BURHAN

Géométrie analytique de l'espace : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique de l'espace	Niveau examen	5

Exercice 1 — 9 pts

Problème : Un tétraèdre et la droite des milieux

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(2,1,0)$, $B(0,3,1)$, $C(1,0,2)$ et $D(3,2,4)$. On note I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[BC]$.

1. — 1 pts

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis montre que les points A, B, C ne sont pas alignés.

INDICE

Un déterminant extrait non nul de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ suffit.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{AB}(-2,2,1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,-1,2)$. Le premier déterminant extrait vaut :

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2)\times(-1) - (-1)\times 2 = 4.$$

Il n'est pas nul. D'après la colinéarité en coordonnées, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Les vecteurs sont $\overrightarrow{AB}(-2,2,1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,-1,2)$, et les points A, B, C ne sont pas alignés.

2. 1,5 pts

Montre que $ABCD$ est un tétraèdre, c'est-à-dire que les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AD}$, puis $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ en développant suivant la première colonne. Garde les parenthèses autour des nombres négatifs, et les signes $+$, $-$, $+$ du développement.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{AD}(1, 1, 4)$. On développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \\
&= \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= -2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&\quad - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&\quad + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -2 \times (-6) - 2 \times (-6) \\
&\quad + 1 \times 0 \\
&= 12 + 12 + 0 \\
&= 24.
\end{aligned}$$

Ce déterminant n'est pas nul. D'après la propriété « base, points coplanaires et déterminant », les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

Conclusion. Les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires : $ABCD$ est un tétraèdre.

3. 1,5 pts

Montre qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $5x + 3y + 4z - 13 = 0$.

INDICE

Pose $M(x, y, z)$ et écris $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. Termine par un contrôle avec B et C.

CORRIGÉ

Caractérisation. Soit $M(x, y, z)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (question 1). D'après la caractérisation vectorielle d'un plan et le critère de coplanarité (chapitre précédent), $M \in (ABC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. D'après le théorème « déterminant et coplanarité », c'est le cas si et seulement si :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0.$$

Développement. Suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\
&= \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad - (y-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad + z\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (x-2) \times 5 \\
&\quad - (y-1) \times (-3) \\
&\quad + z \times 4 \\
&= 5x + 3y + 4z - 13.
\end{aligned}$$

Contrôle. Pour A, B, C : $10 + 3 + 0 - 13 = 0$, $0 + 9 + 4 - 13 = 0$ et $5 + 0 + 8 - 13 = 0$.

Conclusion. Le plan (ABC) a pour équation cartésienne $5x + 3y + 4z - 13 = 0$.

4. 1 pts

Calcule les coordonnées de I et de J, puis donne une représentation paramétrique de la droite (IJ).

INDICE

Pour éviter les fractions dans le vecteur directeur, tu peux prendre un multiple non nul de $\overrightarrow{IJ}$.

CORRIGÉ

Milieux. D'après la règle des coordonnées du milieu, $I\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Vecteur directeur. On a $\overrightarrow{IJ}\left(-2, 0, -\frac{1}{2}\right)$. Le vecteur $\vec{d} = -2\overrightarrow{IJ}$, de coordonnées $(4, 0, 1)$, est non nul et colinéaire à $\overrightarrow{IJ}$: il dirige aussi (IJ).

Représentation. D'après la représentation paramétrique d'une droite, avec le point I et le vecteur $\vec{d}$:

$$(IJ) : \begin{cases} x = \frac{5}{2} + 4t \\ y = \frac{3}{2} \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusion. Les milieux sont $I\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, et le système ci-dessus est une représentation paramétrique de (IJ).

5. 1 pts

Montre que la droite (IJ) coupe le plan (ABC) en un seul point, et que ce point est J.

INDICE

Remplace la représentation de (IJ) dans l'équation de (ABC). Regroupe les termes constants avec soin : ce sont des fractions.

CORRIGÉ

On remplace la représentation de (IJ) dans le premier membre de l'équation de (ABC) :

$$\begin{aligned} &5\left(\frac{5}{2} + 4t\right) + 3 \times \frac{3}{2} \\ &\quad + 4(2 + t) - 13 \\ &= \frac{25}{2} + \frac{9}{2} + 8 - 13 + 24t \\ &= 12 + 24t. \end{aligned}$$

L'équation $12 + 24t = 0$ a une seule solution, $t = -\frac{1}{2}$. D'après la position relative d'une droite et d'un plan, (IJ) coupe (ABC) en un seul point, celui de paramètre $-\frac{1}{2}$, de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Ce sont les coordonnées de J, ce qui était attendu : J est sur $[BC]$, donc dans (ABC).

Conclusion. La droite (IJ) coupe le plan (ABC) en un seul point, le point J.

6. 1 pts

Soit P le plan parallèle à (ABC) passant par D. Montre que P a pour équation $5x + 3y + 4z - 37 = 0$.

INDICE

Un plan parallèle à (ABC) a une équation de la forme $5x + 3y + 4z + d = 0$. Le point D fixe la valeur de d.

CORRIGÉ

Équation. Soit d le réel tel que $5x_D + 3y_D + 4z_D + d = 0$, c'est-à-dire $15 + 6 + 16 + d = 0$, soit $d = -37$. L'équation $5x + 3y + 4z - 37 = 0$ définit un plan (plan défini par une équation cartésienne) qui contient D.

Parallélisme. Ses coefficients de x, y, z sont ceux de (ABC) : d'après les plans parallèles en coordonnées, ce plan est parallèle à (ABC).

Unicité. Par un point passe un seul plan parallèle à un plan donné (tronc commun) : ce plan est donc P.

Conclusion. Le plan P a pour équation $5x + 3y + 4z - 37 = 0$.

7. 1 pts

Détermine les coordonnées du point K d'intersection de la droite (IJ) et du plan P.

INDICE

Même démarche qu'à la question 5 ; seul le terme constant change.

CORRIGÉ

On remplace la représentation de (IJ) dans le premier membre de l'équation de P. Le calcul de la question 5 reste valable, seul le terme constant change :

$$\begin{aligned} &17 + 8 - 37 + 24t \\ &= 24t - 12. \end{aligned}$$

L'équation $24t - 12 = 0$ a une seule solution, $t = \dfrac{1}{2}$. D'après la position relative d'une droite et d'un plan, (IJ) coupe P en un seul point, celui de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Contrôle : $\dfrac{45}{2} + \dfrac{9}{2} + 10 - 37 = 0$.

Conclusion. Le point d'intersection de (IJ) et de P est $K\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

8. 1 pts

En déduire que I est le milieu du segment $[JK]$.

INDICE

Utilise les coordonnées de J (question 5) et de K (question 7).

CORRIGÉ

D'après les questions 5 et 7, $J\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et $K\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Les sommes des coordonnées correspondantes valent $\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=5$, $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$ et $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$.

D'après la règle des coordonnées du milieu, le milieu de $[JK]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2\right).$$

Ce sont les coordonnées de I.

Conclusion. Le point I est le milieu du segment $[JK]$.

Exercice 2 8 pts

Problème : Deux droites et un paramètre

Dans un repère de l'espace, m désigne un réel. On considère la droite D passant par $A(1,0,2)$, de vecteur directeur $\vec{u}(1,-1,1)$, et la droite D_m passant par $B_m(2,-4,m)$, de vecteur directeur $\vec{v}(1,2,0)$.

1. 1 pts

Montre que, pour tout réel m, les droites D et D_m ne sont pas parallèles.

INDICE

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Le vecteur $\vec{v}$ ne dépend pas de m.

CORRIGÉ

Le premier déterminant extrait de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times (-1) \\ = 3.$$

Il n'est pas nul, et il ne dépend pas de m. D'après la colinéarité en coordonnées, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Pour tout réel m, les droites D et D_m ne sont pas parallèles.

2. 1,5 pts

Montre que $\det(\overrightarrow{AB_m}, \vec{u}, \vec{v}) = 3m - 12$.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AB_m}$: sa troisième coordonnée contient m. Développe suivant la première colonne en gardant m comme une lettre.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{AB_m}(1,-4,m-2)$. On développe suivant la première colonne, en gardant m comme une lettre :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{AB_m}, \vec{u}, \vec{v}) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ m-2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad - (-4) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + (m-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-2) + 4 \times (-1) \\ &\quad + (m-2) \times 3 \\ &= 3m - 12. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel m, $\det(\overrightarrow{AB_m}, \vec{u}, \vec{v}) = 3m - 12$.

3. 1 pts

En déduire, selon les valeurs de m, la position relative des droites D et D_m.

INDICE

Le théorème des droites coplanaires relie ce déterminant à la coplanarité. Combine-le avec la question 1.

CORRIGÉ

On a $3m - 12 = 0$ si et seulement si $m = 4$. D'après le théorème des droites coplanaires :

- si $m = 4$, les droites D et D_4 sont coplanaires ; comme elles ne sont pas parallèles (question 1), elles sont sécantes (tronc commun : deux droites coplanaires et non parallèles sont sécantes) ;
- si $m \neq 4$, les droites D et D_m ne sont pas coplanaires.

Conclusion. Les droites D et D_m sont sécantes pour $m = 4$, et non coplanaires pour tout réel $m \neq 4$.

4. 1,5 pts

On prend $m = 4$. Détermine le point d'intersection S des droites D et D_4.

INDICE

Écris les deux représentations avec deux paramètres distincts t et t'. L'équation des cotes ne contient qu'une inconnue.

CORRIGÉ

On écrit D : $x = 1 + t, y = -t, z = 2 + t$ et D_4 : $x = 2 + t', y = -4 + 2t', z = 4$, avec deux paramètres distincts. Le point commun vérifie :

$$\begin{cases} 1 + t = 2 + t' \\ -t = -4 + 2t' \\ 2 + t = 4 \end{cases}$$

La troisième équation donne $t = 2$, puis la première $t' = 1$. La deuxième est vérifiée : $-2 = -4 + 2$.

Conclusion. Le point d'intersection des droites D et D_4 est $S(3, -2, 4)$.

5. 1,5 pts

Montre que le plan Π contenant les droites D et D_4 a pour équation $2x - y - 3z + 4 = 0$.

INDICE

Le plan qui contient D et D_4 passe par A et il est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Développe $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})$.

CORRIGÉ

Le plan Π. Les droites D et D_4 sont sécantes en S : le plan qui les contient est le plan $P(S, \vec{u}, \vec{v})$. Il contient A, donc c'est aussi $P(A, \vec{u}, \vec{v})$, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires (question 1).

Caractérisation. Soit $M(x, y, z)$. D'après la caractérisation vectorielle d'un plan et le critère de coplanarité (chapitre précédent), $M \in \Pi$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires. D'après le théorème « déterminant et coplanarité », c'est le cas si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Développement. Suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) \\
&= \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & -1 & 2 \\ z-2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\times(-2) \\
&\quad - y \times (-1) \\
&\quad + (z-2)\times 3 \\
&= -2x + y + 3z - 4.
\end{aligned}$$

Simplification. En multipliant par -1, on obtient l'équation $2x - y - 3z + 4 = 0$. Contrôle : $2 - 0 - 6 + 4 = 0$ pour A, et $6 + 2 - 12 + 4 = 0$ pour S.

Conclusion. Le plan Π a pour équation $2x - y - 3z + 4 = 0$.

6. 1,5 pts

Montre que, pour tout réel m, la droite D_m est parallèle au plan Π. Précise pour quelles valeurs de m elle est contenue dans Π.

INDICE

Calcule la quantité δ de la position relative d'une droite et d'un plan pour le vecteur $\vec{v}$, puis teste le point B_m dans l'équation de Π.

CORRIGÉ

Parallélisme. Pour $\vec{v}(1,2,0)$, on a $\delta = 2\times 1 - 2 - 3\times 0 = 0$. D'après la position relative d'une droite et d'un plan, D_m est parallèle à Π pour tout réel m.

Point B_m. On remplace ses coordonnées dans le premier membre de l'équation de Π :

$$\begin{aligned} &2\times 2 - (-4) - 3m + 4 \\ &= 12 - 3m. \end{aligned}$$

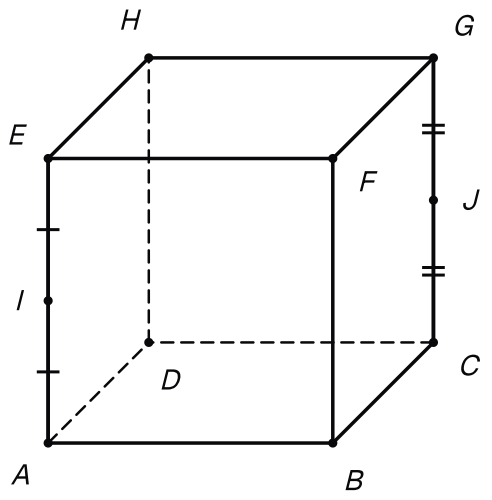
Cette quantité est nulle si et seulement si $m = 4$.

Conclusion. Pour tout réel m, D_m est parallèle à Π ; elle est contenue dans Π pour $m = 4$ seulement, et strictement parallèle à Π pour $m \neq 4$. On retrouve la question 3 : pour $m \neq 4$, D_m ne rencontre pas D.

Exercice 3 — 8 pts

Problème : Un plan qui coupe le cube

On considère un cube $ABCDEFGH$: faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$. On note I le milieu de $[AE]$ et J le milieu de $[CG]$. Trace la figure à main levée ; tous les résultats se démontrent dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Le cube, le point I au milieu de [AE] et le point J au milieu de [CG].

1. — 0,5 pts

Donne les coordonnées des points B, C, E, G, H, I et J.

INDICE

Décompose chaque vecteur $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AH}$ suivant les arêtes du cube, puis utilise la règle du milieu.

CORRIGÉ

Sommets. Par définition du repère, $B(1,0,0)$ et $E(0,0,1)$. Les faces étant des parallélogrammes, la relation de Chasles donne :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},\\ \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE},\\ \overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Donc $C(1,1,0)$, $G(1,1,1)$ et $H(0,1,1)$.

Milieux. D'après la règle des coordonnées du milieu, $I\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$.

Conclusion. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $E(0,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$, $I\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$.

2. 1 pts

Montre que $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{BJ}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $BJHI$?

INDICE

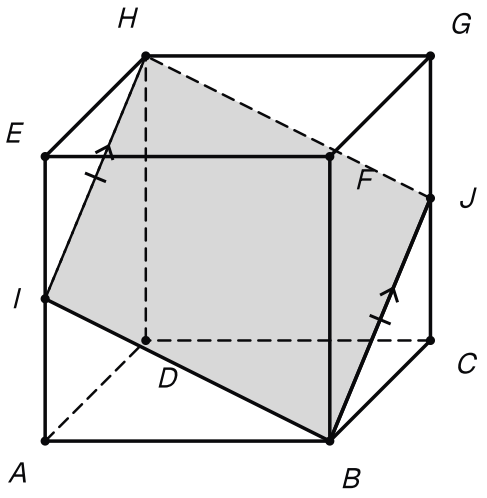
Compare les coordonnées des deux vecteurs. Un quadrilatère $BJHI$ est un parallélogramme lorsque $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IH}$.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{IH}\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BJ}\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$: ces vecteurs ont les mêmes coordonnées, donc $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{BJ}$.

Par la caractérisation vectorielle du parallélogramme (tronc commun), $BJHI$ est un parallélogramme.

Conclusion. $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{BJ}$, donc $BJHI$ est un parallélogramme ; en particulier, ses quatre sommets sont coplanaires.



Le parallélogramme BJHI : ses côtés opposés [IH] et [BJ] sont parallèles et de même longueur.

3. 1 pts

Retrouve la coplanarité des points B, I, J, H par un déterminant.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{BH}$, puis le déterminant de ces trois vecteurs. Les fractions $\frac{1}{2}$ restent dans le calcul jusqu'au bout.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{BI}\left(-1, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BJ}\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BH}(-1, 1, 1)$. On développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BH}) \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \\
&= -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad - 0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -1 \times \frac{1}{2} - 0 \times \frac{1}{2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \times 1 \\
&= -\frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'après la propriété « base, points coplanaires et déterminant », un déterminant nul signifie que les quatre points sont coplanaires.

Conclusion. Les points B, I, J, H sont coplanaires.

4. 1,5 pts

Montre qu'une équation cartésienne du plan (BIJ) est $x - y + 2z - 1 = 0$.

INDICE

Vérifie d'abord que $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ ne sont pas colinéaires. Développe ensuite $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ})$, puis multiplie par -2.

CORRIGÉ

Le plan (BIJ). Le premier déterminant extrait de $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ vaut :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Il n'est pas nul : $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ ne sont pas colinéaires, et (BIJ) est un plan.

Caractérisation. Soit $M(x, y, z)$. D'après la caractérisation vectorielle d'un plan et le critère de coplanarité (chapitre précédent), $M \in (BIJ)$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BJ}$ sont coplanaires. D'après le théorème « déterminant et coplanarité », c'est le cas si et seulement si $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}) = 0$.

Développement. Suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}) \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &\quad - y\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &\quad + z\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\quad - y \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\quad + z \times (-1) \\ &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Simplification. En multipliant par -2, on obtient l'équation $x - y + 2z - 1 = 0$. Contrôle avec H, qui est dans ce plan d'après la question 3 : $0 - 1 + 2 - 1 = 0$.

Conclusion. Une équation cartésienne du plan (BIJ) est $x - y + 2z - 1 = 0$.

5. 1,5 pts

Montre que la droite (AG) coupe le plan (BIJ) au milieu Ω du segment $[AG]$.

INDICE

Écris une représentation de (AG) avec A et $\overrightarrow{AG}$, remplace dans l'équation du plan, puis compare au milieu de $[AG]$.

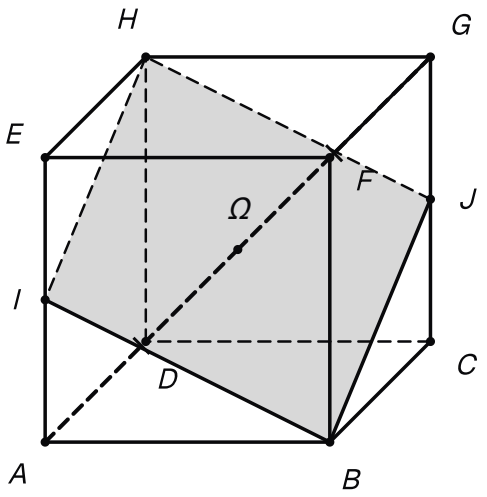
CORRIGÉ

Intersection. On a $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$, donc (AG) : $x=t$, $y=t$, $z=t$, avec $t\in\mathbb{R}$. En remplaçant dans le premier membre de l'équation du plan : $t-t+2t-1=2t-1$.

L'équation $2t-1=0$ a une seule solution, $t=\dfrac{1}{2}$. D'après la position relative d'une droite et d'un plan, (AG) coupe (BIJ) au seul point $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Milieu. Par la règle des coordonnées du milieu, avec $A(0,0,0)$ et $G(1,1,1)$, ce point est le milieu Ω de $[AG]$.

Conclusion. La droite (AG) coupe le plan (BIJ) au milieu Ω du segment $[AG]$.



La diagonale [AG] traverse le parallélogramme BJHI en son milieu Ω.

6. 1 pts

Montre que la droite (EG) est strictement parallèle au plan (BIJ).

INDICE

Remplace une représentation de (EG) dans l'équation du plan et compte les solutions.

CORRIGÉ

Substitution. On a $\overrightarrow{EG}(1,1,0)$, donc (EG) : $x=t$, $y=t$, $z=1$, avec $t\in\mathbb{R}$. En remplaçant dans le premier membre de l'équation du plan : $t-t+2-1=1$.

L'équation devient $1=0$: aucun réel ne convient.

Interprétation. Le coefficient de t est nul, $\delta=1-1+2\times 0=0$, et $E\notin(BIJ)$: d'après la position relative d'une droite et d'un plan, la droite est parallèle au plan sans y être contenue.

Conclusion. La droite (EG) est strictement parallèle au plan (BIJ).

7. 1,5 pts

En déduire, à l'aide de la question 5, que les plans (BIJ) et (ABC) sont sécants. Montre ensuite qu'ils se coupent suivant la droite passant par B et parallèle à (AC).

INDICE

Le point A peut-il appartenir à (BIJ), d'après la question 5 ? Pour la droite commune, écris une équation de (ABC) : les points A, B, C ont une même cote. Prends ensuite y comme paramètre.

CORRIGÉ

Plans sécants. Si A appartenait à (BIJ), ce serait un point commun à (AG) et (BIJ) : d'après la question 5, on aurait $A=\Omega$, ce qui est faux. Donc $A\notin(BIJ)$, et les plans (BIJ) et (ABC) ne sont pas confondus. Ils ont le point commun B : ils ne sont pas strictement parallèles. Deux plans ni confondus ni strictement parallèles sont sécants (tronc commun).

Équation de (ABC). Les points A, B, C ont une cote nulle. Ils ne sont pas alignés : $\overrightarrow{AB}(1,0,0)$ et $\overrightarrow{AC}(1,1,0)$ ont le déterminant extrait $1\times 1-1\times 0=1$. L'équation $z=0$ définit un plan (plan défini par une équation cartésienne) qui contient A, B, C : c'est le plan (ABC).

Droite commune. Un point commun vérifie $z=0$ et $x-y+2z-1=0$, c'est-à-dire $z=0$ et $x-y-1=0$. Avec $y=t$:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

C'est la droite passant par $B(1,0,0)$, de vecteur directeur $(1,1,0)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AC}$.

Conclusion. Les plans (BIJ) et (ABC) sont sécants, et ils se coupent suivant la droite passant par B et parallèle à (AC).

Exercice 4 — 8 pts

Problème : Un plan donné par paramètres et une droite donnée par deux équations

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le plan P de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = 2 + s - t \\ z = -1 + 2s + t \end{cases}$$

avec $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, et la droite Δ de système d'équations cartésiennes

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{1}.$$

Soit enfin $C(2, 1, 0)$, $\vec{w}'(1, 3, 3)$, et la droite $\Delta' = D(C, \vec{w}')$.

1. — 0,5 pts

Lis sur la représentation de P un point A de P et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $P = P(A, \vec{u}, \vec{v})$, et vérifie qu'ils ne sont pas colinéaires.

INDICE

Prends $s = t = 0$ pour le point ; les coefficients de s, puis ceux de t, donnent les deux vecteurs.

CORRIGÉ

Point et vecteurs. Pour $s = t = 0$, on obtient le point $A(1, 2, -1)$. D'après la représentation paramétrique d'un plan, $P = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u}(1, 1, 2)$ (coefficients de s) et $\vec{v}(1, -1, 1)$ (coefficients de t).

Non-colinéarité. Le premier déterminant extrait vaut :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} &= 1 \times (-1) - 1 \times 1 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Il n'est pas nul : d'après la colinéarité en coordonnées, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. $P = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(1, 2, -1)$, $\vec{u}(1, 1, 2)$ et $\vec{v}(1, -1, 1)$ non colinéaires.

2. 1,5 pts

Montre, sans calculer de déterminant, que P est le plan d'équation $3x + y - 2z - 7 = 0$.

INDICE

Remplace x, y, z par la représentation paramétrique de P dans le premier membre : que reste-t-il ? Conclus avec deux plans dont l'un contient l'autre.

CORRIGÉ

Le plan P'. L'équation $3x + y - 2z - 7 = 0$ définit un plan P' (plan défini par une équation cartésienne), ses coefficients $3, 1, -2$ n'étant pas tous nuls.

Inclusion. Pour tous réels s et t, on remplace par le point de P de paramètres s et t dans le premier membre :

$$\begin{aligned} &3(1+s+t) + (2+s-t) \\ &\quad - 2(-1+2s+t) - 7 \\ &= (3+2+2-7) \\ &\quad + (3+1-4)s \\ &\quad + (3-1-2)t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tout point de P appartient donc à P' : le plan P est contenu dans le plan P'. Deux plans dont l'un contient l'autre sont égaux (tronc commun) : $P = P'$.

Conclusion. Le plan P a pour équation $3x + y - 2z - 7 = 0$.

3. 0,5 pts

Donne un point B et un vecteur directeur $\vec{w}$ de la droite Δ, puis une représentation paramétrique de Δ.

INDICE

Écris chaque quotient sous la forme $\dfrac{x - x_B}{a}$: les numérateurs donnent le point, les dénominateurs le vecteur directeur.

CORRIGÉ

Les dénominateurs $2, -1, 1$ sont non nuls, et le système s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{x-(-1)}{2} &= \frac{y-1}{-1} \\ &= \frac{z-(-3)}{1}.\end{aligned}$$

D'après le système d'équations cartésiennes d'une droite, $\Delta = D(B, \vec{w})$ avec $B(-1, 1, -3)$ et $\vec{w}(2, -1, 1)$. D'après la représentation paramétrique d'une droite :

$$\Delta : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -3 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusion. La droite Δ passe par $B(-1, 1, -3)$, elle est dirigée par $\vec{w}(2, -1, 1)$, et le système ci-dessus en est une représentation paramétrique.

4. 1 pts

Montre que la droite Δ coupe le plan P en un seul point E, dont tu donneras les coordonnées.

INDICE

Remplace x, y, z par la représentation de Δ dans l'équation de P, puis compte les solutions de l'équation en t.

CORRIGÉ

On remplace la représentation de Δ dans le premier membre de l'équation de P :

$$\begin{aligned}&3(-1+2t) + (1-t) \\ &\quad - 2(-3+t) - 7 \\ &= -3 + 1 + 6 - 7 \\ &\quad + 6t - t - 2t \\ &= 3t - 3.\end{aligned}$$

L'équation $3t - 3 = 0$ a une seule solution, $t = 1$. Le coefficient de t est $\delta = 3 \times 2 + 1 \times (-1) - 2 \times 1 = 3 \neq 0$: d'après la position relative d'une droite et d'un plan, Δ coupe P en un seul point, celui de paramètre 1. Contrôle : $3 + 0 + 4 - 7 = 0$.

Conclusion. La droite Δ coupe le plan P en un seul point, $E(1, 0, -2)$.

5. 0,5 pts

Montre que la droite Δ' est contenue dans le plan P.

INDICE

Calcule la quantité δ pour le vecteur $\vec{w}'$, puis teste le point C.

CORRIGÉ

Direction. Pour $\vec{w}'(1,3,3)$, on a $\delta = 3\times 1 + 1\times 3 - 2\times 3 = 0$.

Un point. Le point C vérifie l'équation de P : $6 + 1 - 0 - 7 = 0$.

Conclusion. D'après la position relative d'une droite et d'un plan, la droite Δ' est contenue dans le plan P.

6. 1 pts

En déduire que les droites Δ et Δ' ne sont pas coplanaires.

INDICE

Montre qu'elles ne sont ni parallèles ni sécantes. Un point commun à Δ et Δ' serait un point commun à Δ et P : lequel ?

CORRIGÉ

- Les droites ne sont pas parallèles. Le déterminant extrait de $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ vaut $2\times 3 - 1\times(-1) = 7$. Il n'est pas nul, donc $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ ne sont pas colinéaires (colinéarité en coordonnées).
- Les droites ne sont pas sécantes. Un point commun à Δ et Δ' appartiendrait à Δ et à P (question 5), donc ce serait E (question 4). Or $\overrightarrow{CE}(-1,-1,-2)$ et $\vec{w}'(1,3,3)$ ont pour premier déterminant extrait $(-1)\times 3 - 1\times(-1) = -2$. Il n'est pas nul : ces vecteurs ne sont pas colinéaires, et $E \notin \Delta'$.

Deux droites coplanaires et non parallèles sont sécantes (tronc commun). Par contraposée, comme Δ et Δ' ne sont ni parallèles ni sécantes, elles ne sont pas coplanaires.

Conclusion. Les droites Δ et Δ' ne sont pas coplanaires.

7. 1 pts

Retrouve le résultat de la question 6 par un déterminant.

INDICE

Utilise le théorème des droites coplanaires avec $B \in \Delta$ et $C \in \Delta'$: calcule $\overrightarrow{BC}$, puis $\det(\overrightarrow{BC}, \vec{w}, \vec{w}')$.

CORRIGÉ

On a $B \in \Delta$, $C \in \Delta'$ et $\overrightarrow{BC}(3, 0, 3)$. On développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{BC}, \vec{w}, \vec{w}') \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&\quad - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&\quad + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 3 \times (-6) - 0 \times 5 \\
&\quad + 3 \times 7 \\
&= -18 - 0 + 21 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Ce déterminant n'est pas nul.

Conclusion. D'après le théorème des droites coplanaires, Δ et Δ' ne sont pas coplanaires, ce qui confirme la question 6.

8. 1 pts

Soit L la droite passant par E, de vecteur directeur $\vec{w}'$. Écris un système d'équations cartésiennes de L.

INDICE

Les trois coordonnées de $\vec{w}'$ sont non nulles : écris l'égalité des trois quotients, puis sépare-la en deux égalités.

CORRIGÉ

Égalité des quotients. Les coordonnées $1, 3$ et 3 de $\vec{w}'$ sont non nulles, et $E(1, 0, -2)$. D'après le système d'équations cartésiennes d'une droite, $M(x, y, z) \in L$ si et seulement si :

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z + 2}{3}.$$

Deux équations. La première égalité donne $3(x - 1) = y$, soit $3x - y - 3 = 0$. La seconde donne $3y = 3(z + 2)$, soit $y - z - 2 = 0$. Contrôle avec E : $3 - 0 - 3 = 0$ et $0 + 2 - 2 = 0$.

Conclusion. Un système d'équations cartésiennes de L est formé de $3x - y - 3 = 0$ et de $y - z - 2 = 0$.

9. 1 pts

Montre que L est contenue dans P, puis que L est la seule droite contenue dans P, parallèle à Δ', qui rencontre Δ.

INDICE

Pour l'unicité, une telle droite rencontre Δ en un point de P : la question 4 dit lequel.

CORRIGÉ

L **convient.** Le vecteur $\vec{w}'$ donne $\delta = 0$ (question 5) et $E \in P$ (question 4) : d'après la position relative d'une droite et d'un plan, L est contenue dans P. Elle est parallèle à Δ', de même vecteur directeur, et elle rencontre Δ en E.

Unicité. Soit L_1 une droite contenue dans P, parallèle à Δ', qui rencontre Δ en un point F. Le point F appartient à Δ et à P : d'après la question 4, $F = E$. La droite L_1, parallèle à Δ', admet $\vec{w}'$ pour vecteur directeur, et elle passe par E : c'est la droite $D(E, \vec{w}')$, c'est-à-dire L.

Conclusion. La droite L est contenue dans P, et c'est la seule droite contenue dans P, parallèle à Δ', qui rencontre Δ.

Exercice 5 — 8 pts

Problème : Une pyramide coupée parallèlement à sa base

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(2, -1, 1)$, $B(5, -1, -2)$, $C(8, 2, -2)$, $D(5, 2, 1)$ et $S(5, -1, 4)$. Trace une figure à main levée : on va montrer que $SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.

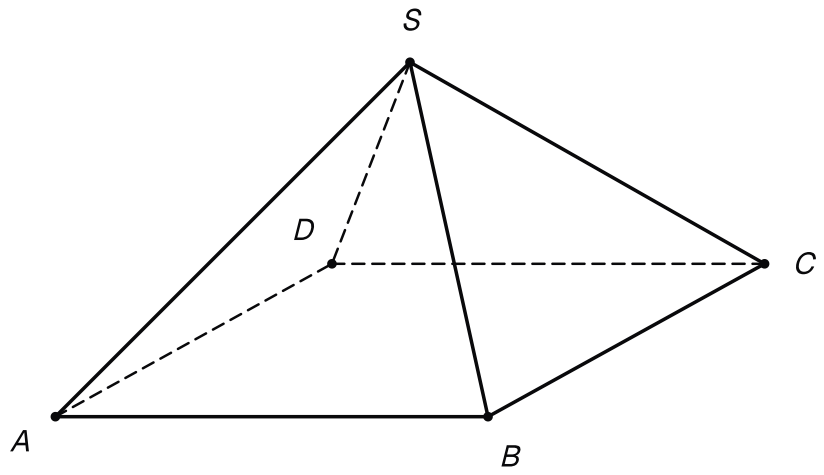


Schéma de la pyramide SABCD, de sommet S et de base ABCD, sans respecter les coordonnées de l'énoncé.

1. — 0,5 pts

Montre que $ABCD$ est un parallélogramme, et que les points A, B, D ne sont pas alignés.

INDICE

Compare $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$, puis calcule un déterminant extrait de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

CORRIGÉ

Parallélogramme. On a $\overrightarrow{AB}(3, 0, -3)$ et $\overrightarrow{DC}(3, 0, -3)$: ces vecteurs sont égaux. Par la caractérisation vectorielle du parallélogramme (tronc commun), $ABCD$ est un parallélogramme.

Non-alignement. On a $\overrightarrow{AD}(3, 3, 0)$. Le premier déterminant extrait de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ vaut :

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 3 \times 0 = 9.$$

Il n'est pas nul : d'après la colinéarité en coordonnées, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. $ABCD$ est un parallélogramme, et les points A, B, D ne sont pas alignés.

2. 1,5 pts

Montre qu'une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - y + z - 4 = 0$. Vérifie que C appartient à ce plan et que S n'y appartient pas.

INDICE

Développe $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ suivant la première colonne : les trois petits déterminants ont la même valeur, ce qui permet de simplifier à la fin.

CORRIGÉ

Caractérisation. Soit $M(x, y, z)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires (question 1). D'après la caractérisation vectorielle d'un plan et le critère de coplanarité (chapitre précédent), $M \in (ABD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. D'après le théorème « déterminant et coplanarité », c'est le cas si et seulement si :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0.$$

Développement. Suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \\
&= \begin{vmatrix} x-2 & 3 & 3 \\ y+1 & 0 & 3 \\ z-1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad - (y+1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + (z-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (x-2) \times 9 \\
&\quad - (y+1) \times 9 \\
&\quad + (z-1) \times 9 \\
&= 9x - 9y + 9z - 36.
\end{aligned}$$

Simplification. En divisant par 9, on obtient l'équation $x - y + z - 4 = 0$. Contrôle : $5 + 1 - 2 - 4 = 0$ pour B et $5 - 2 + 1 - 4 = 0$ pour D.

Les points C et S. Le point C donne $8 - 2 - 2 - 4 = 0$: il appartient à (ABD), ce qui était attendu pour le quatrième sommet du parallélogramme. Le point S donne $5 + 1 + 4 - 4 = 6 \neq 0$: $S \notin (ABD)$.

Conclusion. Le plan (ABD) a pour équation $x - y + z - 4 = 0$; C appartient à ce plan et S n'y appartient pas. Ainsi $SABCD$ est bien une pyramide de sommet S et de base $ABCD$.

3. 1 pts

Soit I le point tel que $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, et Q le plan parallèle à (ABD) passant par I. Calcule les coordonnées de I, puis montre que Q a pour équation $x - y + z - 8 = 0$.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{SA}$, puis $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$. Pour Q, garde les coefficients de x, y, z de l'équation de (ABD).

CORRIGÉ

Le point I. On a $\overrightarrow{SA}(-3, 0, -3)$, donc $\overrightarrow{SI}(-1, 0, -1)$. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SI}$, d'où $I(4, -1, 3)$.

Équation. Soit d le réel tel que $4 - (-1) + 3 + d = 0$, soit $d = -8$. L'équation $x - y + z - 8 = 0$ définit un plan (plan défini par une équation cartésienne) qui contient I. Ses coefficients de x, y, z sont ceux de (ABD) : d'après les plans parallèles en coordonnées, il est parallèle à (ABD).

Unicité. Par un point passe un seul plan parallèle à un plan donné (tronc commun) : c'est le plan Q.

Conclusion. On a $I(4, -1, 3)$, et le plan Q a pour équation $x - y + z - 8 = 0$.

4. 1 pts

Montre que la droite (SB) coupe le plan Q en un seul point J, et que $\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

INDICE

Représente (SB) à l'aide du point S et du vecteur $\overrightarrow{SB}$: le point de paramètre t est alors le point M tel que $\overrightarrow{SM} = t\overrightarrow{SB}$.

CORRIGÉ

Représentation de (SB). On a $\overrightarrow{SB}(0, 0, -6)$, donc (SB) : $x = 5$, $y = -1$, $z = 4 - 6t$, avec $t \in \mathbb{R}$. Le point de paramètre t est le point M tel que $\overrightarrow{SM} = t\overrightarrow{SB}$.

Substitution. On remplace dans le premier membre de l'équation de Q :

$$\begin{aligned} &5 - (-1) + (4 - 6t) - 8 \\ &= 2 - 6t. \end{aligned}$$

L'équation $2 - 6t = 0$ a une seule solution, $t = \frac{1}{3}$. D'après la position relative d'une droite et d'un plan, (SB) coupe Q en un seul point $J(5, -1, 2)$, celui de paramètre $\frac{1}{3}$.

Conclusion. La droite (SB) coupe Q en un seul point J, et $\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

5. 0,5 pts

Vérifie que les points $K(6,0,2)$ et $L(5,0,3)$ appartiennent à Q, que $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$ et que $\overrightarrow{SL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.

INDICE

Deux vérifications dans l'équation de Q, puis deux comparaisons de coordonnées de vecteurs.

CORRIGÉ

Appartenance à Q. Le point K donne $6-0+2-8=0$ et le point L donne $5-0+3-8=0$: ils appartiennent à Q.

Vecteurs. On a $\overrightarrow{SC}(3,3,-6)$ et $\overrightarrow{SK}(1,1,-2)$, puis $\overrightarrow{SD}(0,3,-3)$ et $\overrightarrow{SL}(0,1,-1)$. D'après les coordonnées d'un produit par un réel, $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$ et $\overrightarrow{SL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.

Conclusion. Les points K et L appartiennent à Q, avec $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$ et $\overrightarrow{SL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$. Ainsi K est un point commun à (SC) et Q, et L un point commun à (SD) et Q.

6. 1 pts

En déduire que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{LK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, puis que $IJKL$ est un parallélogramme.

INDICE

Écris $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IS}+\overrightarrow{SJ}$ et utilise les questions 3 et 4 ; procède de même pour $\overrightarrow{LK}$ avec la question 5.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Par la relation de Chasles et les questions 3 et 4 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ}&=\overrightarrow{IS}+\overrightarrow{SJ}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AS}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}\\&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}\right)\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Vecteur $\overrightarrow{LK}$. De même, avec la question 5 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LK}&=\overrightarrow{LS}+\overrightarrow{SK}\\&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SC}\right)\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}.\end{aligned}$$

Parallélogramme. Comme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (question 1), on obtient $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$: par la caractérisation vectorielle du parallélogramme (tronc commun), $IJKL$ est un parallélogramme. Il n'est pas aplati : de même $\overrightarrow{IL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires (question 1), donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ non plus. Contrôle en coordonnées : $\overrightarrow{IJ}(1,0,-1)$ et $\overrightarrow{LK}(1,0,-1)$.

Conclusion. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{LK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, donc $IJKL$ est un parallélogramme.

7. 1,5 pts

Soit Ω le centre du parallélogramme $ABCD$. Calcule ses coordonnées, puis $\det(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SB})$. Montre enfin que les plans (SAC) et (SBD) se coupent suivant la droite $(S\Omega)$.

INDICE

Le centre d'un parallélogramme est le milieu commun de ses diagonales. Le déterminant dit si B peut appartenir au plan (SAC) ; cherche ensuite deux points communs aux deux plans.

CORRIGÉ

Centre Ω. Le centre Ω est le milieu commun des diagonales $[AC]$ et $[BD]$: d'après la règle des coordonnées du milieu, $\Omega\left(5, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (même résultat avec B et D).

Déterminant. On a $\overrightarrow{SA}(-3, 0, -3)$, $\overrightarrow{SC}(3, 3, -6)$ et $\overrightarrow{SB}(0, 0, -6)$. On développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SB}) \\
&= \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & -6 & -6 \end{vmatrix} \\
&= -3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} \\
&\quad - 0 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} \\
&\quad + (-3) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -3 \times (-18) - 0 \times (-18) \\
&\quad + (-3) \times 0 \\
&= 54 - 0 + 0 \\
&= 54.
\end{aligned}$$

Deux plans. Ce déterminant n'est pas nul : d'après la propriété « base, points coplanaires et déterminant », les points S, A, C, B ne sont pas coplanaires. En particulier, S, A, C ne sont pas alignés, donc (SAC) est un plan, et $B \notin (SAC)$. De même, S, B, D ne sont pas alignés : par l'absurde, s'ils l'étaient, S serait sur la droite (BD), contenue dans (ABD), contrairement à la question 2. Donc (SBD) est un plan.

Intersection. Les deux plans contiennent S. Le point Ω, milieu de $[AC]$ et de $[BD]$, appartient à la droite (AC), donc à (SAC), et à la droite (BD), donc à (SBD). Les plans ne sont pas confondus, car $B \in (SBD)$ et $B \notin (SAC)$; ayant le point commun S, ils ne sont pas strictement parallèles. Deux plans ni confondus ni strictement parallèles sont sécants (tronc commun) : ils se coupent suivant une droite, qui contient S et Ω. Enfin $S \neq \Omega$, car Ω est dans (ABD) et S n'y est pas.

Conclusion. On a $\Omega\left(5, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\det(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SB}) = 54$; les plans (SAC) et (SBD) se coupent suivant la droite $(S\Omega)$.

8. 1 pts

Montre que la droite $(S\Omega)$ coupe le plan Q en un seul point, et que ce point est le centre ω du parallélogramme $IJKL$.

INDICE

Un multiple non nul de $\overrightarrow{S\Omega}$ évite les fractions dans une représentation de $(S\Omega)$. Compare ensuite le point trouvé au milieu de $[IK]$.

CORRIGÉ

Représentation de $(S\Omega)$. On a $\overrightarrow{S\Omega}\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$. Le vecteur $\vec{d} = \frac{2}{3}\overrightarrow{S\Omega}$, de coordonnées $(0, 1, -3)$, dirige aussi $(S\Omega)$: $x = 5$, $y = -1 + t$, $z = 4 - 3t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

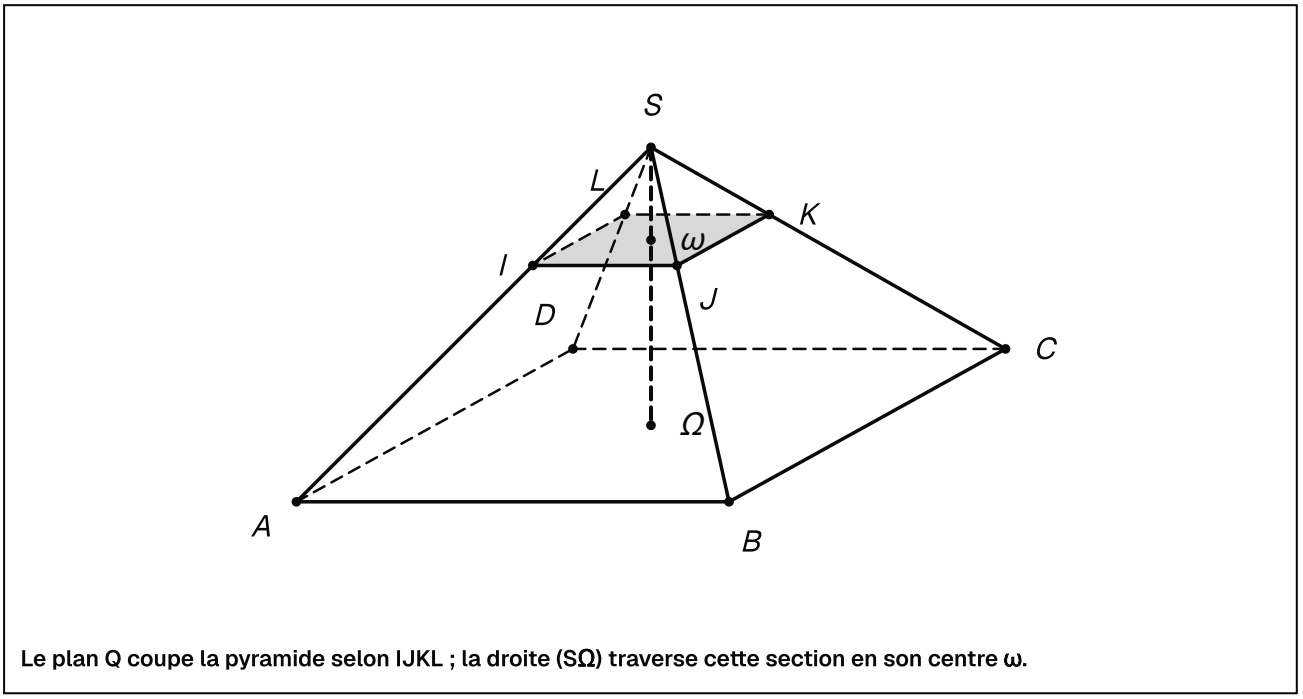
Intersection avec Q. On remplace dans le premier membre de l'équation de Q :

$$\begin{aligned} &5 - (-1 + t) + (4 - 3t) - 8 \\ &= 2 - 4t. \end{aligned}$$

L'équation $2 - 4t = 0$ a une seule solution, $t = \frac{1}{2}$: d'après la position relative d'une droite et d'un plan, $(S\Omega)$ coupe Q au seul point $\left(5, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Centre ω. Le centre ω de $IJKL$ est le milieu de $[IK]$: d'après la règle des coordonnées du milieu, $\omega\left(5, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (même résultat avec J et L).

Conclusion. La droite $(S\Omega)$ coupe le plan Q en un seul point, qui est le centre ω du parallélogramme $IJKL$.



Le plan Q coupe la pyramide selon IJKL ; la droite (SΩ) traverse cette section en son centre ω.