BURHAN

Géométrie analytique de l'espace : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique de l'espace	Application	10

Exercice 1

Coordonnées de vecteurs et de milieux

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on donne les points $A(2, -1, 4)$, $B(-4, 3, 0)$ et $C(1, 5, -2)$.

1.

Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

On soustrait les coordonnées de l'origine du vecteur à celles de son extrémité. Écris la soustraction avant de la calculer : les coordonnées négatives demandent des parenthèses.

2.

Calcule les coordonnées du milieu I de $[AB]$ et du milieu J de $[BC]$.

INDICE

Chaque coordonnée du milieu est la demi-somme des coordonnées correspondantes des extrémités. Pour J, une demi-somme n'est pas forcément entière : garde la fraction.

3.

Calcule les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Calcule d'abord les coordonnées de $-2\overrightarrow{AC}$, en multipliant chaque coordonnée par -2. Ajoute ensuite celles de $\overrightarrow{AB}$, coordonnée par coordonnée.

Exercice 2

Placer un point par une égalité vectorielle

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(1, 2, -3)$, $B(3, -2, 1)$ et $C(0, 4, 5)$.

1.

Détermine les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

INDICE

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Écris les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ avec les inconnues x_D, y_D, z_D, puis identifie.

2.

Détermine les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$, puis celles du vecteur $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Il reste à les ajouter à celles de A.

3.

Détermine les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

INDICE

Fais apparaître l'origine par la relation de Chasles : $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}$. Tu obtiens une égalité qui donne $\overrightarrow{OG}$.

Exercice 3

Colinéaires ou non : trois déterminants extraits

Les coordonnées sont données dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, puis dans un repère d'origine O.

1.

Montre que les vecteurs $\vec{u}(2, -3, 1)$ et $\vec{v}(-6, 9, -3)$ sont colinéaires, et donne le réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

INDICE

Compare les premières coordonnées pour proposer un réel λ. Vérifie ensuite qu'il convient aussi pour la deuxième et la troisième coordonnée.

2.

Les vecteurs $\vec{a}(1, 2, -1)$ et $\vec{b}(3, 6, -2)$ sont-ils colinéaires ?

INDICE

Calcule les déterminants extraits un par un. Un premier déterminant nul ne permet pas encore de conclure.

3.

Dans le repère, les points $P(0, 1, -2)$, $Q(1, 3, -3)$ et $S(3, 7, -5)$ sont-ils alignés ?

INDICE

Trois points sont alignés si et seulement si deux vecteurs qu'ils forment sont colinéaires. Calcule $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PS}$.

Exercice 4

Calculer un déterminant de trois vecteurs

Dans une base de l'espace, on considère $\vec{u}(2,1,0)$, $\vec{v}(-1,3,2)$ et $\vec{w}(1,0,4)$.

1.

Calcule $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

INDICE

Écris les trois vecteurs en colonnes, dans l'ordre. Développe suivant la première colonne avec les signes $+$, $-$, $+$, puis calcule chaque déterminant 2×2 par la règle $ad-bc$.

2.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forment-ils une base de l'espace ?

INDICE

Un résultat du cours relie la base et le signe du déterminant : nul ou non nul.

3.

Sans nouveau calcul, donne $\det(\vec{v},\vec{u},\vec{w})$ et $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{u})$.

INDICE

Repère ce qui change d'un déterminant à l'autre : un échange de deux vecteurs, ou deux vecteurs égaux. Les propriétés du déterminant disent ce qui en résulte.

Exercice 5

Trois vecteurs : coplanaires ou base ?

Dans une base de l'espace, on donne $\vec{u}(1,-1,2)$, $\vec{v}(2,1,-1)$, $\vec{w}(4,-1,3)$ et $\vec{w}'(4,-1,4)$.

1.

Calcule $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. Que peut-on en déduire ?

INDICE

Range $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ en colonnes et développe suivant la première colonne. Prends garde au signe $-$ devant le deuxième terme, alors que la deuxième coordonnée de $\vec{u}$ est déjà négative.

2.

Vérifie que $\vec{w}=2\vec{u}+\vec{v}$.

INDICE

Calcule les coordonnées de $2\vec{u}+\vec{v}$ et compare-les à celles de $\vec{w}$.

3.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}'$ forment-ils une base ?

INDICE

Seule la troisième colonne change. Recalcule les trois déterminants 2×2 qui en dépendent.

Exercice 6

Une droite et ses points

Dans un repère de l'espace, soit $A(3, 0, -1)$ et $B(1, 2, 0)$.

1.

Donne une représentation paramétrique de la droite (AB).

INDICE

Prends le point A, et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur : vérifie qu'il n'est pas nul.

2.

Le point $M(-1, 4, 1)$ appartient-il à (AB) ?

INDICE

Remplace x, y, z par les coordonnées de M et tire t de chaque équation.

3.

Le point $N(5, -2, 0)$ appartient-il à (AB) ?

INDICE

Même démarche. Ne conclus qu'après la troisième équation.

4.

Détermine le point de (AB) dont la cote est égale à 3.

INDICE

La cote est la troisième coordonnée : écris $-1 + t = 3$, puis remplace la valeur de t dans les deux autres équations.

Exercice 7

L'équation d'un plan défini par trois points

Dans un repère, on considère les points $A(1,1,0)$, $B(2,0,1)$ et $C(0,2,2)$.

1.

Montre que les points A, B, C ne sont pas alignés.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Calcule les déterminants extraits un par un ; un seul non nul suffit.

2.

Détermine une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

Pose $M(x,y,z)$: $M \in (ABC)$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. La première colonne contient $x-1, y-1, z$: garde les parenthèses en développant.

3.

Les points $D(5,-3,7)$ et $E(1,0,4)$ appartiennent-ils au plan (ABC) ?

INDICE

Remplace les coordonnées de chaque point dans l'équation trouvée.

Exercice 8

Reconnaître les vecteurs de direction d'un plan

Dans un repère, soit P le plan d'équation $3x - 2y + z - 6 = 0$, et les vecteurs $\vec{u}(1, 1, -1)$, $\vec{v}(2, 3, 0)$, $\vec{w}(1, 0, 3)$.

1.

Lesquels de ces trois vecteurs sont des vecteurs de direction du plan P ?

INDICE

Un vecteur de coordonnées (α, β, γ) dirige le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ lorsque $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$. Le réel d n'intervient pas.

2.

Vérifie que le point $A(2, 0, 0)$ appartient à P, et donne deux vecteurs de direction non colinéaires de P .

INDICE

Remplace les coordonnées de A dans l'équation. Parmi les vecteurs de la question 1, teste la colinéarité de deux vecteurs de direction.

3.

Déduis-en une représentation paramétrique de P.

INDICE

Écris la représentation du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$. Pour justifier que ce plan est bien P, remplace la représentation dans l'équation de P.

Exercice 9

Trois droites face à un plan

Dans un repère, soit P le plan d'équation $x - y + 2z + 1 = 0$. Pour chaque droite, précise sa position relative par rapport à P et, s'il existe un seul point commun, donne-le.

1.

La droite D_1 de représentation paramétrique $x = 1 + 2t, y = 3 + t, z = -1 + t, t \in \mathbb{R}$.

INDICE

Substitue les trois expressions en t dans l'équation de P, puis réduis le résultat.

2.

La droite D_2 de représentation paramétrique $x = 2 + t, y = 1 + 3t, z = t, t \in \mathbb{R}$.

INDICE

Même démarche. Regarde le coefficient de t avant de conclure ; selon sa valeur, le terme constant décide.

3.

La droite D_3 passant par $C(-1, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(1, 1, 0)$.

INDICE

Écris d'abord une représentation paramétrique de D_3, puis procède comme aux questions précédentes.

Exercice 10

Plans parallèles, confondus ou sécants

Dans un repère, soit P le plan d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$. Précise la position relative de P et de chacun des plans suivants.

1.

Le plan P_1 d'équation $-4x + 2y - 6z + 2 = 0$.

INDICE

Cherche un réel λ tel que $(-4, 2, -6) = \lambda(2, -1, 3)$. Compare ensuite le terme constant de P_1 à λ fois celui de P.

2.

Le plan P_2 d'équation $6x - 3y + 9z + 5 = 0$.

INDICE

Même démarche : trouve λ, puis compare les termes constants.

3.

Le plan P_3 d'équation $x + y + z = 0$.

INDICE

Pour montrer que deux triplets ne sont pas proportionnels, il suffit d'un déterminant extrait qui ne s'annule pas. Calcule-les un par un.