BURHAN

Géométrie analytique de l'espace : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique de l'espace	Entraînement	8

Exercice 1

Du non-alignement à la coplanarité

Dans un repère de l'espace, on donne $A(1,2,0)$, $B(3,1,1)$, $C(2,4,-1)$, $D(5,5,-1)$ et $E(1,2,1)$.

1.

Montre que les points A, B, C définissent un plan.

INDICE

Trois points définissent un plan lorsqu'ils ne sont pas alignés. Calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis cherche un déterminant extrait non nul.

CORRIGÉ

Trois points définissent un plan lorsqu'ils ne sont pas alignés.

On a $\overrightarrow{AB}(2,-1,1)$ et $\overrightarrow{AC}(1,2,-1)$. Le premier déterminant extrait vaut :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times (-1) \\ = 5.$$

Il n'est pas nul. D'après la colinéarité en coordonnées, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Les points A, B, C ne sont pas alignés : ils définissent le plan (ABC).

2.

Montre que le point D appartient au plan (ABC).

INDICE

Quatre points sont coplanaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$. Calcule d'abord $\overrightarrow{AD}$. Pour conclure, souviens-toi que A, B, C ne sont pas alignés.

CORRIGÉ

Calcul du déterminant. On a $\overrightarrow{AD}(4, 3, -1)$. On développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad + 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times 1 - (-1) \times 3 \\
&\quad + 1 \times (-5) \\
&= 2 + 3 - 5 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Coplanarité. D'après la propriété « base, points coplanaires et déterminant », les points A, B, C, D sont coplanaires.

Appartenance. Comme A, B, C ne sont pas alignés (question 1), le seul plan qui les contient est (ABC) : il contient donc aussi D.

Conclusion. Le point D appartient au plan (ABC).

3.

Détermine les réels x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

INDICE

L'égalité des coordonnées donne trois équations à deux inconnues. Tire x de la plus simple, substitue dans une autre, puis vérifie la dernière.

CORRIGÉ

L'égalité des coordonnées donne le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

La troisième équation donne $x = y - 1$. Dans la première : $2(y-1) + y = 4$, donc $3y = 6$ et $y = 2$; puis $x = 1$.

La deuxième équation est vérifiée : $-1 + 4 = 3$. Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

Conclusion. L'égalité $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ a lieu avec $x = 1$ et $y = 2$.

4.

Le point E appartient-il au plan (ABC) ?

INDICE

Même outil qu'à la question 2, avec $\overrightarrow{AE}$. Deux coordonnées de $\overrightarrow{AE}$ sont nulles : le calcul est court.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{AE}(0, 0, 1)$. On développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 2 - (-1) \times 1 \\ &\quad + 1 \times 0 \\ &= 4 + 1 + 0 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Ce déterminant n'est pas nul. D'après la même propriété, les points A, B, C, E ne sont pas coplanaires.

Conclusion. Le point E n'appartient pas au plan (ABC) : $E \notin (ABC)$, et $ABCE$ est un tétraèdre.

Exercice 2

Les coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère $\vec{u}(1,1,0)$, $\vec{v}(0,1,1)$, $\vec{w}(1,0,1)$ et $\vec{a}(3,1,4)$.

1.

Montre que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

INDICE

Un déterminant non nul suffit. Range les trois vecteurs en colonnes et développe suivant la première colonne.

CORRIGÉ

On développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 1 - 1 \times (-1) \\
&\quad + 0 \times (-1) \\
&= 1 + 1 + 0 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Le déterminant n'est pas nul. D'après la propriété « base, points coplanaires et déterminant », les trois vecteurs forment une base.

Conclusion. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

2.

Détermine les réels x, y, z tels que $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

INDICE

Écris l'égalité coordonnée par coordonnée : trois équations. Exprime y et z en fonction de x, puis remplace dans l'équation restante.

CORRIGÉ

D'après le théorème de décomposition, ces réels existent et sont uniques. L'égalité des coordonnées donne :

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ x + y = 1 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $z = 3 - x$ et $y = 1 - x$. Dans la troisième : $(1 - x) + (3 - x) = 4$, donc $-2x = 0$ et $x = 0$. Puis $y = 1$ et $z = 3$.

Vérification : $0\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}$ a pour coordonnées $(3, 1, 4)$. Donc $\vec{a} = \vec{v} + 3\vec{w}$.

Conclusion. Les réels cherchés sont $x = 0$, $y = 1$ et $z = 3$.

3.

Quelles sont les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$? Compare-les à ses coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

INDICE

Reviens à la définition des coordonnées d'un vecteur dans une base.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $\vec{a} = 0\vec{u} + 1\vec{v} + 3\vec{w}$. Par définition des coordonnées dans une base, $\vec{a}$ a pour coordonnées $(0, 1, 3)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il a pour coordonnées $(3, 1, 4)$.

Conclusion. Le même vecteur $\vec{a}$ a des coordonnées différentes dans ces deux bases : des coordonnées n'ont de sens qu'avec la base précisée.

Exercice 3

D'une représentation paramétrique à une équation de plan

Dans un repère, le plan P admet la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + s - t \\ y = -1 + 2s + t \\ z = 3 + s \end{cases}$$

avec $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.

1.

Donne un point A de P et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires qui dirigent P.

INDICE

Le point s'obtient pour $s = t = 0$. Les coefficients de s forment le premier vecteur, ceux de t le second.

CORRIGÉ

Point et vecteurs. D'après la représentation paramétrique d'un plan, P passe par $A(2, -1, 3)$, obtenu pour $s = t = 0$. Il est dirigé par $\vec{u}(1, 2, 1)$ (coefficients de s) et $\vec{v}(-1, 1, 0)$ (coefficients de t).

Non-colinéarité. Le premier déterminant extrait vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Il n'est pas nul : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Le plan P passe par $A(2, -1, 3)$ et il est dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}(1, 2, 1)$ et $\vec{v}(-1, 1, 0)$.

2.

Déduis-en une équation cartésienne de P.

INDICE

Pose $M(x,y,z)$ et écris $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0$. Développe suivant la première colonne, puis multiplie par -1 pour un premier coefficient positif.

CORRIGÉ

Caractérisation. Soit $M(x,y,z)$. Le plan P est le plan $P(A,\vec{u},\vec{v})$, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires (question 1). D'après la caractérisation vectorielle d'un plan et le critère de coplanarité (chapitre précédent), $M\in P$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires. D'après le théorème « déterminant et coplanarité », c'est le cas si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0$.

Développement. Suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})\\
&=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1\\ y+1 & 2 & 1\\ z-3 & 1 & 0\end{vmatrix}\\
&=(x-2)\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}\\
&\quad-(y+1)\begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix}\\
&\quad+(z-3)\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}\\
&=(x-2)\times(-1)\\
&\quad-(y+1)\times 1\\
&\quad+(z-3)\times 3\\
&=-x-y+3z-8.
\end{aligned}$$

Simplification. En multipliant par -1, on obtient l'équation $x+y-3z+8=0$. Contrôle avec A : $2-1-9+8=0$.

Conclusion. Le plan P a pour équation cartésienne $x+y-3z+8=0$.

3.

Les points $B(1,2,4)$ et $C(-3,1,2)$ appartiennent-ils à P ? Pour celui qui appartient à P, donne les valeurs de s et t correspondantes.

INDICE

Teste chaque point dans l'équation cartésienne : c'est plus court qu'avec la représentation. Pour retrouver s et t, commence par l'équation qui ne contient que s.

CORRIGÉ

Appartenance. On remplace dans l'équation cartésienne trouvée à la question 2.

- Pour B : $1+2-12+8=-1\neq 0$, donc $B\notin P$.
- Pour C : $-3+1-6+8=0$, donc $C\in P$.

Paramètres de C. La troisième équation de la représentation donne $2=3+s$, donc $s=-1$. La première donne $-3=2-1-t$, donc $t=4$. La deuxième est vérifiée : $-1-2+4=1$.

Conclusion. Le point B n'appartient pas à P ; le point C appartient à P et correspond à $s=-1$ et $t=4$.

Exercice 4

Où la droite (AB) traverse-t-elle le plan ?

Dans un repère, on donne $A(1,0,2)$, $B(3,1,0)$, $C(0,1,1)$, $D(1,2,2)$, et le plan P d'équation $x-2y+z+3=0$.

1.

Donne une représentation paramétrique de la droite (AB).

INDICE

Prends le point A et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{AB}(2,1,-2)$, vecteur non nul. D'après la représentation paramétrique d'une droite, $(AB)=D(A,\overrightarrow{AB})$ admet la représentation :

$$(AB):\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=2-2t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Conclusion. Ce système est une représentation paramétrique de la droite (AB).

2.

Montre que la droite (AB) coupe le plan P en un seul point K, dont tu donneras les coordonnées.

INDICE

Remplace x, y, z dans l'équation de P. Développe soigneusement : les termes en t ne s'éliminent pas tous.

CORRIGÉ

On remplace x, y, z dans le premier membre de l'équation de P :

$$\begin{aligned} &(1+2t)-2t \\ &\quad+(2-2t)+3 \\ &=6-2t. \end{aligned}$$

L'équation $6-2t=0$ a une seule solution, $t=3$. D'après la position relative d'une droite et d'un plan, (AB) coupe P en un seul point K, de paramètre 3. Contrôle : $7-6-4+3=0$.

Conclusion. La droite (AB) coupe le plan P en un seul point, $K(7,3,-4)$.

3.

Montre que la droite (CD) est strictement parallèle au plan P.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{CD}$, écris une représentation paramétrique de (CD), puis remplace dans l'équation de P. Regarde le nombre de solutions de l'équation obtenue.

CORRIGÉ

Représentation de (CD). On a $\overrightarrow{CD}(1, 1, 1)$. La droite (CD) admet la représentation $x = t$, $y = 1 + t$, $z = 1 + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Substitution. On remplace dans le premier membre de l'équation de P :

$$\begin{aligned} & t - 2(1 + t) \\ & \quad + (1 + t) + 3 \\ & = 2. \end{aligned}$$

L'équation devient $2 = 0$: elle n'a aucune solution. La droite (CD) n'a aucun point commun avec P.

Contrôle. On le retrouve par $1 \times 1 - 2 \times 1 + 1 \times 1 = 0$ et $C \notin P$, puisque $0 - 2 + 1 + 3 = 2 \neq 0$.

Conclusion. La droite (CD) est strictement parallèle au plan P.

Exercice 5

Trois droites prises deux à deux

Dans un repère, on considère trois droites :

- D, passant par $A(1, 2, 0)$, de vecteur directeur $\vec{u}(1, -1, 3)$;
- D', passant par $B(2, -1, 1)$, de vecteur directeur $\vec{v}(2, 1, -1)$;
- D'', passant par $C(0, -1, 1)$, de vecteur directeur $\vec{w}(1, 1, 1)$.

1.

Montre que les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

INDICE

Vérifie d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Calcule ensuite $\overrightarrow{AB}$ et le déterminant de $\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$.

CORRIGÉ

Non-parallélisme. Le premier déterminant extrait de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3.$$

Il n'est pas nul : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et les droites ne sont pas parallèles.

Déterminant. Avec $\overrightarrow{AB}(1, -3, 1)$:

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad - (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-2) - (-3) \times (-7) \\ &\quad + 1 \times 3 \\ &= -2 - 21 + 3 \\ &= -20. \end{aligned}$$

Ce déterminant n'est pas nul.

Conclusion. D'après le théorème des droites coplanaires, les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

2.

Montre que les droites D et D'' sont sécantes, et détermine leur point d'intersection.

INDICE

Même démarche avec $\overrightarrow{AC}, \vec{u}, \vec{w}$. Pour le point commun, écris les deux représentations avec deux paramètres distincts t et t'.

CORRIGÉ

Non-parallélisme. Le premier déterminant extrait de $\vec{u}$ et $\vec{w}$ vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Il n'est pas nul : $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Coplanarité. Avec $\overrightarrow{AC}(-1, -3, 1)$:

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{AC}, \vec{u}, \vec{w}) \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - (-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \times (-4) - (-3) \times (-2) \\ &\quad + 1 \times 2 \\ &= 4 - 6 + 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'après le théorème des droites coplanaires, D et D'' sont coplanaires. Deux droites coplanaires et non parallèles sont sécantes (tronc commun) : D et D'' sont sécantes.

Point commun. On écrit D : $x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t$ et D'' : $x = t', y = -1 + t', z = 1 + t'$. Le point commun vérifie :

$$\begin{cases} 1 + t = t' \\ 2 - t = -1 + t' \\ 3t = 1 + t' \end{cases}$$

La première équation donne $t' = 1 + t$. Dans la deuxième : $2 - t = t$, donc $t = 1$ et $t' = 2$. La troisième est vérifiée : $3 = 3$.

Conclusion. Les droites D et D'' sont sécantes. Le point d'intersection est $(2, 1, 3)$.

3.

Les droites D' et D'' sont-elles coplanaires ?

INDICE

Calcule $\overrightarrow{BC}$: deux de ses coordonnées sont nulles, ce qui simplifie le développement suivant la première colonne.

CORRIGÉ

Non-parallélisme. Le premier déterminant extrait de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vaut :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Il n'est pas nul : $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Déterminant. Avec $\overrightarrow{BC}(-2, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{BC}, \vec{v}, \vec{w}) \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2 \times 2 - 0 \times 3 \\ &\quad + 0 \times 1 \\ &= -4 - 0 + 0 \\ &= -4. \end{aligned}$$

Ce déterminant n'est pas nul.

Conclusion. D'après le théorème des droites coplanaires, les droites D' et D'' ne sont pas coplanaires.

Exercice 6

La droite commune à deux plans, puis un troisième plan

Dans un repère, on considère les plans $P : x + 2y - z + 1 = 0$, $P' : 2x - y + z - 3 = 0$ et $Q : x + y + z - 1 = 0$.

1.

Montre que les plans P et P' sont sécants.

INDICE

Pour montrer que deux triplets ne sont pas proportionnels, il suffit d'un déterminant extrait qui ne s'annule pas. Calcule-les un par un.

CORRIGÉ

Le premier déterminant extrait des triplets $(1, 2, -1)$ et $(2, -1, 1)$ vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5.$$

Il n'est pas nul : les triplets ne sont pas proportionnels.

Conclusion. D'après la propriété des plans sécants, les plans P et P' sont sécants : ils se coupent suivant une droite Δ.

2.

Soit Δ la droite d'intersection de P et P'. Donne une représentation paramétrique de Δ.

INDICE

Ajoute les deux équations : z disparaît. Exprime y en fonction de x, puis z en fonction de x, et prends x comme paramètre.

CORRIGÉ

Système équivalent. Un point $M(x, y, z)$ appartient à Δ si et seulement si ses coordonnées vérifient les deux équations. Le système formé des équations de P et P' équivaut au système formé de l'équation de P et de leur somme, $3x + y - 2 = 0$. En effet, on retrouve l'équation de P' en retranchant celle de P.

Résolution. Ce système équivaut à $y = 2 - 3x$ et $z = x + 2y + 1 = 5 - 5x$. On prend $x = t$ comme paramètre :

$$\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 3t \\ z = 5 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Contrôle. Avec le point $(0, 2, 5)$: $0 + 4 - 5 + 1 = 0$ et $0 - 2 + 5 - 3 = 0$.

Conclusion. Le système ci-dessus est une représentation paramétrique de Δ.

3.

Montre que les trois plans P, P' et Q ont un seul point commun, et donne ses coordonnées.

INDICE

Les points communs aux trois plans sont les points de Δ qui appartiennent à Q. Remplace la représentation de Δ dans l'équation de Q ; la solution n'est pas entière.

CORRIGÉ

Un point commun aux trois plans est un point de Δ situé dans Q. On remplace la représentation de Δ dans le premier membre de l'équation de Q :

$$\begin{aligned} & t + (2 - 3t) \\ & \quad + (5 - 5t) - 1 \\ & = 6 - 7t. \end{aligned}$$

L'équation $6 - 7t = 0$ a une seule solution, $t = \dfrac{6}{7}$. D'après la position relative d'une droite et d'un plan, Δ coupe Q en un seul point, celui de paramètre $\dfrac{6}{7}$. Contrôle dans Q : $\dfrac{6 - 4 + 5}{7} - 1 = 0$.

Conclusion. Les trois plans ont un seul point commun : $\left(\dfrac{6}{7}, -\dfrac{4}{7}, \dfrac{5}{7}\right)$.

Exercice 7

Une coplanarité qui dépend d'un réel

Dans une base de l'espace, m désigne un réel. On considère $\vec{u}(1,2,-1)$, $\vec{v}(0,1,3)$ et $\vec{w}(2,m,1)$.

1.

Montre que $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 15 - 3m$.

INDICE

Développe suivant la première colonne. Le réel m apparaît dans deux des trois déterminants 2×2 : garde-le comme une lettre.

CORRIGÉ

On développe suivant la première colonne, en gardant m comme une lettre :

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} 1 & m \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} \\
&= (1-3m) - 2\times(-6) \\
&\quad + (-1)\times(-2) \\
&= 15 - 3m.
\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel m, $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 15 - 3m$.

2.

Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forment-ils une base ? Pour quelle valeur sont-ils coplanaires ?

INDICE

Résous l'équation $15 - 3m = 0$, puis cite le théorème qui relie le déterminant et la coplanarité.

CORRIGÉ

On a $15 - 3m = 0$ si et seulement si $m = 5$.

- D'après le théorème « déterminant et coplanarité », les vecteurs sont coplanaires lorsque le déterminant est nul, c'est-à-dire pour $m = 5$ seulement.
- D'après la propriété « base, points coplanaires et déterminant », ils forment une base lorsque le déterminant n'est pas nul.

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forment une base pour tout réel $m \neq 5$, et ils sont coplanaires pour $m = 5$.

3.

On prend $m = 5$. Détermine les réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

INDICE

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Écris les trois équations : la première ne contient que a.

CORRIGÉ

Existence. Le premier déterminant extrait de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Il n'est pas nul : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Les vecteurs étant coplanaires (question 2), d'après le critère de coplanarité du chapitre précédent, de tels réels existent.

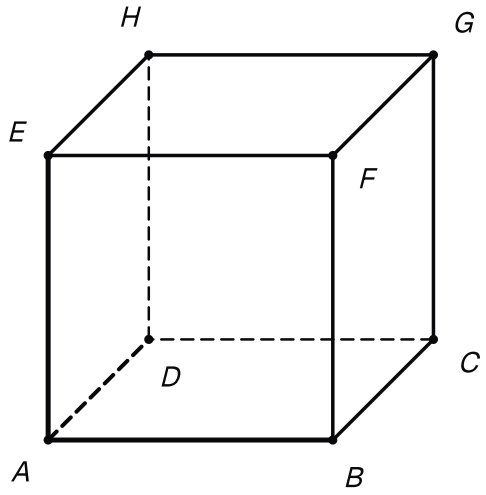
Calcul. L'égalité des coordonnées donne $a = 2$, $2a + b = 5$ et $-a + 3b = 1$. Donc $a = 2$, puis $b = 1$; la troisième équation est vérifiée : $-2 + 3 = 1$. Ainsi $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$.

Conclusion. Pour $m = 5$, les réels cherchés sont $a = 2$ et $b = 1$.

Exercice 8

La grande diagonale d'un cube et le plan (BDE)

On considère un cube $ABCDEFGH$: faces $ABCD$ (dessous) et $EFGH$ (dessus), arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$. Trace-le à main levée. On travaille dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Le cube de l'exercice ; les arêtes [AB], [AD], [AE] portent les vecteurs du repère.

1.

Donne les coordonnées des points B, D, E et G, en justifiant celles de G.

INDICE

Les trois premiers points se lisent sur la définition du repère. Pour G, décompose $\overrightarrow{AG}$ par la relation de Chasles en suivant trois arêtes du cube.

CORRIGÉ

Points B, D, E. Par définition des coordonnées dans ce repère, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$ et $E(0,0,1)$.

Point G. Les faces du cube sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Donc $G(1,1,1)$.

Conclusion. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$ et $G(1,1,1)$.

2.

Montre qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x+y+z-1=0$.

INDICE

Vérifie d'abord que B, D, E ne sont pas alignés. Puis développe $\det(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE})$ suivant la première colonne.

CORRIGÉ

Le plan (BDE). On a $\overrightarrow{BD}(-1,1,0)$ et $\overrightarrow{BE}(-1,0,1)$. Leur premier déterminant extrait vaut :

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Il n'est pas nul : ces vecteurs ne sont pas colinéaires, et (BDE) est un plan.

Développement. Soit $M(x,y,z)$. Suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE}) \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - y\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + z\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\times 1 \\ &\quad - y\times(-1) + z\times 1 \\ &= x+y+z-1. \end{aligned}$$

Caractérisation. D'après la caractérisation vectorielle d'un plan, le critère de coplanarité et le théorème « déterminant et coplanarité », $M\in(BDE)$ si et seulement si $x+y+z-1=0$.

Conclusion. Une équation cartésienne du plan (BDE) est $x+y+z-1=0$.

3.

Montre que la droite (AG) coupe le plan (BDE) en un point K, et calcule ses coordonnées.

INDICE

Une représentation de (AG) s'écrit avec A et $\overrightarrow{AG}$. Remplace-la dans l'équation de (BDE).

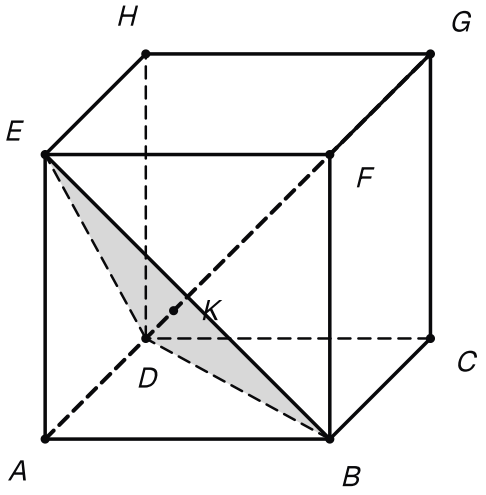
CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$, donc (AG) : $x=t$, $y=t$, $z=t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

En remplaçant dans l'équation de (BDE), on obtient $3t-1=0$, qui a une seule solution, $t=\dfrac{1}{3}$.

D'après la position relative d'une droite et d'un plan, (AG) coupe (BDE) en un seul point.

Conclusion. La droite (AG) coupe le plan (BDE) au seul point $K\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.



La diagonale (AG) perce le plan (BDE) au point K, plus près de A que de G.

4.

Vérifie que $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE}=\vec{0}$ et que $\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

INDICE

Calcule les trois vecteurs à partir des coordonnées de K trouvées à la question 3.

CORRIGÉ

Somme des trois vecteurs. À partir de $K\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, on obtient $\overrightarrow{KB}\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{KD}\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{KE}\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Chaque coordonnée de la somme comporte une fois $\frac{2}{3}$ et deux fois $-\frac{1}{3}$:

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0.$$

La somme est donc le vecteur nul.

Vecteur $\overrightarrow{AK}$. On a $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$: chaque coordonnée de $\overrightarrow{AK}$ est le tiers de celle de $\overrightarrow{AG}$.

Conclusion. $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.