDICE

Le théorème des droites coplanaires relie ce déterminant à la coplanarité. Combine-le avec la question 1.

4. 1,5 pts

On prend $m = 4$. Détermine le point d'intersection S des droites D et D_4.

INDICE

Écris les deux représentations avec deux paramètres distincts t et t'. L'équation des cotes ne contient qu'une inconnue.

5. 1,5 pts

Montre que le plan Π contenant les droites D et D_4 a pour équation $2x - y - 3z + 4 = 0$.

INDICE

Le plan qui contient D et D_4 passe par A et il est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Développe $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})$.

6. 1,5 pts

Montre que, pour tout réel m, la droite D_m est parallèle au plan Π. Précise pour quelles valeurs de m elle est contenue dans Π.

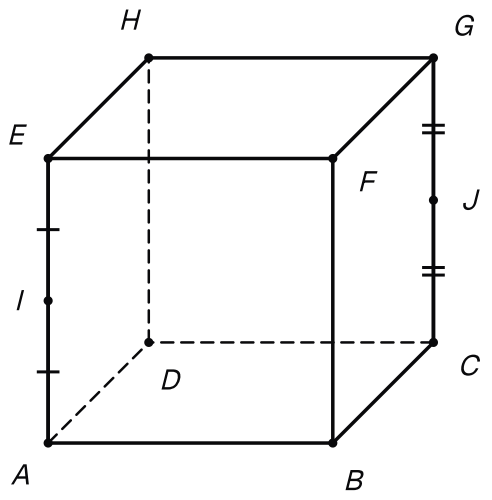
INDICE

Calcule la quantité δ de la position relative d'une droite et d'un plan pour le vecteur $\vec{v}$, puis teste le point B_m dans l'équation de Π.

Exercice 3 — 8 pts

Problème : Un plan qui coupe le cube

On considère un cube $ABCDEFGH$: faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$. On note I le milieu de $[AE]$ et J le milieu de $[CG]$. Trace la figure à main levée ; tous les résultats se démontrent dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Le cube, le point I au milieu de [AE] et le point J au milieu de [CG].

1. — 0,5 pts

Donne les coordonnées des points B, C, E, G, H, I et J.

INDICE

Décompose chaque vecteur $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AH}$ suivant les arêtes du cube, puis utilise la règle du milieu.

2. — 1 pts

Montre que $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{BJ}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $BJHI$?

INDICE

Compare les coordonnées des deux vecteurs. Un quadrilatère $BJHI$ est un parallélogramme lorsque $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IH}$.

3. — 1 pts

Retrouve la coplanarité des points B, I, J, H par un déterminant.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{BH}$, puis le déterminant de ces trois vecteurs. Les fractions $\frac{1}{2}$ restent dans le calcul jusqu'au bout.

4. 1,5 pts

Montre qu'une équation cartésienne du plan (BIJ) est $x - y + 2z - 1 = 0$.

INDICE

Vérifie d'abord que $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ ne sont pas colinéaires. Développe ensuite $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ})$, puis multiplie par -2.

5. 1,5 pts

Montre que la droite (AG) coupe le plan (BIJ) au milieu Ω du segment $[AG]$.

INDICE

Écris une représentation de (AG) avec A et $\overrightarrow{AG}$, remplace dans l'équation du plan, puis compare au milieu de $[AG]$.

6. 1 pts

Montre que la droite (EG) est strictement parallèle au plan (BIJ).

INDICE

Remplace une représentation de (EG) dans l'équation du plan et compte les solutions.

7. 1,5 pts

En déduire, à l'aide de la question 5, que les plans (BIJ) et (ABC) sont sécants. Montre ensuite qu'ils se coupent suivant la droite passant par B et parallèle à (AC).

INDICE

Le point A peut-il appartenir à (BIJ), d'après la question 5 ? Pour la droite commune, écris une équation de (ABC) : les points A, B, C ont une même cote. Prends ensuite y comme paramètre.

Exercice 4 — 8 pts

Problème : Un plan donné par paramètres et une droite donnée par deux équations

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le plan P de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = 2 + s - t \\ z = -1 + 2s + t \end{cases}$$

avec $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, et la droite Δ de système d'équations cartésiennes

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{1}.$$

Soit enfin $C(2, 1, 0)$, $\vec{w}'(1, 3, 3)$, et la droite $\Delta' = D(C, \vec{w}')$.

1. — 0,5 pts

Lis sur la représentation de P un point A de P et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $P = P(A, \vec{u}, \vec{v})$, et vérifie qu'ils ne sont pas colinéaires.

INDICE

Prends $s = t = 0$ pour le point ; les coefficients de s, puis ceux de t, donnent les deux vecteurs.

2. — 1,5 pts

Montre, sans calculer de déterminant, que P est le plan d'équation $3x + y - 2z - 7 = 0$.

INDICE

Remplace x, y, z par la représentation paramétrique de P dans le premier membre : que reste-t-il ? Conclus avec deux plans dont l'un contient l'autre.

3. — 0,5 pts

Donne un point B et un vecteur directeur $\vec{w}$ de la droite Δ, puis une représentation paramétrique de Δ.

INDICE

Écris chaque quotient sous la forme $\dfrac{x - x_B}{a}$: les numérateurs donnent le point, les dénominateurs le vecteur directeur.

4. — 1 pts

Montre que la droite Δ coupe le plan P en un seul point E, dont tu donneras les coordonnées.

INDICE

Remplace x, y, z par la représentation de Δ dans l'équation de P, puis compte les solutions de l'équation en t.

5. 0,5 pts

Montre que la droite Δ' est contenue dans le plan P.

INDICE

Calcule la quantité δ pour le vecteur $\vec{w}'$, puis teste le point C.

6. 1 pts

En déduire que les droites Δ et Δ' ne sont pas coplanaires.

INDICE

Montre qu'elles ne sont ni parallèles ni sécantes. Un point commun à Δ et Δ' serait un point commun à Δ et P : lequel ?

7. 1 pts

Retrouve le résultat de la question 6 par un déterminant.

INDICE

Utilise le théorème des droites coplanaires avec $B \in \Delta$ et $C \in \Delta'$: calcule $\overrightarrow{BC}$, puis $\det(\overrightarrow{BC}, \vec{w}, \vec{w}')$.

8. 1 pts

Soit L la droite passant par E, de vecteur directeur $\vec{w}'$. Écris un système d'équations cartésiennes de L.

INDICE

Les trois coordonnées de $\vec{w}'$ sont non nulles : écris l'égalité des trois quotients, puis sépare-la en deux égalités.

9. 1 pts

Montre que L est contenue dans P, puis que L est la seule droite contenue dans P, parallèle à Δ', qui rencontre Δ.

INDICE

Pour l'unicité, une telle droite rencontre Δ en un point de P : la question 4 dit lequel.

Exercice 5 — 8 pts

Problème : Une pyramide coupée parallèlement à sa base

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(2, -1, 1)$, $B(5, -1, -2)$, $C(8, 2, -2)$, $D(5, 2, 1)$ et $S(5, -1, 4)$. Trace une figure à main levée : on va montrer que $SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.

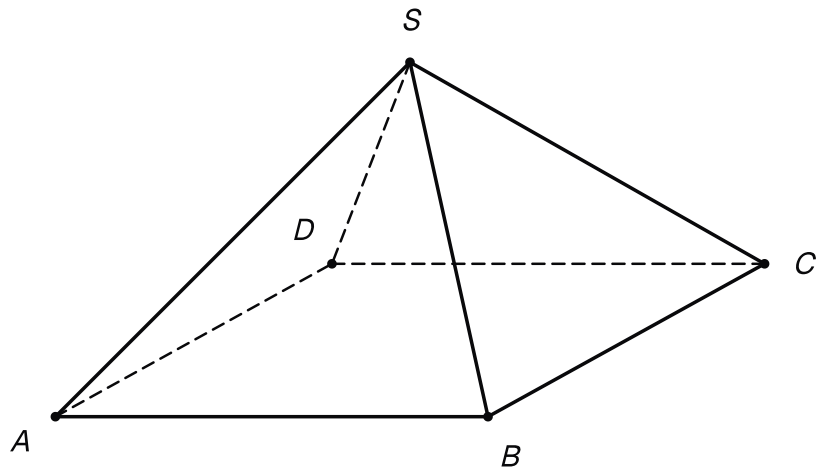


Schéma de la pyramide SABCD, de sommet S et de base ABCD, sans respecter les coordonnées de l'énoncé.

1. — 0,5 pts

Montre que $ABCD$ est un parallélogramme, et que les points A, B, D ne sont pas alignés.

INDICE

Compare $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$, puis calcule un déterminant extrait de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2. — 1,5 pts

Montre qu'une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - y + z - 4 = 0$. Vérifie que C appartient à ce plan et que S n'y appartient pas.

INDICE

Développe $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ suivant la première colonne : les trois petits déterminants ont la même valeur, ce qui permet de simplifier à la fin.

3. — 1 pts

Soit I le point tel que $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, et Q le plan parallèle à (ABD) passant par I. Calcule les coordonnées de I, puis montre que Q a pour équation $x - y + z - 8 = 0$.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{SA}$, puis $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$. Pour Q, garde les coefficients de x, y, z de l'équation de (ABD).

4. 1 pts

Montre que la droite (SB) coupe le plan Q en un seul point J, et que $\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

INDICE

Représente (SB) à l'aide du point S et du vecteur $\overrightarrow{SB}$: le point de paramètre t est alors le point M tel que $\overrightarrow{SM} = t\overrightarrow{SB}$.

5. 0,5 pts

Vérifie que les points $K(6,0,2)$ et $L(5,0,3)$ appartiennent à Q, que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$ et que $\overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.

INDICE

Deux vérifications dans l'équation de Q, puis deux comparaisons de coordonnées de vecteurs.

6. 1 pts

En déduire que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, puis que $IJKL$ est un parallélogramme.

INDICE

Écris $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{SJ}$ et utilise les questions 3 et 4 ; procède de même pour $\overrightarrow{LK}$ avec la question 5.

7. 1,5 pts

Soit Ω le centre du parallélogramme $ABCD$. Calcule ses coordonnées, puis $\det(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SB})$. Montre enfin que les plans (SAC) et (SBD) se coupent suivant la droite $(S\Omega)$.

INDICE

Le centre d'un parallélogramme est le milieu commun de ses diagonales. Le déterminant dit si B peut appartenir au plan (SAC) ; cherche ensuite deux points communs aux deux plans.

8. 1 pts

Montre que la droite $(S\Omega)$ coupe le plan Q en un seul point, et que ce point est le centre ω du parallélogramme $IJKL$.

INDICE

Un multiple non nul de $\overrightarrow{S\Omega}$ évite les fractions dans une représentation de $(S\Omega)$. Compare ensuite le point trouvé au milieu de $[IK]$.