BURHAN

Géométrie analytique de l'espace : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique de l'espace	Entraînement	8

Exercice 1

Du non-alignement à la coplanarité

Dans un repère de l'espace, on donne $A(1,2,0)$, $B(3,1,1)$, $C(2,4,-1)$, $D(5,5,-1)$ et $E(1,2,1)$.

1.

Montre que les points A, B, C définissent un plan.

INDICE

Trois points définissent un plan lorsqu'ils ne sont pas alignés. Calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis cherche un déterminant extrait non nul.

2.

Montre que le point D appartient au plan (ABC).

INDICE

Quatre points sont coplanaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=0$. Calcule d'abord $\overrightarrow{AD}$. Pour conclure, souviens-toi que A, B, C ne sont pas alignés.

3.

Détermine les réels x et y tels que $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

INDICE

L'égalité des coordonnées donne trois équations à deux inconnues. Tire x de la plus simple, substitue dans une autre, puis vérifie la dernière.

4.

Le point E appartient-il au plan (ABC) ?

INDICE

Même outil qu'à la question 2, avec $\overrightarrow{AE}$. Deux coordonnées de $\overrightarrow{AE}$ sont nulles : le calcul est court.

Exercice 2

Les coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère $\vec{u}(1, 1, 0)$, $\vec{v}(0, 1, 1)$, $\vec{w}(1, 0, 1)$ et $\vec{a}(3, 1, 4)$.

1.

Montre que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

INDICE

Un déterminant non nul suffit. Range les trois vecteurs en colonnes et développe suivant la première colonne.

2.

Détermine les réels x, y, z tels que $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

INDICE

Écris l'égalité coordonnée par coordonnée : trois équations. Exprime y et z en fonction de x, puis remplace dans l'équation restante.

3.

Quelles sont les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$? Compare-les à ses coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

INDICE

Reviens à la définition des coordonnées d'un vecteur dans une base.

Exercice 3

D'une représentation paramétrique à une équation de plan

Dans un repère, le plan P admet la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + s - t \\ y = -1 + 2s + t \\ z = 3 + s \end{cases}$$

avec $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.

1.

Donne un point A de P et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires qui dirigent P.

INDICE

Le point s'obtient pour $s = t = 0$. Les coefficients de s forment le premier vecteur, ceux de t le second.

2.

Déduis-en une équation cartésienne de P.

INDICE

Pose $M(x, y, z)$ et écris $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$. Développe suivant la première colonne, puis multiplie par -1 pour un premier coefficient positif.

3.

Les points $B(1, 2, 4)$ et $C(-3, 1, 2)$ appartiennent-ils à P ? Pour celui qui appartient à P, donne les valeurs de s et t correspondantes.

INDICE

Teste chaque point dans l'équation cartésienne : c'est plus court qu'avec la représentation. Pour retrouver s et t, commence par l'équation qui ne contient que s.

Exercice 4

Où la droite (AB) traverse-t-elle le plan ?

Dans un repère, on donne $A(1,0,2)$, $B(3,1,0)$, $C(0,1,1)$, $D(1,2,2)$, et le plan P d'équation $x-2y+z+3=0$.

1.

Donne une représentation paramétrique de la droite (AB).

INDICE

Prends le point A et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

2.

Montre que la droite (AB) coupe le plan P en un seul point K, dont tu donneras les coordonnées.

INDICE

Remplace x, y, z dans l'équation de P. Développe soigneusement : les termes en t ne s'éliminent pas tous.

3.

Montre que la droite (CD) est strictement parallèle au plan P.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{CD}$, écris une représentation paramétrique de (CD), puis remplace dans l'équation de P. Regarde le nombre de solutions de l'équation obtenue.

Exercice 5

Trois droites prises deux à deux

Dans un repère, on considère trois droites :

- D, passant par $A(1, 2, 0)$, de vecteur directeur $\vec{u}(1, -1, 3)$;
- D', passant par $B(2, -1, 1)$, de vecteur directeur $\vec{v}(2, 1, -1)$;
- D'', passant par $C(0, -1, 1)$, de vecteur directeur $\vec{w}(1, 1, 1)$.

1.

Montre que les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

INDICE

Vérifie d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Calcule ensuite $\overrightarrow{AB}$ et le déterminant de $\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$.

2.

Montre que les droites D et D'' sont sécantes, et détermine leur point d'intersection.

INDICE

Même démarche avec $\overrightarrow{AC}, \vec{u}, \vec{w}$. Pour le point commun, écris les deux représentations avec deux paramètres distincts t et t'.

3.

Les droites D' et D'' sont-elles coplanaires ?

INDICE

Calcule $\overrightarrow{BC}$: deux de ses coordonnées sont nulles, ce qui simplifie le développement suivant la première colonne.

Exercice 6

La droite commune à deux plans, puis un troisième plan

Dans un repère, on considère les plans $P : x + 2y - z + 1 = 0$, $P' : 2x - y + z - 3 = 0$ et $Q : x + y + z - 1 = 0$.

1.

Montre que les plans P et P' sont sécants.

INDICE

Pour montrer que deux triplets ne sont pas proportionnels, il suffit d'un déterminant extrait qui ne s'annule pas. Calcule-les un par un.

2.

Soit Δ la droite d'intersection de P et P'. Donne une représentation paramétrique de Δ.

INDICE

Ajoute les deux équations : z disparaît. Exprime y en fonction de x, puis z en fonction de x, et prends x comme paramètre.

3.

Montre que les trois plans P, P' et Q ont un seul point commun, et donne ses coordonnées.

INDICE

Les points communs aux trois plans sont les points de Δ qui appartiennent à Q. Remplace la représentation de Δ dans l'équation de Q ; la solution n'est pas entière.

Exercice 7

Une coplanarité qui dépend d'un réel

Dans une base de l'espace, m désigne un réel. On considère $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(0, 1, 3)$ et $\vec{w}(2, m, 1)$.

1.

Montre que $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 15 - 3m$.

INDICE

Développe suivant la première colonne. Le réel m apparaît dans deux des trois déterminants 2×2 : garde-le comme une lettre.

2.

Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forment-ils une base ? Pour quelle valeur sont-ils coplanaires ?

INDICE

Résous l'équation $15 - 3m = 0$, puis cite le théorème qui relie le déterminant et la coplanarité.

3.

On prend $m = 5$. Détermine les réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

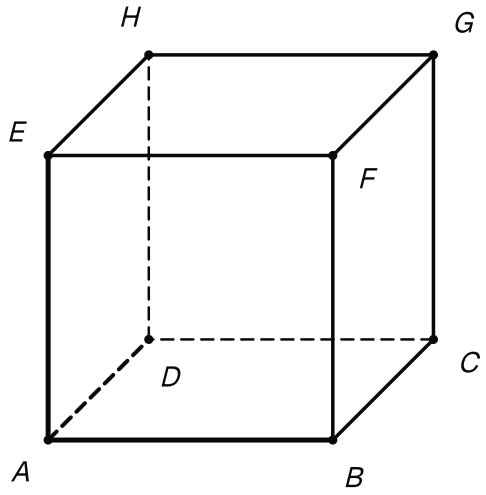
INDICE

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Écris les trois équations : la première ne contient que a.

Exercice 8

La grande diagonale d'un cube et le plan (BDE)

On considère un cube $ABCDEFGH$: faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$. Trace-le à main levée. On travaille dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Le cube de l'exercice ; les arêtes [AB], [AD], [AE] portent les vecteurs du repère.

1.

Donne les coordonnées des points B, D, E et G, en justifiant celles de G.

INDICE

Les trois premiers points se lisent sur la définition du repère. Pour G, décompose $\overrightarrow{AG}$ par la relation de Chasles en suivant trois arêtes du cube.

2.

Montre qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.

INDICE

Vérifie d'abord que B, D, E ne sont pas alignés. Puis développe $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE})$ suivant la première colonne.

3.

Montre que la droite (AG) coupe le plan (BDE) en un point K, et calcule ses coordonnées.

INDICE

Une représentation de (AG) s'écrit avec A et $\overrightarrow{AG}$. Remplace-la dans l'équation de (BDE).

4.

Vérifie que $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE} = \vec{0}$ et que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

INDICE

Calcule les trois vecteurs à partir des coordonnées de K trouvées à la question 3.